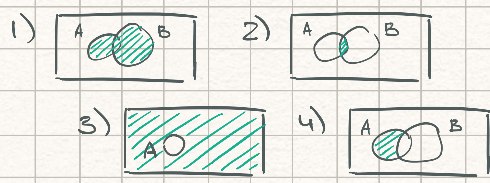
1. Случайные события и их вероятности

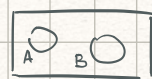
1.1. Элементарная теория вероятностей

Опр Мн-во Ω, состоящее из всех результатов экспер. наз. **простр-вом элемент. исходов**.
$\omega \in \Omega$ – элем. исход
$A \subset \Omega$ – событие

Опр Операции над событиями:
$A, B \in \Omega$
1) $A \cup B$ — "произошло A или B"
2) $A \cap B$ — "произошло A и B"
3) $\overline{A} = \Omega \setminus A$ — "A не произошло"
4) $A \setminus B$ — "произошло A, но не произошло B"



Опр События A, B наз. **несовместными**, если $A \cap B = \varnothing$



Опр $A_1, \dots, A_n$ — **попарно несовместны**, если $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$

Опр $A = \varnothing$ — **невозможное событие**
$A = \Omega$ — **достоверное событие**

1.2. Модель дискретной вероятности

Аксиомы классической вероятности:
1) Ω – конечно ($|\Omega| < \infty$)
2) Все элем. исходы равновозможны
3) Событие A – любое подмн-во Ω

Опр **Вероятность** $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{кол-во благопр. исходов}}{\text{кол-во всех исходов}}$

Ex 1) $\Omega = \{О, Р\}$
2) $\Omega_1 = \{ОР, РО, ОО, РР\}$
$\Omega_2 = \{\{Р,О\}, \{О,О\}, \{Р,Р\}\}$ ← неравновозм.

Аксиомы дискретной вероятности
1) Ω не более чем счётно
2) $\forall \omega_i \in \Omega \quad \exists p_i \geq 0$ – вероятность ω_i. $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1$
3) $A \subseteq \Omega$ – события $\quad \mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$

Ex 2 игр. бросают монету. Выигр. тот, у кого вып. О.
$\Omega = \{\underset{\frac{1}{2}}{О}, \underset{\frac{1}{4}}{РО}, \underset{\frac{1}{8}}{РРО}, \underset{1/16}{РРРО}, \dots\}$

$A = \{\text{выиграет I}\} = \{О, РРО, РРРРО, \dots\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$
$B = \{\text{выиграет II}\}$ $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$

1.3. Геометрическая вероятность

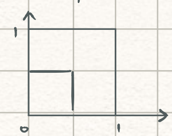
Аксиомы геометрической вероятности:

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – измеримые $\lambda(\Omega) \in (0, \infty)$
2) $A \subseteq \Omega$ – измеримые подпр-ва Ω
3) $\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$

Ex1 Выбираем точку наугад из $[0, 1)$

$[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)$ – равновер-но $\qquad \mathbb{P}(\frac{1}{2}) = 0$

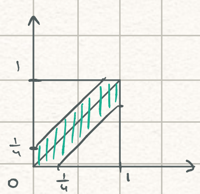
Ex2 Выберем т. из $[0,1] \times [0,1]$



Ex3 Задача о встрече

Договорились о встрече I и II м/у 14:00 и 15:00 след. образом: ждёт 15 мин. и уходит

$A = \{$I и II встретились$\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = ? \qquad \Omega = \{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$



$A = \{(x,y) \mid |x-y| \leq \frac{1}{4}\} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1 - 9/16}{1} = \frac{7}{16}$

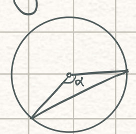
Замечание:

Всегда искать Ω

При реш-ии задачи нужно искать эксперимент "выбираем точку из Ω"

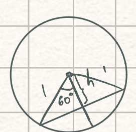
Ex Парадокс Бертрана

Из единичн. окр-ти случайно выбирается хорда

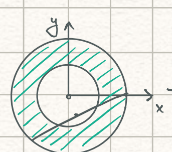


$\alpha \in [0, \pi]$

$A = \{$длина дуги $\leq \frac{2\pi}{3}\} = \{\alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]\} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{2\pi/3}{\pi} = \frac{2}{3}$



$h \in [0, 1) \qquad A = \{h \in [\frac{1}{2}, 1)\} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$



$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\}$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\pi \cdot \frac{1}{4}}{\pi} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ ой!

