Случайные блуждания

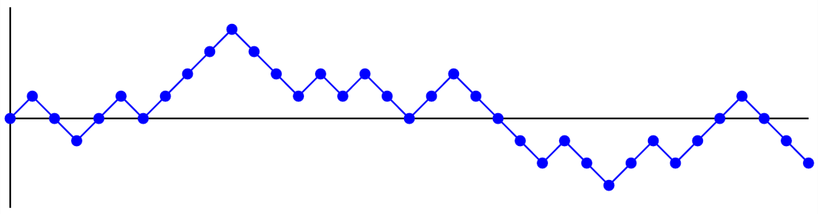
15 марта 2020 г.

План семинара

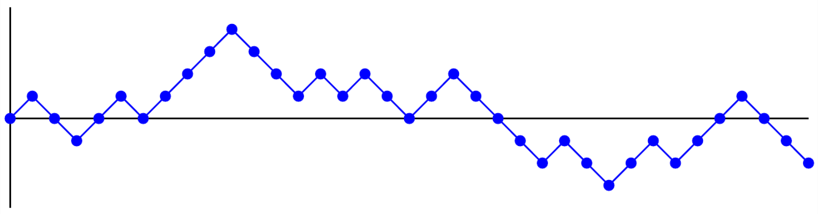
1. Простейшее случайное блуждание $\to$ вероятность достижения точки;
2. Принцип отражения $\to$ теорема о баллотировке $\to$ закон арксинуса;
3. Асимметричное случайное блуждание $\to$ задача о разорении.

Простейшее случайное блуждание

Введение

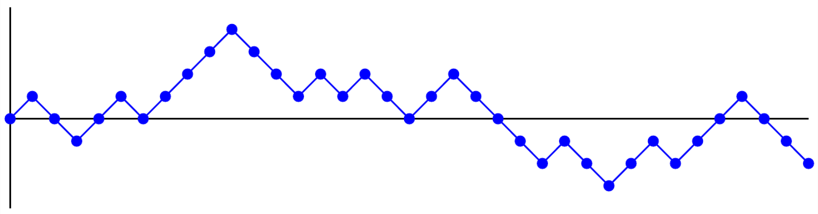


Введение



Как много возможных траекторий за время n?

Введение



Как много возможных траекторий за время n? 2^n.

Достижимые точки

Какие точки можем посещать?

Достижимые точки

Какие точки можем посещать? $(1; -1)$?

Достижимые точки

Какие точки можем посещать? $(1; -1)$? $(1; 2)$?

Достижимые точки

Какие точки можем посещать? $(1; -1)$? $(1; 2)$? $(2; 2)$?

Достижимые точки

Какие точки можем посещать? $(1; -1)$? $(1; 2)$? $(2; 2)$? $(4; 2)$?

Достижимые точки

Какие точки можем посещать? $(1;-1)$? $(1;2)$? $(2;2)$? $(4;2)$? $(4;3)$?

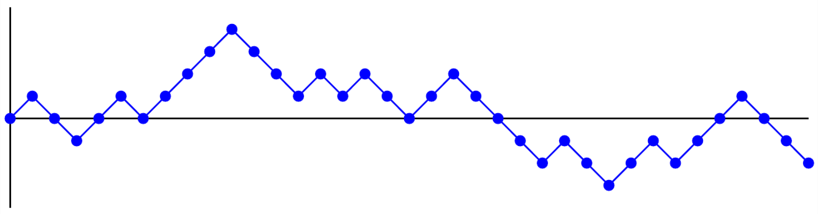
Какие точки можем посещать? $(1;-1)$? $(1;2)$? $(2;2)$? $(4;2)$?

