07.04.20. Геометрическая вероятность

На семинаре было введено понятие геометрической вероятности, решена пара задач на эту тему и было показано, как сводить вычисление геометрической вероятности к решению дифференциального уравнения.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^k$ – область такая, что $0 < \mu(\Omega) < \infty$, где μ - мера Лебега. Равномерно бросаем точку в Ω. Тогда вероятность попасть в $A \subset \Omega$ вычисляется следующим образом: $\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Пример 1
Точка $\mathbf{X}$ равномерно бросается в прямоугольник со сторонами 1 и 2. Найти вероятность того, что расстояние от $\mathbf{X}$ до ближайшей стороны не превосходит $t \in \mathbf{R}$.
Ответ:

$$\mathbf{P}(\text{«наше событие»}) = \begin{cases} 1 - (1-2t)(1-t), & t \in (0, 1/2) \\ 1, & t \geqslant 1/2 \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Пример 2(Задача о встрече)
Два человека X и Y условились встретиться в определённом месте между 12-ю и 13-ю часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение $t \in (0, 1)$ часов, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого?
Ответ: $\mathbf{P}(\text{«наше событие»}) = 1 - (1-t)^2$.

Формула Крофтона
Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область. Пусть $V = \mu(D)$. Бросаем N точек равномерно в D. Эти точки образуют в D фигуру F. Мы хотим найти вероятность, что F обладает неким свойством, которое инвариантно относительно трансляций и поворотов. Обозначим эту вероятность через $\mathbf{P}$. Предпологая, что $\mathbf{P}$ дифференцируемо по V, можно получить следующиее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dV} = N\frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}}{V},$$

– формула Крофтона, где $\mathbf{P}_1$ – вероятность того, что F обладает требуемым свойством, при условии, что ровно одна точка принадлежит границе области.

Литература

[1] Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. – Изд-во Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1972.