Какая из моделей лучше? (неважно)

Надо говорить, согласно какому распределению

1.4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Опр Мн-во $F \subseteq 2^{\Omega}$ наз. σ-алгеброй, если:

F_1: $\Omega \in F$

F_2: $\forall A \in F \quad \bar{A} \in F$

F_3: $\forall A_1, A_2, \ldots \in F \quad \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

Св-ва:

1. $\varnothing \in F$

Д-во: $\varnothing \in \Omega \setminus \Omega \in F$

2. $\forall A_1, \ldots, A_N \in F \quad \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i \in F$

Д-во: $A_1, A_2, \ldots, A_N, \varnothing, \varnothing, \ldots \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i \cup \varnothing \cup \ldots \in F$

3. $\forall A_1, A_2, \ldots \in F \quad \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

Д-во: $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \quad \forall i=1,2 \quad \bar{A}_i \in F \ (F_2) \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in F \Rightarrow \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} \in F$

Формула двойственности:

$$\boxed{\forall B_1, B_2, \ldots \quad \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i}$$

Д-во: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B,\ B \subseteq A \qquad A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \in B$

Пусть $x \in \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i} \Leftrightarrow \forall i=1,.. \quad x \notin B_i \Leftrightarrow \forall i=1,.. \ x \in \bar{B}_i \Leftrightarrow x \in \bigcap \bar{B}_i$

Ex

1. $\Omega = \{1\ 2\}$ $\quad F_1 = 2^{\Omega} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$F_2 = \{\varnothing, \Omega\}$

2. $\Omega = \{1,2,3,4\}$ $\quad F_1 = 2^{\Omega}$

$F_2 = \{\varnothing, \Omega\}$

$F_3 = \{\varnothing, \Omega, \{2\}, \{1,3,4\}\}$

3. $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad F_1 = 2^{\Omega}$

$F_2 = \{\varnothing, \Omega\}$

$F_3 = B(\mathbb{R})$

Опр $B(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ — Борелевская σ-алгебра — наим. σ-алгебра, содерж. все откр. мн-ва.

Опр Ф-я $\mathbb{P}: F \to \mathbb{R}$, если

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $\forall A \in F \quad \mathbb{P}(A) \geq 0$

3) $\forall A_1, A_2, \ldots \in F \quad \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing \ : \quad \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

счёт. аддит.

Св-ва: 1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

Д-во: $A_1 = \varnothing,\ A_2 = \varnothing, \ldots \qquad \sum \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\cup A_i) = \mathbb{P}(\varnothing)$

$\sum \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) \quad \Rightarrow \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

2. $\forall A_1, \dots, A_n \in F: \ A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j \qquad \mathbb{P}(\overset{n}{\bigcup} A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)$

Д-во: $A_1, \dots, A_n, \varnothing, \varnothing, \dots$

$\mathbb{P}(\overset{n}{\bigcup} A_i \cup \varnothing \cup \varnothing \dots) = \sum^{n} \mathbb{P}(A_i) + 0 + 0 + \dots = \sum \mathbb{P}(A_i)$

3. $\forall A \in F \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$

Д-во: $\Omega = A \cup \overline{A} \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$

$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$

4. $\forall A, B \in F \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Д-во: $A \cup B = A \cup (B \setminus A) \qquad (B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$

$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) \end{cases}$ $\longrightarrow$ отсюда найдём нужное $\mathbb{P}(A \cup B)$

5. $\forall A \subseteq B \quad A, B \in F \quad \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Д-во: $B = A \cup B \setminus A \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$

6. $\forall A_1, A_2 \in F \quad \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

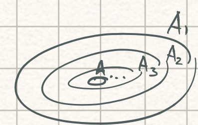
Д-во: $B_1 = A_1 \quad B_2 = A_2 \setminus A_1 \quad B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \ \dots \qquad B_i \cap B_j = \varnothing \ \forall i \neq j$

$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum \mathbb{P}(A_i)$

7. Св-во непрер-ти вероятностной меры:

$\forall A_1, A_2, \dots \in F, \quad A_1 \ \ A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$

Д-во: $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad B_k = A_k \setminus A_{k+1} \quad A \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = A_1 \quad B_i \cap B_j = \varnothing \ \forall i, j$