Критерий достижимости. Точка $(t;k)$ достижима тогда и только тогда, когда существуют натуральные p и m такие, что

$$p+m=t \quad \text{и} \quad p-m=k,$$

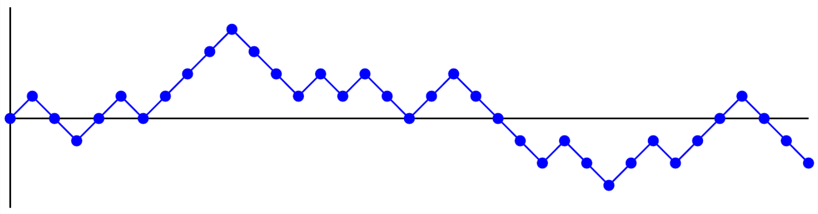
$$p=\frac{t+k}{2} \quad \text{и} \quad m=\frac{t-k}{2}.$$

Вероятность достижения



Сколько путей достигает точку $(t; k)$?

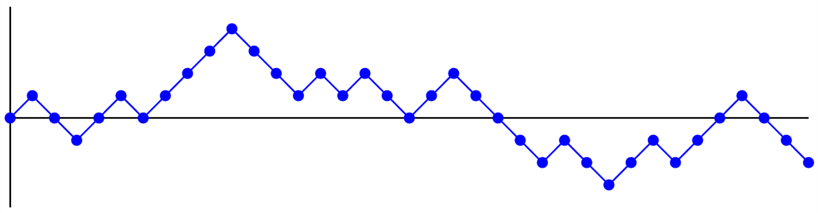
Вероятность достижения



Сколько путей достигает точку $(t; k)$?

Вспомним, что количество положительных скачков в каждом таком пути $p = \frac{t+k}{2}$, а отрицательных $m = \frac{t-k}{2}$.

Вероятность достижения



Сколько путей достигает точку $(t; k)$?

Вспомним, что количество положительных скачков в каждом таком пути $p = \frac{t+k}{2}$, а отрицательных $m = \frac{t-k}{2}$.

Ответ:

$$N_{t,k} := \binom{t}{p} = \binom{t}{m} = \binom{t}{\frac{t+k}{2}} = \binom{t}{\frac{t-k}{2}}.$$

Вероятность достижения

Количество путей, достигающих точку $(t; k)$:

$$N_{t,k} := \binom{t}{p} = \binom{t}{m}$$

$$= \binom{t}{\frac{t+k}{2}} = \binom{t}{\frac{t-k}{2}}.$$

Вероятность в момент времени t попасть в значение k:

$$p_{t,k} := \frac{N_{t,k}}{2^t} = 2^{-t}\binom{t}{\frac{t+k}{2}}.$$

Принцип отражения

Принцип отражения: теорема о баллотировке

Теорема о баллотировке. Пусть в результате голосования n человек, один из двух кандидатов выиграл с преимуществом в k голосов. Голоса считаются в случайном порядке. Тогда победитель лидировал на протяжении всего подсчета с вероятностью

$$\frac{k}{n} = \frac{p-m}{p+m},$$

где p и m — голоса за победившего и проигравшего соперников.

Принцип отражения: теорема о баллотировке

В качестве пространства элементарных исходов возьмем

$$\Omega = \{\text{пути из } (0;0) \text{ в } (n;k)\}, \quad |\Omega| = N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

Принцип отражения: теорема о баллотировке

В качестве пространства элементарных исходов возьмем

$$\Omega = \{\text{пути из } (0;0) \text{ в } (n;k)\}, \quad |\Omega| = N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

Нас интересуют пути из $(0;0)$ в $(n;k)$, не касающиеся нуля. Но так как все такие пути проходят через точку $(1;1)$, то мы можем сразу искать количество путей из $(1;1)$ в $(n;k)$, также не касающихся нуля.

