Парадоксы в теории вероятностей.

2 занятие. 03.03.20.

Мы провели разбор некоторых известных задач, решения которых могут оказаться неожиданными для людей, которые знакомятся с такими задачами впервые. Зачастую ответ в подобных задачах будет противоречить интуиции и даже здравому смыслу. Такие задачи называют *парадоксами*.

1. Парадокс Монти Холла

Формулировка задачи. Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас – не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2? Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Часто при решении этой задачи поступают так: ведущий всегда в итоге убирает одну проигрышную дверь, и тогда вероятности появления автомобиля за двумя не открытыми становятся равны $1/2$, вне зависимости от первоначального выбора. Но это неверно, так как хотя возможностей выбора и остается две, они не будут равновероятными. Это так, поскольку хотя изначально все двери и имели равный шанс на выигрыш, то после открытия одной проигрышной двери эти шансы меняются. Все дело в ведущем, у него есть 2 возможности: если игрок выбирает дверь с козой, то ведущему ничего не остается, кроме как отрыть другую дверь с козой; если игрок выбирает дверь с автомобилем, то ведущий открывает одну из двух дверей с козой. То есть, если игрок выбрал изначально дверь с козой, то он получит автомобиль, если после открытия двери ведущим, сменит свой выбор на другую оставшуюся закрытой дверь. Если была изначально выбрана дверь с автомобилем, то менять дверь не следует. В итоге, если игрок всегда будет менять свой выбор двери после открытия ведущим другой двери с козой, то его вероятность выиграть автомобиль будет равна шансу выбрать дверь с козой изначально. А этот шанс равен $2/3$.

Где почитать подробнее: Wikipedia *Англоязычная версия статьи Википедии про этот парадокс, она намного более полна, чем ее русскоязычный вариант.*

2. Парадокс двух конвертов

Формулировка задачи. Есть два неразличимых конверта с деньгами. В одном находится сумма в два раза большая, чем во втором. Конверты дают двум игрокам. Каждый из них может открыть свой конверт и пересчитать в нем деньги. После этого игроки должны решить: стоит ли обменять свой конверт на чужой? Оба игрока рассуждают следующим образом: *Я вижу в своем конверте сумму X. В чужом конверте равновероятно может находиться $2X$ или $X/2$. Поэтому если я поменяю конверт, то в среднем у меня будет $\frac{5}{4}X$, то есть больше, чем сейчас. Значит, обмен выгоден.* Но обмен не может быть выгоден обоим игрокам. Где в их рассуждении кроет ошибка?

Первый игрок считает, что сумма, которую он видит, не имеет значения ввиду возможности того, что впоследствии в его конверте окажется большая сумма. Это значит, что он полагает, что вероятность того, что сумма в его конверте больше, составляет $0,5$ независимо от увиденной суммы. Это верно только если каждое значение от нуля до бесконечности равновероятно. Но если все бесконечное число возможностей равновероятно, шанс каждого значения имеет нулевую вероятность. А это противоречит тому предположению, что было в условии задачи. Потому следует вывод, что под фразой «каждому достается случайно один конверт» понимается то, что невозможно сделать так, чтобы оба игрока были в равных условиях. Как бы не пытались формализовать момент выбора конверта, всегда один из игроков будет находиться в худшей позиции. Потому изначальное предположение о справедливости данной игры невозможно.

Где почитать подробнее: Wikipedia(Eng)

3. Парадокс 100 узников

Формулировка задачи. Начальник тюрьмы предлагает ста узникам, приговорённым к смертной казни, последний шанс. Узники пронумерованы от 1 до 100, а комната содержит шкаф со 100 ящиками. Начальник случайным образом помещает в каждый ящик по одному из номеров от 1 до 100, во все ящики — разные номера. Узники по очереди входят в комнату. Каждый узник может открыть и проверить 50 ящиков в любом порядке. После каждого узника ящики снова закрываются, а все номера остаются в ящиках. Если каждый из узников найдёт в одном из ящиков свой номер, то все узники будут помилованы; если хотя бы один узник не найдёт свой номер, все узники будут казнены. Прежде чем первый узник войдёт в комнату, узники могут обсудить стратегию, но не могут общаться после этого момента. Какова лучшая для узников стратегия? Вероятность того, что узник, открыв наугад 50 ящиков из 100, найдет свой номер равна 50%. Если 100 узников проделают эту процедуру, то вероятность их успеха (все найдут свой номер) равна произведению вероятностей успеха для каждого отдельного из них, т.е. $(\frac{1}{2})^{100}$. Это число весьма мало, что практически не оставляет узникам шанса на успех. Однако, существует такая стратегия, которая позволит узникам выжить с вероятностью большей, чем 30%.

Рассмотрим такую стратегию, которой будет придерживаться каждый из 100 узников:

1. Открыть ящик со своим номером.

2. Если в этом ящике найден свой номер, то успех, т.е. узник справился, дальнейшее открытие ящиков не понадобится.

3. Если в этом ящике нет нужного номера, то открыть ящик с тем номером, который был найден в прошлом ящике.

4. Повторять п. 2 и п. 3 пока не будет найден нужный ящик или не закончатся попытки.

Мы доказали, что такая стратегия действительно даст шанс на выживание примерно в 31%.

Где почитать подробнее: Wikipedia(Eng)