$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) < \infty$

$A_n = A \cup (\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k) \qquad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) + \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(A)$

8. $\forall A_1, \dots, A_n \in F \quad \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \dots A_n)$

Д-во: Индукция по n:

$\underline{n=2}$ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + $

$\underline{n-1 \mapsto n}$: $\mathbb{P}(\overset{n}{\bigcup} A_i) = \mathbb{P}((\overset{n-1}{\bigcup} A_i) \cup A_n) = \mathbb{P}(\overset{n-1}{\bigcup} A_i) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(\underbrace{(\overset{n-1}{\bigcup} A_i) \cap A_n}_{\overset{n-1}{\bigcup}(A_i \cap A_n)}) =$

$= \sum^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - \sum^{n-1} \mathbb{P}(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-2} \mathbb{P}(A_1 \dots A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n) -$

$- [\sum^{n-1} \mathbb{P}(A_i A_n) + \dots + (-1)^{n-2} \mathbb{P}(A_1 \dots A_n)] = \sum^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum \mathbb{P}(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} \dots$

Опр Тройка $\langle \Omega, F, \mathbb{P} \rangle$ наз. **вероятностным пр-вом**

1.5. Условная вероятность, независимость

Ex Бросаем 2 кубика. $A = \{\Sigma = 8\}$ $B = \{\text{I чёт}\}$

I\II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36}$ $\mathbb{P}(B) = \frac{18}{36}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36}$

$\mathbb{P}(A, \text{если } B \text{ произошло}) = \frac{3}{18} = \frac{3/36}{18/36} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Опр Условной вероятностью соб. A при условии, что B произошло, наз. число

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \mathbb{P}(B) > 0$$

Св-ва:

1. $\forall A, B$ $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$

2. $\mathbb{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_1|A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n | A_1 \ldots A_{n-1})$, $\mathbb{P}(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$

Опр Соб. A и B наз независимыми ($A \perp\!\!\!\perp B$), если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

3. Пусть $A \perp\!\!\!\perp B$ $\mathbb{P}(B) > 0$ $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$

Ex Достаём 1 карту из колоды 52 карты

$A = \{\spadesuit\}$ $B = \{9\}$ $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{13}$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}$

Св-ва: Пусть $A \perp\!\!\!\perp B$

1. $\mathbb{P}(B) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
2. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(B) = 0$

Д-во: $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0$

3. $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$:

Д-во: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

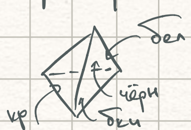
$\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\overline{B})$

Опр Соб. $A_1, \ldots, A_n$ попарно независимы, если $\forall i, j$ $A_i \perp\!\!\!\perp A_j$

Опр Соб. $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, если $\forall k \geq 1$, $k \leq n$

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ $\mathbb{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$

Ex Пример Бернштейна



$A = \{\text{кр}\}$ $B = \{\text{бел}\}$ $C = \{\text{ч}\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$

$\mathbb{P}(AB) = \frac{1}{4}$ $\mathbb{P}(BC) = \mathbb{P}(AC)$ попарно независ.

$\mathbb{P}(ABC) = \frac{1}{4}$ нет незав. в совокупн-ти

1.6. Схема Бернулли

Ex 1) Монету подбрас. 10 раз Успех = Орёл Неудача = Решка

2) Проверка iPhone 1000 раз Успех = Нераб. Неудача = Раб.

3) Страхование 15000 чел. Успех = Смерть Неудача = Выжил

Опр Схема Бернулли — послед-ть независ. в совокупн-ти испытаний, в ктр возможны только 2 исхода: "успех" и "неудача", при этом вероятн-ть "успеха" равна $p \in [0,1]$, вер-ть "неудачи": $q = 1 - p$.