Принцип отражения: теорема о баллотировке

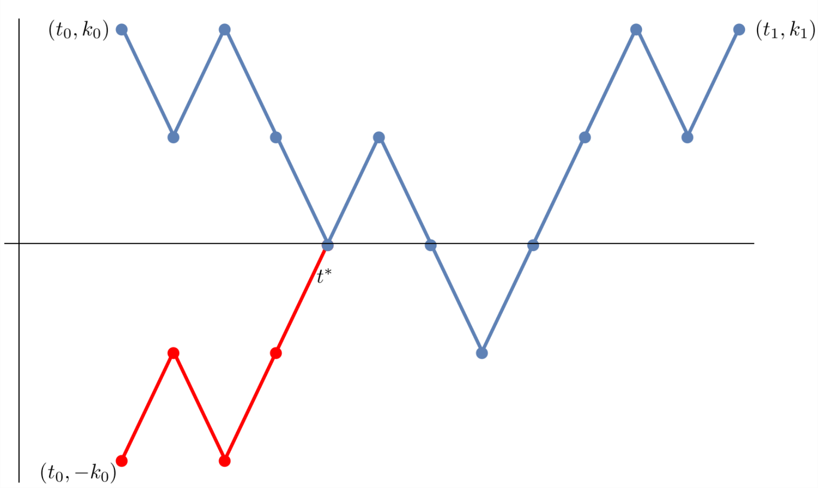
В качестве пространства элементарных исходов возьмем

$$\Omega = \{\text{пути из } (0;0) \text{ в } (n;k)\}, \quad |\Omega| = N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

Нас интересуют пути из $(0;0)$ в $(n;k)$, не касающиеся нуля. Но так как все такие пути проходят через точку $(1;1)$, то мы можем сразу искать количество путей из $(1;1)$ в $(n;k)$, также не касающихся нуля.

Для этого найдем количество путей, касающихся нуля.

Принцип отражения: теорема о баллотировке



Принцип отражения: теорема о баллотировке

Пусть $(t_1; k_1)$ достижима из $(t_0; k_0)$ и k_0, k_1 лежат по одну сторону от нуля.

Тогда существует взаимно–однозначное соответствие между

- путями из $(t_0; k_0)$ в $(t_1; k_1)$, проходящими через нулевой уровень;
- всеми путями из $(t_0; -k_0)$ в $(t_1; k_1)$

Принцип отражения: теорема о баллотировке

Поэтому количество путей из $(1;1)$ в $(n;k)$, касающихся нуля, равно количеству путей из $(1;-1)$ в $(n;k)$, т.е. $N_{n-1,k+1}$.

Принцип отражения: теорема о баллотировке

Поэтому количество путей из $(1;1)$ в $(n-1;k-1)$, касающихся нуля, равно количеству путей из $(1;-1)$ в $(n;k)$, т.е. $N_{n-1,k+1}$.

А количество путей из $(1;1)$ в $(n;k)$, не касающихся нуля, равно

$$N_{n-1,k-1} - N_{n-1,k+1} = \binom{n-1}{(n+k-2)/2} - \binom{n-1}{(n+k)/2}$$

$$= \binom{m+p-1}{p-1} - \binom{m+p-1}{p}.$$

Принцип отражения: теорема о баллотировке

$$\binom{m+p-1}{p-1} - \binom{m+p-1}{p} = \frac{(m+p-1)!}{m!(p-1)!} - \frac{(m+p-1)!}{p!(m-1)!}$$

$$= \frac{p(m+p-1)!}{m!p!} - \frac{m(m+p-1)!}{p!m!}$$

$$= (p-m)\frac{(m+p-1)!}{m!p!} = \frac{p-m}{p+m}\frac{(m+p)!}{m!p!}$$

$$= \frac{k}{n} N_{n,k}.$$

Закон арксинуса: вспомогательный результат

Лемма. Следующие значения эквивалентны:

