21/04/2020 - Вероятностные доказательства невероятностных теорем

На семинаре мы обсудили связь теории вероятностей с другими математическими дисциплинами, а именно, применение методов теории вероятностей при доказательстве результатов, казалось бы, совсем не связанных с ней.

Первая часть семинара была посвящена необходимой для последующего изложения теории.

Пусть Ω – множество всех элементарных исходов.

Определение 1. *Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной.*

Замечание 1. *Вообще говоря, приведенное определение случайной величины не совсем корректно: нужно наложить дополнительное условие измеримости. Тем не менее, далее мы будем считать случайными величинами произвольные функции из Ω в $\mathbb{R}$.*

На семинаре мы рассматривали лишь такие случайные величины, которые принимают конечное число значений:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\xi = a_k) = 1$$

для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Для таких случайных величин мы определили *математическое ожидание*, по формуле

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{P}(\xi = a_k).$$

Затем мы обсудили некоторые свойства математических ожиданий. Пусть ξ и η — произвольные случайные величины (принимающие конечное число значений). Тогда

1. $\mathbb{E}(a\xi + n\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$;

2. $\mathbb{E}c = c$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$;

3. $|\mathbb{E}\xi| \le \mathbb{E}|\xi|$;

4. Если $\xi \le \eta$, то $\mathbb{E}\xi \le \mathbb{E}\eta$;

5. Если $\mathbb{P}(\xi \ge 0) = 1$, то
$$\mathbb{P}(\xi \ge x) \le \frac{\mathbb{E}\xi}{x},$$
при всех $x > 0$.

Свойство 5 называется *неравенством Маркова.*

Затем, мы перешли к основной части семинара — доказательству невероятностных результатов с помощью аппарата теории вероятностей. Первый из них – *лемма о максимальном разрезе в графе.*

Задача (О максимальном разрезе)**.** *Рассмотрим произвольный неориентированный граф* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$*. Окрасим каждую из вершин в белый или черный цвет произвольным образом. Обозначим через* N *– количество рёбер, соединяющих вершины разных цветов. Задача состоит в поиске раскраски графа, при которой* N *будет максимальным (обозначим такое* N *через* N_{max}*).*

Простыми вероятностными методами, мы получили нижнюю оценку на N_{max}:

Лемма (О максимальном разрезе)**.** $N_{\max} \geq |\mathcal{E}|/2$.

Наконец, мы доказали классическую теорему Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций полиномами.

Теорема (Вейерштрасса)**.** *Пусть* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует полином* g_ε *такой, что*

$$\max_{p\in[0,1]} |f(p) - g_\varepsilon(p)| \leq \varepsilon.$$

Доказательство теоремы также было проведено с использованием аппарата теории вероятностей.

Где почитать:

1. Список вероятностных доказательств невероятностных теорем.
2. Метод условных вероятностей.
3. Теорема Вейерштрасса (Theorem 3).