06.03.2020 - "Fundamentals of Stein's method", Nathan Ross

На семинаре мы обсудили основные определения и утверждения, связанные с методом Штейна для пуассоновской аппроксимации.

В основе метода лежат две следующие леммы, доказательство которых мы привели на семинаре.

Лемма 1. *For $\lambda > 0$, define the functional operator $\mathcal{A}$ by*

$$\mathcal{A}f(k) = \lambda f(k+1) - kf(k).$$

1. *If the random variable Z has the Poisson distribution with mean λ, then $\mathbb{E}\mathcal{A}f(Z) = 0$ for all bounded f.*

2. *If for some non-negative integer-valued random variable W, $\mathbb{E}\mathcal{A}f(W) = 0$ for all bounded functions f, then W has the Poisson distribution with mean λ.*

The operator $\mathcal{A}$ is referred to as a characterizing operator of the Poisson distribution.

Лемма 2. *Let $\mathcal{P}_\lambda$ denote probability with respect to a Poisson distribution with mean λ and $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$. The unique solution f_A of*

$$\lambda f_A(k+1) - kf_A(k) = \mathbb{I}[k \in A] - \mathcal{P}_\lambda(A) \tag{1}$$

with $f_A(0) = 0$ is given by

$$f_A(k) = \lambda^{-k} e^{\lambda}(k-1)! \left[\mathcal{P}_\lambda\left(A \cap U_k\right) - \mathcal{P}_\lambda(A)\mathcal{P}_\lambda\left(U_k\right)\right]$$

where $U_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$

Также, мы обсудили следующий результат:

Лемма 3. *If f_A solves (1), then*

$$\|f_A\| \leqslant \min\left\{1, \lambda^{-1/2}\right\} \text{ and } \|\Delta f_A\| \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \min\left\{1, \lambda^{-1}\right\} \tag{2}$$

where $\Delta f(k) := f(k+1) - f(k)$

Как следствие этих результатов мы получили утверждение, лежащее в основе метода Штейна для пуассоновской аппроксимации — Теорему 1.

Теорема 1. *Let $\mathcal{F}$ be the set of functions satisfying (2). If $W \geqslant 0$ is an integer-valued random variable with mean λ and $Z \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, then*

$$d_{\mathrm{TV}}(W, Z) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} \left|\mathbb{E}[\lambda f(W+1) - Wf(W)]\right|.$$

Пользуясь Теоремой 1 мы доказали так называемый «закон малых чисел» для вообще говоря зависимых случайных величин.

Теорема 2. *Let $X_1, \ldots, X_n$ indicator random variables with $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$, $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$ and $\lambda = \mathbb{E}[W] = \sum_i p_i$. For each i, let $N_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ such that X_i is independent of $\{X_j : j \notin N_i\}$. If $p_{ij} := \mathbb{E}[X_i X_j]$ and $Z \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, then*

$$d_{\mathrm{TV}}(W, Z) \leqslant \min\left\{1, \lambda^{-1}\right\} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} p_i p_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i / \{i\}} p_{ij} \right)$$

В случае независимых случайных величин $X_1, \ldots X_n$ оценка в Теореме 2 принимает вид:

$$d_{\mathrm{TV}}(W, Z) \leqslant \min\left\{1, \lambda^{-1}\right\} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \leqslant \min\{1, \lambda\} \max_i p_i$$

Оставшаяся часть семинара была посвящена применению Теоремы 2 к следующей задаче (связанной со сравнением ДНК-последовательностей).

Задача. *Let $Y_1, \ldots, Y_n$ be i.i.d. indicator variables with $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ and let*

$$X_1 = \prod_{j=1}^{k} Y_j$$

and for $i = 2, \ldots, n-k+1$ let

$$X_i = (1 - Y_{i-1}) \prod_{j=0}^{k-1} Y_{i+j}.$$

Let $W = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_i$. Then

$$d_{\mathrm{TV}}(W, Z) \leqslant \lambda^2 \frac{2k+1}{n-k+1} + 2\lambda p^k,$$

where $\lambda = p^k((n-k)(1-p)+1)$ and $Z \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.