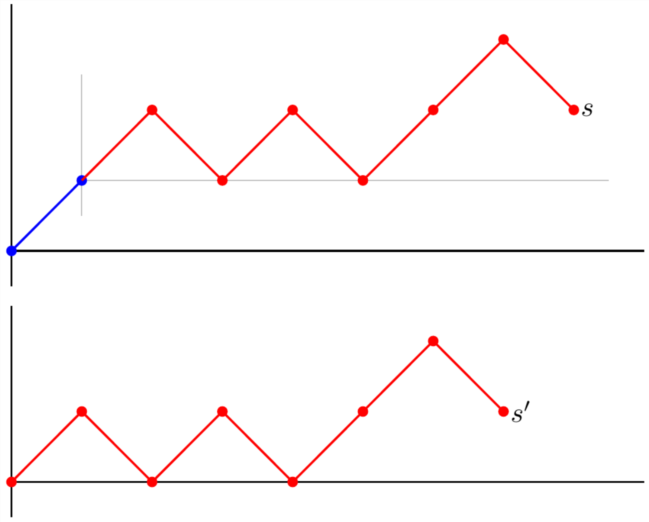
$$u_{2m} := \mathbb{P}(S_{2m} = 0) = N_{2m,m},$$

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2m} \neq 0),$$

$$\mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \ldots, S_{2m} \geqslant 0),$$

$$2\mathbb{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0).$$

Закон арксинуса: вспомогательный результат



Закон арксинуса: вспомогательный результат

Лемма. Следующие значения эквивалентны:

$$u_{2m} := \mathbb{P}(S_{2m} = 0) = N_{2m,m},$$

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2m} \neq 0),$$

$$\mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \ldots, S_{2m} \geqslant 0),$$

$$2\mathbb{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0).$$

Закон арксинуса: вспомогательный результат

Так как

$$\{S_1 \neq 0, \ldots, S_{2m} \neq 0\} = \{S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0\}$$

$$\cup\{S_1 < 0, \ldots, S_{2m} < 0\}$$

и имеем

$$|\{S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0\}| = |\{S_1 < 0, \ldots, S_{2m} < 0\}|,$$

то

$$\mathbb{P}\{S_1 \neq 0, \ldots, S_{2m} \neq 0\} = 2\mathbb{P}\{S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0\}.$$

Закон арксинуса: вспомогательный результат

Лемма. Следующие значения эквивалентны:

$$u_{2m} := \mathbb{P}(S_{2m} = 0) = N_{2m,m},$$

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2m} \neq 0),$$

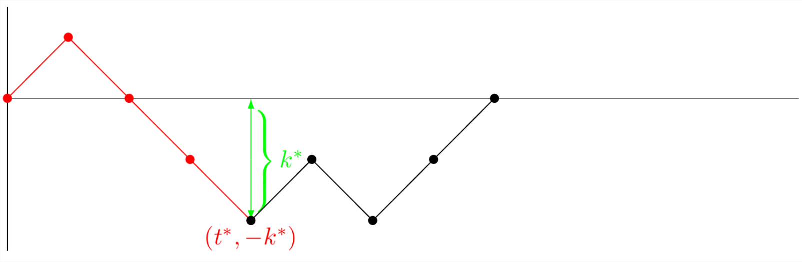
$$\mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \ldots, S_{2m} \geqslant 0),$$

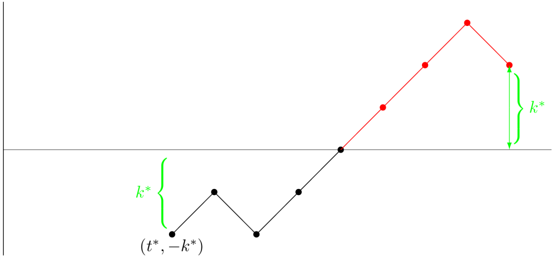
$$2\mathbb{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0).$$

