21.02.20. "Fundamentals of Stein's method", Nathan Ross

На семинаре мы рассмотрели обобщение метода Штейна на случай сумм случайных величин, имеющих локальные зависимости, и применили результат для оценки числа треугольников в случайном графе Эрдёша – Реньи.

Определение 1 *Мы говорим, что набор случайных величин* $(X_1, ..., X_n)$ *имеет локальные зависимости* $N_i \subseteq \{1, ..., n\}$, $i = 1, ..., n$, *если* X_i *не зависит от* $\{X_j\}_{j \notin N_i}$.

Верна следующая теорема:

Теорема 1 *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *– случайные величины с* $\mathbb{E}\,|X_i|^4 < \infty, \mathbb{E}X_i = 0$, $\sigma^2 = Var(\sum_{i=1}^n X_i)$ *и определим* $W = (\sum_{i=1}^n X_i)/\sigma$. *Пусть* $(X_1, ..., X_n)$ *имеет локальные зависимости* $N_i \subseteq \{1, ..., n\}$, $i = 1, ..., n$, *с* $D = \max_{1 \le i \le n} |N_i|$. *Тогда для* $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ *имеет место оценка:*

$$d_{\mathrm{W}}(W, Z) \leqslant \frac{D^2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,|X_i|^3 + \frac{\sqrt{26} D^{3/2}}{\sqrt{\pi}\sigma^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,[X_i^4]}.$$

Интересным является тот факт, что при некоторых дополнительных условиях будет иметь место сходимость к нормальному закону, несмотря на рост D при $n \to \infty$. Это можно увидеть на примере оценки числа треугольников в случайном графе Эрдёша-Реньи:
Пусть $G = G(n, p)$ случайный граф с n вершинами и вероятностью появления ребра p, и T – число треугольников в G. Мы можем определить $T = \sum_{i=1}^N Y_i$, где Y_i индикатор треугольника, а $N = C_n^3$. Объявим Y_i и $Y_j, i \neq j$ независимыми если и только если треугольники i и j не имеют общих ребер. Значит, можно определить окрестности зависимости. Далее, вычисляя все необходимые величины для применения теоремы 1 со с.в. $X_i = Y_i - p^3$, получаем следующую оценку:

$$d_{\mathrm{W}}(W, Z) \leqslant \frac{(3n-8)^2}{\sigma^3} C_n^3 p^3 (1-p^3)[(1-p^3)^2 + p^6] + \tag{1}$$

$$\frac{\sqrt{26}(3n-8)^{3/2}}{\sqrt{\pi}\sigma^2} \sqrt{C_n^3 p^3 (1-p^3)[(1-p^3)^3 + p^9]}. \tag{2}$$

Если провести ассимптотический анализ в предположении, что $p \sim n^{-\alpha}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, становится понятно, что сходимость к нормальному закону имеет место только при $0 \leqslant \alpha < 2/9$.