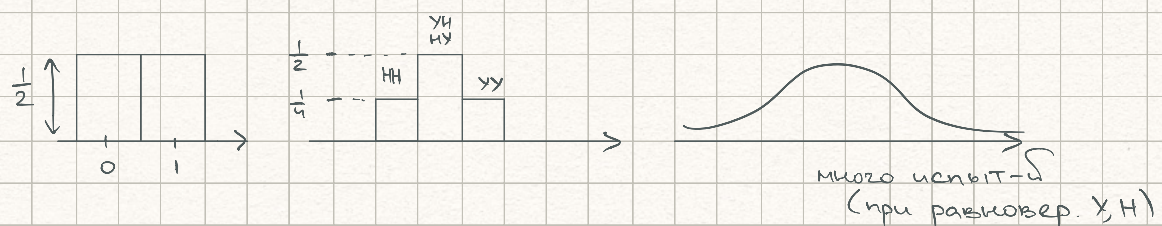
Теорема (Формула Бернулли):
Пусть S_n — число успехов в $n > 1$ испытаний схемы Бернулли. Тогда

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n}$$

Д-во: Пусть $k = 0$ $\{S_n = 0\} = \{НН\dots Н\}$ $\mathbb{P}(S_n = 0) = q^n$

$k = 1$ $\{S_n = 1\} = \{\underbrace{УН\dots Н}_{pq^{n-1}}, \dots, \underbrace{Н\dots НУ}_{pq^{n-1}}\}$ $\mathbb{P}(S_n = 1) = C_n^1 p q^{n-1}$

$$\{S_n = k\} = \{\overbrace{\underbrace{У\dots У}_{k}\underbrace{Н\dots Н}_{n-k}}^{p^k q^{n-k}}, \dots\} \quad \mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$



Теорема Пуассона:
Пусть в схеме Бернулли $p = p(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $p(n)\cdot n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in (0, \infty)$. Тогда

$$\mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \dots$$

Д-во: Обозн. $\lambda_n = p(n) n$. $\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)\cdot \frac{1}{k!} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\dots\cdot n}\cdot\frac{1}{k!}(p\cdot n)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \underbrace{1\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1}\cdot\frac{1}{k!}\underbrace{\lambda_n^k}_{\to \lambda^k}\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}\ *}\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k}_{\to 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$*$:

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{\lambda_n}{n} + o\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)\right)} = e^{-\lambda_n + o(\lambda_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}$$

Пуассон прибл. к биномиальному при малых вероятностях прям здорово!
Но надо бы погрешность оценить

Теорема об оценке погрешности в т. Пуассона

$$\sup_{A \subseteq \mathbb{Z}^+} \left|\mathbb{P}(S_n \in A) - \Pi_{np}(A)\right| \leq \min\{p, np^2\}, \qquad \Pi_\lambda(A) = \sum_{k\in A}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Д-во: когда-нибудь потом, а пока нос не дорос.

Теорема Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

$$\mathbb{P}(S_n=k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x\in\mathbb{R}$$
$n\to\infty$

$p=\frac{1}{2}$ $n\to\infty$ всё $\to 0$. кто главнее?

Можно пользоваться, когда n большое!

При малых p грустно выглядит — погрешность большая.

Теорема о первом успешном испытании

Пусть τ — номер 1го успешного испыт-я.

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau=k) = pq^{k-1} \quad k=1,2,\dots}$$

← геометрич.

Д-во: $\{\tau=k\} = \{\underbrace{HHH..H}_{k-1}У\}$

Теорема о полиномиальной схеме

Пусть происх. посл-ть независимых в совок-ти испытаний, в кажд. из ктр возможно m исходов с вер. $p_1,\dots,p_m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Пусть $P_n(n_1,\dots,n_m)$ — вероятн-ть того, что в n испытании kй исход произошёл n_k раз

Тогда
$$\boxed{P_n(n_1,\dots,n_m) = \frac{n!}{n_1!\dots n_m!}p_1^{n_1}\cdot\dots\cdot p_m^{n_m}}$$

Д-во: $n_1+\dots+n_m=n$ $\quad (\underbrace{1,\dots,1}_{n_1},\underbrace{2,\dots,2}_{n_2},\dots,\underbrace{m,\dots,m}_{n_m})$ $\quad p_1^{n_1}\cdot\dots\cdot p_m^{n_m}$

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\dots\cdot C_{n-n_1-\dots-n_m}^{n_m} = \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\cdot\ldots = \frac{n!}{n_1!\dots n_m!}$$

1.7. Формула полной вероятности

Ex Завод произв. детали:

	всего	брак
I	25%	5%
II	35%	3%
III	40%	4%

$A = \{$деталь — брак$\}$

$\mathbb{P}(A) = 0{,}25\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 0{,}03 + 0{,}4\cdot 0{,}04$

$$\mathbb{P}(I|A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{\mathbb{P}(A)}$$