Закон арксинуса: вспомогательный результат

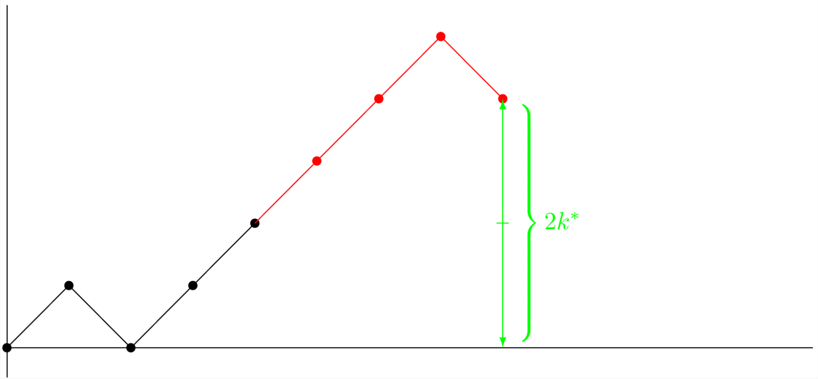
Лемма Нельсона. Среди путей длины $2m$, существует взаимно–однозначное соответствие между неотрицательными путями и путями, заканчивающими в нуле.

Закон арксинуса: вспомогательный результат

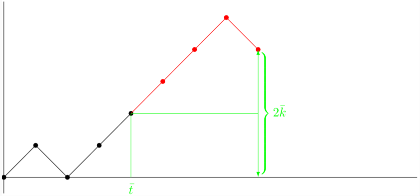


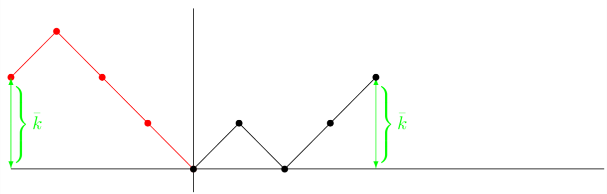


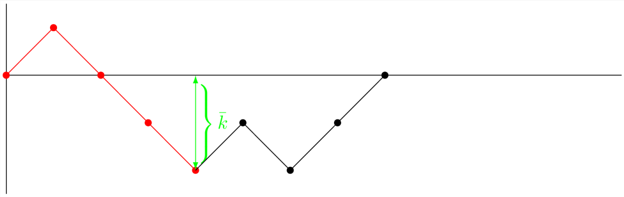
Закон арксинуса: вспомогательный результат



Закон арксинуса: вспомогательный результат







Закон арксинуса: вспомогательный результат

Лемма. Следующие значения эквивалентны:

$$u_{2m} := \mathbb{P}(S_{2m} = 0) = N_{2m,m},$$

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2m} \neq 0),$$

$$\mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \ldots, S_{2m} \geqslant 0),$$

$$2\mathbb{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0).$$

Закон арксинуса: первое возвращение в нуль

Вероятность того, что первое возвращение в нуль состоится в момент $2m$ равна

$$f_{2m} := u_{2m-2} - u_{2m}.$$

Закон арксинуса: первое возвращение в нуль

Вероятность того, что первое возвращение в нуль состоится в момент $2m$ равна

$$f_{2m} := u_{2m-2} - u_{2m}.$$

Это следует из того, что
$\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0\} \subset \{S_1 \neq 0, \dots, S_{2m-2} \neq 0\}$ и

$$f_{2m} = \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2m-2} \neq 0\}, S_{2m} = 0)$$

$$= \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2m-2} \neq 0\} \setminus \{S_1 \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0\})$$

$$= \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2m-2} \neq 0\}) - \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0\})$$

$$= u_{2m-2} - u_{2m}.$$

Закон арксинуса: первое возвращение в нуль

Вероятность того, что первое возвращение в нуль состоится в момент $2m$ равна

$$f_{2m} := u_{2m-2} - u_{2m}.$$

Кроме того,

$$u_{2m} := \sum_{r=1}^{m} f_{2r} u_{2m-2r}.$$

Закон арксинуса: первое возвращение в нуль

Вероятность того, что первое возвращение в нуль состоится в момент $2m$ равна

$$f_{2m} := u_{2m-2} - u_{2m}.$$

Кроме того,

$$2^{2m} u_{2m} := \sum_{r=1}^{m} \left(2^{2r} f_{2r}\right) \left(2^{2m-2r} u_{2m-2r}\right).$$

