Беспроводные сети ad-hoc. Продолжение

Мы начали с напоминания модели.

Пусть на плоский круг единичной площади бросаются независимо и равномерно N передатчиков, чьё положение обозначим X_i, $i = 1, \dots, n$. Полагаем, что каждый передатчик способен передавать информацию только на расстояние $r(n)$, т.е. передатчик i может передавать данные передатчику j, только если $\|X_i - X_j\| \leq r(n)$. Для успешной одновременной передачи данных передатчиками i и k необходимо, чтобы $\|X_i - X_k\| > (1+\Delta)r(n)$ для некоторой константы $\Delta > 0$.

Дополнительно на круг бросаются независимо и равномерно N пользователей, чьё положение обозначим Y_i, $i = 1, \dots, n$, при этом $\{X_i\}_{i=1}^n$ и $\{Y_j\}_{j=1}^n$ независимы. Данные пользователи обмениваются друг с другом информацией посылая её по цепочке передатчиков. Мы считаем, что для пользователей такие же ограничения на передачу информации, что и для переключателей. Пусть каждый пользователь выбрал себе независимо ни от чего другого пользователя, которому будет посылать данные.

Мы говорим, что наша система имеет *проходимость* не меньше λ, если существует такое расписание и такое число $T > 0$, что внутри любого временного промежутка $[(m-1)T,\ T)$, $m \geq 1$, каждый пользователь может успешно отправить не менее λT единиц данных.

Теорема 1. *Пусть у всех пользователей и передатчиков одинаковая скорость передачи данных. Тогда существуют такие константы $c, c' > 0$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\textit{Проходимость системы не меньше } \frac{c}{(1+\Delta)^2\sqrt{n\ln n}}\} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\textit{Проходимость системы не меньше } \frac{c'}{\Delta^2\sqrt{n\ln n}}\} = 0.$$

Мы посвятили семинар обсуждению доказательства первого утверждения теоремы.

Мы внесли структуру для нашей системы, используя разбиение Вороного. Для набора точек $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ (количество точек не было уточнено) мы выделяем множества

$$V_l = \{x : |x - a_l| = \min_i(|x - a_i|)\}.$$

Мы доказали, что можно выбрать точки $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ так, чтобы каждая ячейка V_i содержала внутри круг радиуса ρ и содержалась внутри круга радиуса 2ρ. Мы выбрали

$$r(n) = 8\rho(n) = 8\sqrt{\frac{100\ln n}{\pi n}}.$$

Данный выбор гарантирует, что

- в каждой ячейке с большой вероятностью находится хотя бы одна точка X_i;
- из каждой ячейки можно посылать данные в соседние;
- каждой ячейке может мешать передавать данные ограниченное число других ячеек ($< c(1+\Delta)^2$).

На основе этого мы предложили схему передачи данных.

Мы ввели дополнительные теоретические сведения для иллюстрации техники доказательства основного утверждения.

Множество множеств $\mathcal{F}$ *разбивает* множество точек A, если для любого подмножества $B \subset A$ найдётся $S \in \mathcal{F}$, что $A \cap S = B$. Определим размерность Вапника-Червоненкиса (также называемая *комбинаторная размерность*):

$$VC - d(\mathcal{F}) = \sup\{|A| : \ \mathcal{F} \ \text{ разбивает } \ A\}.$$

Теорема 2. *(теорема Вапника-Червоненкиса) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Пусть $VC - d(\mathcal{F}) < \infty$. Тогда для любых $\varepsilon, \delta > 0$ выполнено*

$$\mathbb{P}\{\sup_{S \in \mathcal{F}} |\frac{1}{n} \sum_{i=1} \mathbb{I}[X_i \in S] - \mathbb{P}\{X_1 \in S\}| < \varepsilon\} > 1 - \delta,$$

как только

$$n > \max\left(\frac{8VC - d(\mathcal{F})}{\varepsilon}, \ln\frac{16e}{\varepsilon}, \frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{2}{\delta}\right).$$

Используя последнее утверждение можно показать, что в каждой ячейке с большой вероятностью находится хотя бы одна точка X_i, а также, что через каждую ячейку с большой вероятностью проходит не более $c_1\sqrt{n \ln n}$ путей сообщения для некоторой $c_1 > 0$. Таким образом показано основное утверждение.