Опр Счётный или конечный набор $H_1, H_2, \dots \in F$ наз. полной группой событий, если:

$\mathbb{P}(H_i) > 0$

$H_i\cap H_j = \varnothing \quad \forall i\neq j$

$\bigcup H_i = \Omega$

H_i — гипотезы

Теорема ф-ла полной вероятности

Пусть $H_1, H_2, \dots$ — ПГС. Тогда $\forall A \in F$ $\quad \mathbb{P}(A) = \sum \mathbb{P}(A|H_i)\cdot\mathbb{P}(H_i)$

Д-во: $A = A\cap\Omega = A\cap(\bigcup_i H_i) = \bigcup_i (A\cap H_i)$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum\mathbb{P}(A\cap H_i) = \sum \mathbb{P}(A|H_i)\cdot\mathbb{P}(H_i)$

$(A\cap H_i)\cap(A\cap H_j) = \varnothing \quad \forall i\neq j$

Ex Задача о разорении

I и II играют в игру, пока деньги не проиграют

I	II		
a₽	b₽		
p	q	вер. выигр. в исп.	

p_n — вероятн. выигр. I игр., если у него сейчас n рублей

$p_a = ?$

$p_0 = 0 \qquad p_{a+b} = 1$

$H_1 = \{$I выигр. в очер. исп.$\}$ $\quad H_2 = \{$II выигр. в очер. исп.$\}$

$\mathbb{P}(H_1) = p \qquad \mathbb{P}(H_2) = q \qquad H_1, H_2$ — правда ПГС, ура!

$p_n = p_{n+1}\mathbb{P}(H_1) + p_{n-1}\mathbb{P}(H_2) = p_{n+1}p + p_{n-1}q \qquad 1\cdot(p+q)$

$q(p_n - p_{n-1}) = (p_{n+1} - p_n)p$

$(p_{n+1} - p_n) = \frac{q}{p}(p_n - p_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^n(p_1 - p_0)$

Пусть $q = p = \frac12 \Rightarrow p_{n+1} - p_n = p_1 \Rightarrow p_n = np_1$

$p_{a+b} = (a+b)p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{a+b} \qquad \Rightarrow p_a = \frac{a}{a+b}$

$p_{a+b} - p_n = \sum_{k=n}^{a+b-1}(p_{k+1} - p_k) = \sum_{k=n}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k\cdot(p_1) = p_1\frac{(q/p)^n - (q/p)^{a+b}}{1 - q/p}$

$1 - 0 = p_1\frac{1-(q/p)^{a+b}}{1-q/p} \rightsquigarrow p_1 \qquad 1 - p_n = \frac{(q/p) - (q/p)^{a+b}}{1-(q/p)^{a+b}}$

$\Rightarrow p_a = 1 - \frac{(q/p)^a - (q/p)^{a+b}}{1-(q/p)^{a+b}} \xrightarrow[b\to\infty]{}$

$p > q \xrightarrow[b\to\infty]{} 1 - (q/p)^a$

Теорема ф-ла Байеса:

Пусть A: $\mathbb{P}(A) > 0$, $H_1, H_2, \dots$ — ПГС. Тогда

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(A)}$$

Д-во: $\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(A)}$

Ex Монета:

I	1	1/2	Орёл
II	0,0001	1/2	Решка

$A = \{$Пуля попала в мишень$\}$

$$\mathbb{P}(O_p|A) = \frac{\mathbb{P}(A|O_p)\mathbb{P}(O_p)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1\cdot 1/2}{1\cdot 1/2 + 0.0001\cdot 1/2} \approx 0,9999$$

2. Случайные величины и их распределения

2.1. Случайные величины

$\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ — фиксир. пр-во

Опр Ф-я $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ наз. случайной величиной, если $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
$\xi^{-1}(B) := \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ (т.е. измеримая ф-я)

Ex 1 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ $\xi(\omega) = \omega$ — сл. в., т.к. $\xi^{-1}(\omega) \subseteq \Omega \Rightarrow \xi^{-1}(\omega) \in \mathcal{F}$

2 $\Omega = \{1,..,6\}$ $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$ $\xi(\omega) = \omega$ ← неизмеримо (надо показать)
$B = \{2\}$ $\xi^{-1}(\{2\}) = \{\omega : \xi(\omega) = 2\} = \{2\} \notin \mathcal{F}$ $\Rightarrow$ не случ. величина

3 $\Omega = [0,1]$ $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ $\mathbb{P} = \lambda$ $\xi(\omega) = \begin{cases} \ln \omega, & \omega \neq 0 \\ 500, & \omega = 0 \end{cases}$ ← была с ∞ проблема — случ. в.