Закон арксинуса: первое возвращение в нуль

Вероятность того, что первое возвращение в нуль состоится в момент $2m$ равна

$$f_{2m} := u_{2m-2} - u_{2m}.$$

Кроме того,

$$u_{2m} := \sum_{r=1}^{m} f_{2r} u_{2m-2r}.$$

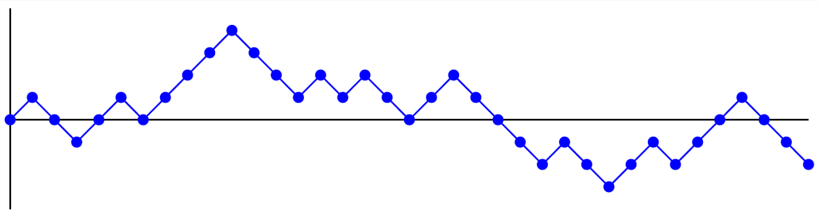
А также

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} (u_{2m-2} - u_{2m}) = u_0 = 1.$$

Закон арксинуса

Закон арксинуса Пусть $p_{2k,2n}$ — вероятность того, что в интервале времени от 0 до $2n$ частица проводит $2k$ единиц времени на положительной стороне и $2n-2k$ на отрицательной стороне. Тогда

$$p_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k}.$$



Закон арксинуса

Очевидно имеем, что

$$p_{2n,2n} = \mathbb{P}(S_1 \geqslant 0, \dots, S_{2n} \geqslant 0) = u_{2n},$$

$$p_{0,2n} = \mathbb{P}(S_1 \leqslant 0, \dots, S_{2n} \leqslant 0) = u_{2n}.$$

Поэтому достаточно рассматривать случай $1 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Закон арксинуса

Есть два варианта провести $2r$ времени на положительной полуоси:

1. до момента $2r$ траектория была положительной, а после она была положительной $2k - 2r$ времени;
2. до момента $2r$ траектория была отрицательной, а после она была положительной $2k$ времени.

Закон арксинуса

Есть два варианта провести $2r$ времени на положительной полуоси:

1. $$\frac{1}{2}\left(2^{2r} f_{2r}\right)\left(2^{2n-2r} p_{2k-2r,2n-2r}\right) = 2^{2n-1} f_{2r} p_{2k-2r,2n-2r};$$

2. $$\frac{1}{2}\left(2^{2r} f_{2r}\right)\left(2^{2n-2r} p_{2k,2n-2r}\right) = 2^{2n-1} f_{2r} p_{2k,2n-2r}.$$

Закон арксинуса

Есть два варианта провести $2r$ времени на положительной полуоси:

1. $$\frac{1}{2}\left(2^{2r}f_{2r}\right)\left(2^{2n-2r}p_{2k-2r,2n-2r}\right) = 2^{2n-1}f_{2r}p_{2k-2r,2n-2r};$$

2. $$\frac{1}{2}\left(2^{2r}f_{2r}\right)\left(2^{2n-2r}p_{2k,2n-2r}\right) = 2^{2n-1}f_{2r}p_{2k,2n-2r}.$$

$$2^n p_{2k,2n} = 2^{2n-1}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}p_{2k-2r,2n-2r} + 2^{2n-1}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}p_{2k,2n-2r}.$$

Закон арксинуса

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}\, p_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}\, p_{2k,2n-2r}.$$

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r} p_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} p_{2k,2n-2r}.$$

Пусть по предположению индукции верно, что $p_{2k,2\nu} = u_{2k} u_{2\nu-2k}$ для $\nu = 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2} u_{2n-2k} \sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r} + \frac{1}{2} u_{2k} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2n-2k-2r}.$$

Откуда

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2} u_{2n-2k} u_{2k} + \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k} = u_{2k} u_{2n-2k}.$$

Почему это называется законом арксинуса?

$$u_{2m} = \frac{N_{2m,m}}{2^{2m}} = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

Почему это называется законом арксинуса?

$$u_{2m} = \frac{N_{2m,m}}{2^{2m}} = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

По формуле Стирлинга $n! \approx e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$, имеем

$$\binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} \approx \frac{1}{2^{2m}}\frac{e^{-2m}(2m)^{2m}\sqrt{4\pi m}}{\left(e^{-m}m^m\sqrt{2\pi m}\right)\left(e^{-m}m^m\sqrt{2\pi m}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

Почему это называется законом арксинуса?

