28.02.2020 -"Fundamentals of Stein's method", Nathan Ross

На семинаре мы рассмотрели определение и основные свойства несмещенного каплинга и его применения в методе Штейна.

Определение 1. *Пусть W — случайная величина, $\mathbb{E}W = 0$, $\mathbb{D}W = \sigma^2 < \infty$. Говорят, что случайная величина W^z имеет несмещенное по отношению к W распределение, если*

$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \sigma^2 \mathbb{E}f'(W^z)$$

для любой абсолютно непрерывной функции f такой, что $\mathbb{E}|Wf(W)| < \infty$.

Мы привели доказательство теоремы о существовании и единственности (в смысле распределения) случайной величины W^z.

Теорема 1. *Let W be a random variable with $\mathbb{E}W = 0$ and $\mathbb{D}W = \sigma^2 < \infty$.*

1. *There is a unique probability distribution for a random variable W^z satisfying*

$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \sigma^2 \mathbb{E}\left[f'\left(W^z\right)\right]$$

   for all absolutely continuous f such that $\mathbb{E}|Wf(W)| < \infty$.

2. *The distribution of W^z is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure with density*

$$p^z(x) = \sigma^{-2}\mathbb{E}[W\mathbb{I}[W > x]] = -\sigma^{-2}\mathbb{E}[W\mathbb{I}[W \leqslant x]]$$

Затем мы обсудили способ построения несмещенной версии для суммы независимых случайных величин и доказали следующее утверждение.

Утверждение 1. *Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent random variables with $\mathbb{E}X_i = 0, \mathbb{D}X_i = \sigma_i^2, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 1$. Define $W = \sum_{i=1}^n X_i$. Then we have the following recipe for constructing W^z:*

1. *For each $i = 1, \ldots, n$, let X_i^z have the zero-bias distribution of X_i independent of $\left(X_j\right)_{j\neq i}$ and $\left(X_j^z\right)_{j\neq i}$.*

2. *Choose a random summand X_I, where the index I satisfies $\mathbb{P}(I = i) = \sigma_i^2$ and is independent of all else.*

3. *$W^z = \sum_{j\neq I} X_j + X_I^z$*

Далее мы обсудили связь между введенным понятием и методом Штейна. Известно, что для расстояния Вассерштейна справедлива оценка:

$$d_W(Z,W) \leqslant \sup_{f\in\mathcal{F}} |\mathbb{E}[f'(W) - Wf(W)]|,$$

где $\mathcal{F} = \{f : \|f\|, \|f''\| \leqslant 2, \|f'\| \leqslant \sqrt{2/\pi}\}$ и $Z \sim N(0,1)$. В терминах W^z оценка принимает вид

$$d_W(Z,W) \leqslant \sup_{f\in\mathcal{F}} |\mathbb{E}[f'(W) - f'(W^z)]|,$$

что позволяет, пользуясь определением $\mathcal{F}$ и свойствами W^z получить ряд интересных утверждений.

Мы доказали две теоремы, связанные с ЦПТ Линдеберга. Первая из них устанавливает критерий выполнения условия Линдеберга.

Теорема 2. *Let $(X_{i,n})_{1\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant n}$ be a triangular array of random variables (that is, for each n, $(X_{i,n})_{1\leqslant i\leqslant n}$ is a collection of independent random variables) such that $\mathbb{E}X_{i,n} = 0$ and $\mathbb{D}X_{i,n} = \sigma_{i,n}^2 < \infty$. Let $W_n = \sum_{i=1}^n X_{i,n}$, and assume that $\mathbb{D}W_n = 1$. Let I_n be a random variable independent of the $X_{i,n}$ and such that $\mathbb{P}(I_n = i) = \sigma_{i,n}^2$. For each $1 \leqslant i \leqslant n$ let $X_{i,n}^z$ have the zero-bias distribution of $X_{i,n}$ independent of all else.*
Then the Lindeberg condition

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_{i,n}^2 \mathbb{I}\left[|X_{i,n}| > \varepsilon\right]\right] \to 0 \text{ as } n\to\infty \text{ for all } \varepsilon > 0$$

holds if and only if

$$X_{I_n,n}^z \xrightarrow{p} 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Наконец, пользуясь предыдущими утверждениями, мы доказали ЦПТ Линдеберга.

Теорема 3 (ЦПТ Линдеберга)**.** *In the notation of Theorem 2, if $X_{I_n,n}^z \to 0$ in probability as $n \to \infty$, then W_n satisfies a CLT.*

В завершение семинара мы поговорили о нормальной аппроксимации в метрике Колмогорова. Мы установили справедливость оценки

$$d_K(W,Z) \leqslant \sup_{f\in\mathcal{F}} |\mathbb{E}[f'(W) - Wf(W)]| = \sup_{f\in\mathcal{F}} |\mathbb{E}[f'(W) - f'(W^z)]|,$$

где $\mathcal{F}$ — множество функций f таких, что $\|f\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\|f'\| \leqslant 2$ и

$$|(w+u)f(w+u) - (w+v)f(w+v)| \leqslant (|w| + \sqrt{2\pi}/4)(|u| + |v|),$$

а $Z \sim N(0,1)$.

Наконец, мы доказали теорему о нормальной аппроксимации в метрике Колмогорова:

Теорема 4. *Let W be a mean zero, variance one random variable and suppose there is W^z having the zero-bias distribution of W on the same space as W such that $|W^z - W| \leqslant \delta$ almost surely. If Z is standard normal, then*

$$d_{\mathrm{K}}(W, Z) \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right)\delta.$$

и применили её для $W = \sigma^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ — суммы независимых ограниченных ($|X_i| \leqslant C$ п.н.) случайных величин с нулевым средним и конечной ненулевой дисперсией ($\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_i$):

$$d_K(W, Z) \leqslant \frac{2C(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4})}{\sigma}.$$