2.2. Распределение случайных величин

Опр Вер. мера $\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in B\})$ для $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ наз. распред-ем случ. в. ξ

В дальнейшем забываем об ω: $\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B)$

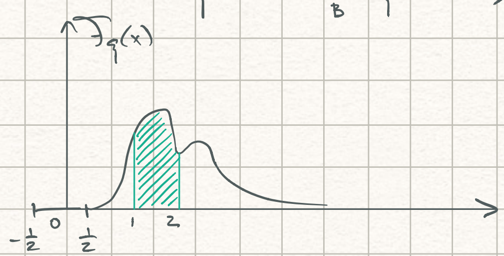
Опр Сл. в. ξ имеет дискретное распред-е, если $\exists$ кон. или счёт набор $\{a_1, a_2, \dots\}$:
$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = a_k) = 1$

Ex $\Omega = [0,1]$ $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ $\xi(\omega) = \begin{cases} \sqrt{1/2}, & \omega < 1/2 \\ -1/2, & \omega \geq 1/2 \end{cases}$

$p_k = \mathbb{P}(\xi = a_k)$

ξ	a_1	a_2	...	a_k	...
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	...	p_k	...

Опр Сл.в. ξ имеет абсолютно непрерывное распр-е, если $\exists f(x) \geq 0$:
$\mathbb{P}(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)\,dx$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, где $f_\xi(x)$ — **плотность**



$$\mathbb{P}(1 \leq \xi \leq 2) = \int_1^2 f_\xi(x)\,dx$$

$$\mathbb{P}(-\infty < \xi < \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$$ ← св-во плотности

$$\mathbb{P}(\xi \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) = \int_{-1/2}^{1/2} f_\xi(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} 0\,dx = 0$$

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = \mathbb{P}(\xi \in \{3\}) = \int_{\{3\}} f_\xi(x)\,dx = 0$$

Теорема о плотности

Пусть $f(x) \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, тогда найдётся $\langle \Omega, F, P \rangle$ и с.в. ξ : $f_\xi(x) = f(x)$

Д-во: $\Omega = \mathbb{R}$, $F = B(\mathbb{R})$ $P(B) = \int\limits_B f(x)\,dx$ $\quad \xi(\omega) = \omega$

$P_\xi(B) = P(B) = \int\limits_B f(x)\,dx$

Опр Сл.в. ξ имеет **сингулярное распред-е**, если $\exists C \subseteq \mathbb{R}$ $\lambda(C) = 0$, $P(\xi \in C) = 1$ и $\forall x \in C$ $P(\xi = x) = 0$

$P(\xi \in C) = \sum\limits_{x \in C} P(\xi = x) = 0$ счётн. не м/б ?

2.3. Функция распределения

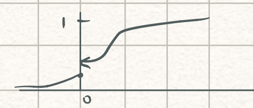
Опр $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ $x \in \mathbb{R}$ — ф-я распред-я

$F_\xi(x) = P(\xi \in (-\infty, x)) = P_\xi((-\infty, x))$

$P(\xi \in [-2, 0)) = P(\{\xi < 0\} \setminus \{\xi < -2\}) = P(\xi < 0) - P(\xi < -2) = F_\xi(0) - F_\xi(-2)$

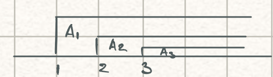
Св-ва ф-ии распред-я:

1. $\forall x \leq y$ $\quad F(x) \leq F(y)$ $\quad$ монотонность
2. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $F(x_0 - 0) := \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ $\quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad$ непр-ть слева
4. $F_\xi(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} F_\xi(x) = P(\xi \leq x_0)$ $\quad P(\xi = x) = F(x+0) - F(x)$



Д-во: 1 $x \leq y$ $\quad \{\xi < x\} \subseteq \{\xi < y\}$ $\Rightarrow F_\xi(x) = P(\xi < x) \leq P(\xi < y) = F_\xi(y)$

2 $\lim$ точно есть. Д-м: $\lim\limits_{n \to \infty} F(n) = 1$:



