Введение в Markov chain Monte Carlo

Семинар был посвящён задачам рандомизации. Мы рассмотрели различные методы генерации случайных величин (с.в.), обсудили некоторые задачи статистического моделирования, а также вспомнили идею методов Монте Карло. Эти темы являются подготовительными к Markov chain Monte Carlo (MCMC) методам.

В качестве мотивирующего примера для задач статистического моделирования мы рассмотрели модифицированную задачу о двух конвертах. На её примере было продемонстрировано, что в задачах, где присутствует случайность, рандомизированные алгоритмы решения могут быть лучше детерминированных. В следствие чего был поднят вопрос генерирования с.в., имеющих заданное распределение.

Первый метод генерирования с.в. с непрерывным распределением основан на квантильном преобразовании. Пусть F – непрерывная функция распределения, а $U \sim U[0,1]$, тогда

$$\mathbf{P}(F^{-1}(U) < t) = \mathbf{P}(U < F(t)) = F(t), \text{ то есть } F^{-1}(U) \sim F.$$

Таким образом, вопрос о моделировании любой с.в. с непрерывным распределением может быть сведён к моделированию с.в., имеющей равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ и нахождению квантильного преобразования для функции распределения.

В небольшом отступлении мы обсудили идеи алгоритмов генерации псевдослучайных последовательностей, позволяющих получать последовательность независимых бит (т.е., бернуллиевских с.в.).

Однако, вопрос о поиске квантильного преобразования достаточно сложен. Поэтому описанный метод, несмотря на его общность, на практике позволяет моделировать очень ограниченный класс с.в.

В следующем разделе мы разобрали алгоритм Бокса — Мюллера моделирования последовательности независимых с.в., имеющих стандартное нормальное распределение.

Теорема 1 (Алгоритм Бокса — Мюллера)**.**
Пусть U_1, U_2 — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение $U[0,1]$. Тогда с.в. X_1, X_2 такие, что

$$X_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2,$$
$$X_2 = \sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2$$

независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Алгоритм выборки с отклонением

Эта часть посвящена идее метода выборки с отклонением (acceptance-reject method, метод принятия-отклонения), на котором основаны MCMC методы. Была разобрана следующая теорема:

Теорема 2 (Основная теорема моделирования)**.**
Если F — функция абсолютно непрерывного распределения с плотностью f, а $(X, U) \sim U(S)$, где $S = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq f(x)\}$ — подграфик плотности f, то $X \sim F$, а $U|X \sim U[0, f(X)]$.

Таким образом одномерная задача семплирования абсолютно непрерывной с.в. эквивалентна двумерной задаче гененирования случайного вектора, имеющего равномерное распределение на подграфике плотности этой с.в.. Такое представление (при дополнительных требованиях на F) позволяет получить эффективные алгоритмы моделирования.

Следствие 1. *Пусть F — функция абсолютно непрерывного распределения с плотностью f такой, что $supp(f) = [a, b]$ и $f(x) < M < \infty$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Предположим также, что последовательности независимых с.в. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ таковы, что $X_i \sim U[a, b]$ и $U_i \sim U[0, M]$ при всех $i \geq 1$. Тогда, последовательность $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$, построенная по следующему алгоритму:*

1. *Если $U_i < f(X_i)$, то $Y_k = X_i$ (принятие);*
2. *Если $U_i > f(X_i)$, то пара (X_i, U_i) пропускается и рассматривается следующая (отклонение);*

имеет распределение F, и все Y_k независимы.

Следствие 2. *Пусть F и G — функции абсолютно непрерывных распределений с плотностями f и g соответственно, причём $f(x) \leq Mg(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть последовательности независимых с.в. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ таковы, что $X_i \sim G$ и $U_i \sim U[0, 1]$ при всех $i \geq 1$. Тогда, последовательность $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$, построенная по следующему алгоритму:*

1. *Если $U_i < \frac{f(X_i)}{Mg(X_i)}$, то $Y_k = X_i$ (принятие);*
2. *Если $U_i > \frac{f(X_i)}{Mg(X_i)}$, то пара (X_i, U_i) пропускается и рассматривается следующая (отклонение);*

имеет распределение F, и все Y_k независимы.

Сформулированные следствия предоставляют большие возможности для моделирования случайных величин, имеющих различные распределения.

Наконец, мы кратко обсудили идею численного интегрирования с помощью простейшего метода Монте Карло, а также рассмотрели задачу подсчёта стоимости опциона в модели Блэка — Шоулза как пример использования рассмотренных на семинаре методов.