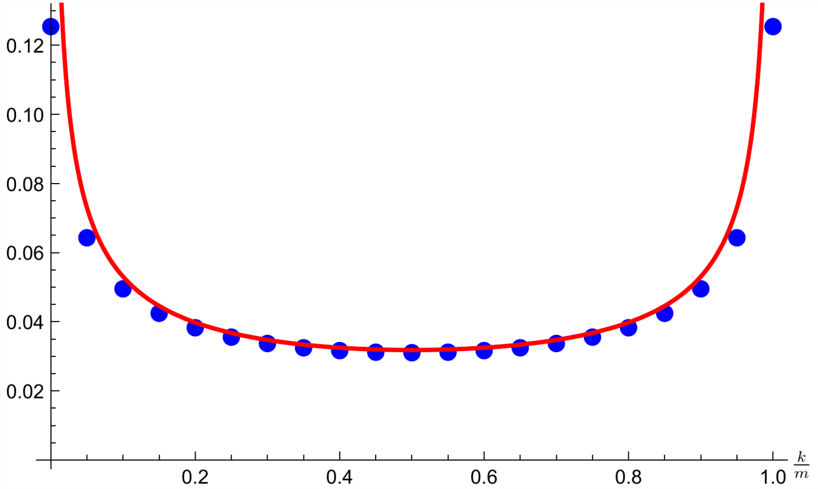
Но тогда

$$u_{2k}u_{2m-2k} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{k(m-k)}} = \frac{1}{m}\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{k}{m}\frac{m-k}{m}}}.$$

Для больших m и k таких, что $\frac{k}{m} \approx t$ имеем

$$u_{2k}u_{2m-2k} \approx \frac{1}{m}\frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t))}}.$$

Почему это называется законом арксинуса?



Задача о разорении

Асимметричное случайное блуждание

Пусть теперь вероятности траекторий не равны. Вместо этого известно, что вероятность сделать прыжок вверх равна p, а прыжок вниз — $(1 - p)$.

Асимметричное случайное блуждание

Пусть теперь вероятности траекторий не равны. Вместо этого известно, что вероятность сделать прыжок вверх равна p, а прыжок вниз — $1 - p$.

Тогда, если вероятность каждой траектории длины n с k положительными скачками равна $p^k(1 - p)^{n-k}$.

Задача о разорении

Мы многократно играем против казино.

Каждый раз мы выигрываем с вероятностью p и проигрываем с вероятностью $1 - p$.

Мы начинаем с m монетами, а казино - с бесконечным количеством денег.

Какова вероятность для нас разориться?

Задача о разорении

Мы начинаем на уровне m ($S_0 = m$). Чтобы разориться нам нужно спуститься на m уровней, до уровня нуля.

Задача о разорении

Мы начинаем на уровне m ($S_0 = m$). Чтобы разориться нам нужно спуститься на m уровней, до уровня нуля.

Пусть z_1 — это вероятность за какое-то (случайное) количество шагов спуститься на один уровень (с m до $m-1$, с 1 до 0, и т.п.).

Задача о разорении

Мы начинаем на уровне m ($S_0 = m$). Чтобы разориться нам нужно спуститься на m уровней, до уровня нуля.

Пусть z_1 — это вероятность за какое-то (случайное) количество шагов спуститься на один уровень (с m до $m-1$, с 1 до 0, и т.п.).

Тогда вероятность z_m спуститься на m уровней можно выразить как

$$z_m = z_1^m.$$

Задача о разорении

Мы начинаем на уровне m ($S_0 = m$). Чтобы разориться нам нужно спуститься на m уровней, до уровня нуля.

Пусть z_1 — это вероятность за какое-то (случайное) количество шагов спуститься на один уровень (с m до $m-1$, с 1 до 0, и т.п.).