$A_n = \{\xi \geq n\}$ $\quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$

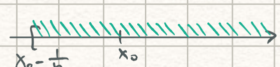
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{\xi = \infty\} = \varnothing$

$\lim\limits_{n \to \infty}(1 - F(n)) = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = 0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} F(n) = 1$

$B_n = \{\xi < -n\}$ $\quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ $\quad \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \{\xi = -\infty\} = \varnothing$

$\lim\limits_{n \to \infty} F(-n) = \lim\limits_{n \to \infty} P(B_n) = P(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$

3 $x_0 \in \mathbb{R}$

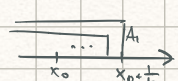


$C_n = \{\xi \geq x_0 - \frac{1}{n}\}$ $\quad C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \ldots$

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \{\xi \geq x_0\}$

$\lim\limits_{n \to \infty} F(x_0 - \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n \to \infty}(1 - P(C_n)) = 1 - \lim\limits_{n \to \infty} P(C_n) = 1 - P(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k) = 1 - P(\xi \geq x_0) = F(x_0)$

4 $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ $\quad A_n = \{\xi < x_0 + \frac{1}{n}\}$ $\quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ $\quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{\xi \leq x_0\}$



$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} F_\xi(x_0 + \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(\bigcap A_n) = P(\xi \leq x_0)$

$\{\xi = x\} = \{\xi \leq x\} \setminus \{\xi < x\} \Rightarrow P(\xi = x) = P(\xi \leq x) - P(\xi < x)$

Теорема о классе функц. распр-я

Пусть F облад. св-вами 1-3. Тогда $\exists \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ и сл.в. ξ : $F_\xi(x) = F(x)$

Идея д-ва: $\Omega = \mathbb{R}$ $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P([a,b)) = F(b) - F(a)$ — вер. мера на алгебре интервалов

По теор. Каратеодори

$\exists!\ \tilde{P}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\tilde{P}([a,b)) = P([a,b))$

$\xi(\omega) = \omega$ $P_\xi(B) = \tilde{P}(B)$ $F_\xi(x) = F(x)$

Опр Сл.в. ξ имеет **смешанное** распр-е, если $\exists \xi_1$ - диск., ξ_2 - а.н.р., ξ_3 - синг.

$p_1, p_2, p_3 \in [0,1)$ $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i = 1$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P_\xi(B) = p_1 P_{\xi_1}(B) + p_2 P_{\xi_2}(B) + p_3 P_{\xi_3}(B)$

$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\{\omega : \xi(\omega) \in (-\infty, x)\}) = P_\xi((-\infty, x))$

$F_\xi(x) = \sum\limits_{i=1}^{3} p_i F_{\xi_i}(x)$

2.4. Примеры распределений

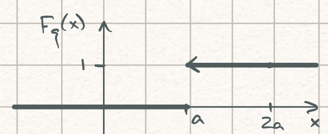
Дискретные:

Опр $\xi \in I_a$ (ξ имеет вырожденное распред-е с пар-ром a), если $P(\xi = a) = 1$.

Ex $a = \pi$: $\xi \in I_\pi$ $P(\xi = \pi) = 1$

$P(\xi = 10) \leq P(\xi \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\}) = P(\xi \in \mathbb{R}) - P(\xi = \pi) = 1 - 1 = 0$

ξ	a
P	1



$F_\xi(x) = P(\xi < x)$

Опр $\xi \in B_p$ (распр-е Бернулли) $p \in [0,1]$, если $P(\xi = 0) = 1 - p$

$P(\xi = 1) = p$

ξ	0	1
P	$1-p$	p

Ex • $\Omega = \{0, D\}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ $\xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ 1, & \omega = D \end{cases}$ $\xi \in B_{1/2}$

• 10^5 людей страхуем У - p Н - $(1-p)$ $\xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если „кто-то умер"} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

$|\Omega| = 2^{10^5}$ $\{\text{„кто-то умер"}\} = \{S_n \geq 1\}$

$\xi \in B_{P(S_n = 0) = q^{10^5}}$

• $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ $\xi(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ $\xi \in B_{P(A)}$

$p = P(\xi = 1) = P(\{\omega : \omega \in A\}) = P(A)$

Опр Сл.в. ξ имеет биномиальное распр-е, т.е. $\xi \in B_{n,p}$ $n \geq 1$ $p \in [0,1]$, если:

$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, \dots, n$

Ex Схема Бернулли

$\xi(\omega) = 5 \in B_{5,1}$ — неинтересно :c

$\xi(\omega) = S_n(\omega)$ - кол-во успехов в первых n испыт-х.

