27.03.2020 - «Асимптотика самой правой точки ветвящегося случайного блуждания при наличии тяжелых хвостов распределений»

На семинаре мы рассмотрели ветвящийся процесс Z_n, эволюционирующий по следующей схеме: в начальный момент времени $n = 0$ существует одна частица; каждая частица, существующая в момент времени $n \geq 0$, независимо и от других, и от предыстории делится на случайное число потомков, причем, распределение их количества, вообще говоря, может меняться от поколения к поколению.

Более формально,

$$Z_0 = 1,\ Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \zeta_j^{(n)} \text{ для } n \geq 0,$$

причем последовательность случайных величин $\{\zeta_j^{(n)}\}_{j,n=0}^{\infty}$ состоит из независимых и при каждом $n \geq 0$ одинаково распределенных случайных величин таких, что $\zeta_j^{(n)} \geq 1$ при любых j, n.

Мы предполагаем, что выполнено следующее условие затухания:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\zeta_1^{(n)}\right] < \infty. \tag{1}$$

Смысл условия проясняется следующей леммой:

Лемма 1. *Пусть выполнено условие (1). Тогда существует положительная целочисленная интегрируемая случайная величина Z_∞ такая, что*

$$Z_N \to Z_\infty \text{ п.н. и в } L_1 \text{ при } N \to \infty.$$

Более того, момент прекращения ветвления $\nu = \inf\{n \geq 1 : Z_n = Z_\infty\}$ конечен с вероятностью единица.

Затем, мы изучили свойства случайных величин ν и Z_∞, описанные следующими двумя леммами:

Лемма 2. *Пусть выполнено условие (1), $q_n = \mathbb{P}\left(\zeta_1^{(n)} \neq 1\right)$.*

1. *Если $\sum_{n=0}^{\infty} n^s q_n < \infty$ для некоторого $s \geqslant 1$, то $\mathbb{E}\left[\nu^s\right] < \infty$.*
2. *Если $\limsup_{n\to\infty} q_n e^{\lambda n} < \infty$ при некотором $\lambda > 0$, то $\mathbb{E}\left[e^{\alpha\nu}\right] < \infty$ для всех $\alpha < \lambda$.*

Лемма 3. *Пусть*

$$\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\zeta_1^{(n)}\right)^{1+\varepsilon}\right] < \infty$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. *Тогда* $\mathbb{E}\left[Z_\infty^{1+\varepsilon}\right] < \infty$.

Далее, мы перешли к рассмотрению ветвящихся случайных блужданий. Каждому ветвящемуся процессу можно естественным образом сопоставить ориентированное случайное дерево $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ со счётным множеством узлов, построенное по следующему рекурсивному правилу: каждый узел $v_j \in \mathcal{V}$ уровня $n \geqslant 0$ имеет ровно $\zeta_v = \zeta_j^{(n)}$ инцидентных ему узлов уровня $n+1$.

Путь π представляет собой произвольный путь в графе $\mathcal{T}$, начинающийся в корне этого дерева. Через $|\pi|$ будем обозначать длину пути π. Иными словами, путь – это любая (конечная или бесконечная) генеалогическая последовательность частиц, в которой каждая следующая частица — прямой потомок предыдущей, а первая частица — прародитель всей системы частиц.

Мы рассмотрели соответствующее ветвящемуся процессу Z_n ветвящееся случайное блуждание $S(\pi) = \sum_{e\in\pi} \xi_e$, где с.в. $\{\xi_e\}_{e\in\mathcal{E}}$ независимы и имеют одно распределение F, а π — произвольный путь в графе $\mathcal{T}$ с началом в корне этого дерева, причем, последовательность случайных величин $\{\xi_e\}_{e\in\mathcal{E}}$ не зависит от последовательности $\{\zeta_j^{(n)}\}_{j,n=0}^{\infty}$.

Обозначим через $R_n = \sup_{\pi:|\pi|\leqslant n} S(\pi)$ — самую правую точку ветвящегося случайного блуждания вплоть до поколения $n \geqslant 1$. Пусть μ — неотрицательная целочисленная случайная величина.

При выполнении условия (1) мы изучили асимптотику хвостов распределений случайных величин R_μ и $R \equiv R_\infty = \sup_\pi S(\pi)$ — самой правой точки ветвящегося случайного блуждания во всех поколениях (Теоремы 1 и 2).

Теорема 1. *Пусть* σ*-алгебры* $\sigma(\mu; \zeta_j^{(n)}, n \geqslant 0, j \geqslant 1)$ *и* $\sigma(\xi_e, e \in \mathcal{E})$ *независимы,* $\mathbb{E}[\mu Z_\mu] < \infty$, $\mathbb{E}[\xi] < 0$ *и* F *— сильно субэкспоненциальное распределение. Тогда*

$$\mathbb{P}(R_\mu > x) \sim \mathbb{E}[\eta_\mu] \cdot \overline{F}(x) \text{ при } x \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (1),* $\mathbb{E}[\xi] = -a < 0$ *и* F *— сильно субэкспоненциальное распределение. Тогда*

$$\mathbb{P}(R > x) \sim \frac{\mathbb{E}[Z_\infty]}{a} \cdot \overline{F}_I(x) \text{ при } x \to \infty. \tag{2}$$