Тогда вероятность z_m спуститься на m уровней можно выразить как

$$z_m = z_1^m.$$

Осталось найти z_1!

Задача о разорении

Выразим z_1 через вероятности спуститься на уровень ниже после одного шага блуждания:

$$z_1 = (1 - p) + pz_1^2.$$

Выразим z_1 через вероятности спуститься на уровень ниже после одного шага блуждания:

$$z_1 = (1 - p) + pz_1^2.$$

Решения этого уравнения: $z_1 = 1$ и $z_1 = \frac{1-p}{p}$.

Задача о разорении

Выразим z_1 через вероятности спуститься на уровень ниже после одного шага блуждания:

$$z_1 = (1 - p) + p z_1^2.$$

Решения этого уравнения: $z_1 = 1$ и $z_1 = \frac{1-p}{p}$.

Откуда

$$z_1 = \begin{cases} 1 & p \leqslant 1/2, \\ \frac{1-p}{p} & p > 1/2. \end{cases}$$

Задача о разорении

Тогда вероятность разориться со стартовым капиталом m:

$$\begin{cases} 1 & p \leqslant 1/2, \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^m & p > 1/2. \end{cases}$$

Задача о разорении 2

Теперь играем не против самого банка, а против сотрудника Андрея. Мы начинаем со стартовым капиталом в a монет, а Андрей с b монетами.

Какова вероятность A, что мы победим?

Задача о разорении 2

Теперь играем не против самого банка, а против сотрудника Андрея. Мы начинаем со стартовым капиталом в a монет, а Андрей с b монетами.

Какова вероятность A, что мы победим?

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^a = (1-A) + A\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}.$$

Задача о разорении 2

Теперь играем не против самого банка, а против сотрудника Андрея. Мы начинаем со стартовым капиталом в a монет, а Андрей с b монетами.

Какова вероятность A, что мы победим?

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^a = (1-A) + A\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}.$$

Откуда

$$A = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}.$$

Задача о разорении 2

Теперь играем не против самого банка, а против сотрудника Андрея. Мы начинаем со стартовым капиталом в a монет, а Андрей с b монетами.

Какова вероятность A, что мы победим?

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)^a = (1-A) + A\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}.$$

Откуда

$$A = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}.$$

Беря предел $p \to 1/2$ получаем $\frac{a}{a+b}$.

Задача о разорении 2

Пусть у двоих игроков в сумме N монет.

Обозначим за $A_{x,N}$ — вероятность выиграть первому игроку, если он начинает с x монетами. Тогда

$$A_{x,N} = \frac{1}{2}A_{x-1,N} + \frac{1}{2}A_{x+1,N}.$$

Задача о разорении 2

Пусть у двоих игроков в сумме N монет.

Обозначим за $A_{x,N}$ — вероятность выиграть первому игроку, если он начинает с x монетами. Тогда

$$A_{x,N} = \frac{1}{2}A_{x-1,N} + \frac{1}{2}A_{x+1,N}.$$

Откуда

$$A_{x,N} - A_{x-1,N} = A_{x+1,N} - A_{x,N},$$

Задача о разорении 2

Пусть у двоих игроков в сумме N монет.

Обозначим за $A_{x,N}$ — вероятность выиграть первому игроку, если он начинает с x монетами. Тогда

$$A_{x,N} = \frac{1}{2}A_{x-1,N} + \frac{1}{2}A_{x+1,N}.$$

Откуда

$$A_{x,N} - A_{x-1,N} = A_{x+1,N} - A_{x,N},$$

Так как

$$A_{0,N} = 0, \qquad A_{N,N} = 1,$$

то для любого $x = 1, \ldots, N$

$$A_{x,N} - A_{x-1,N} = \frac{1}{N},$$

$$A_{x,N} = \frac{x}{N}.$$

Задача о разорении 2

Положив $N = a + b$, а $x = a$, получим

$$A = A_{a,a+b} = \frac{a}{a+b}.$$