уд. **Опр** Сл.в. ξ имеет геометрическое распр-е, т.е. $\xi \in G_p$, $p \in [0,1]$, если

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ex Схема Бернулли $\xi(\omega)$ = Номер 1го успешного испыт-я

Св-во нестарения:

$$\forall n, k \geq 1 \quad P(\xi > n+k \mid \xi > k) = P(\xi > n)$$

когда ждать успеха? столько же, сколько с самого начала

Д-во: $P(\xi > n) = P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \{\xi = k\}\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n$

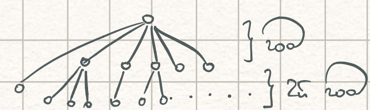
$$P(\xi > n+k \mid \xi > k) = \frac{P(\{\xi > n+k\} \cap \{\xi > k\})}{P(\xi > k)} = \frac{P(\xi > n+k)}{P(\xi > k)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^k} = (1-p)^n$$

Ex Сколько людей заражу за год/два

Распр-е должно быть одно.

Σ случ. кол-ва случ. величин

(св-во геом. распр-я)



$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$, ура, всё ок! Для биномиального тоже надо бы

Опр Сл.в. ξ имеет распр-е Пуассона, т.е. $\xi \in \Pi_\lambda$, $\lambda > 0$, если

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \dots$$

кол-во клиентов, ктр пришли за время t

Ex $P(\xi = 10) = \frac{\lambda^{10}}{10!} e^{-\lambda}$

$$\sum_{k=0} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

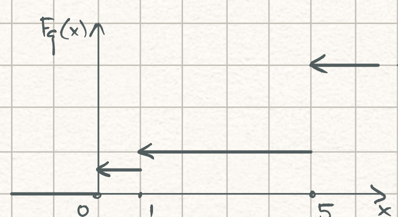
Опр Сл.в. ξ имеет гипергеометрич. распр-е, т.е. $\xi \in HG_{N,K,n}$, $N \geq 1$, $K \leq N$, $n \leq N$, если

$$P(\xi = k) = \frac{C_K^k \, C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \quad k = 0, \dots, \min\{K, n\}$$

Ex

$P(k \text{ белых}) = ?$

Ф-ии строим:



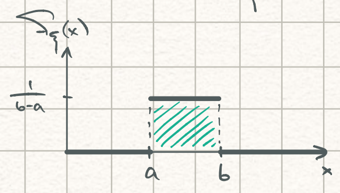
ξ	0	1	5
P	1/6	1/6	2/3

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

Абсолютно непрерывные распред-я:

Опр Равномерное распр-е: $\xi \in U_{a,b}$, $-\infty < a < b < \infty$, если

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

везде можно = ставить

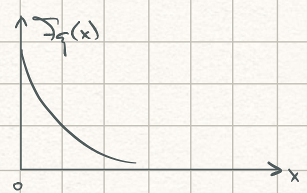
Ex Геом. вероятность на $\Omega = [a,b]$: если $\xi \in U_{0,1}$ $\eta = a\xi + b \in U_{b,a+b}$, $a > 0$

Д-во: $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{x-b}{a} \le 0 \\ \frac{x-b}{a}, & \frac{x-b}{a} \in [0,1] \\ 1, & \frac{x-b}{a} \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 1, & x \ge b \end{cases}$

можно, т.к. однозначно задаёт распр-е

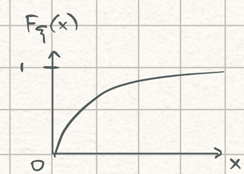
Опр Показательное (экспоненциальное) распр-е:

$\xi \in E_\alpha$, $\alpha > 0$, если $f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



$$P(\xi \in (-1, 0)) = \int_{-1}^{0} f_\xi(x)\,dx = 0$$

время прихода след. клиента



$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

Св-во нестарения:

$\forall x, y > 0$ $\quad P(\xi > x + y \mid \xi > x) = P(\xi > y)$

Д-во: $P(\xi > x) = \int_x^{\infty} f(t)\,dt = \int \alpha e^{-\alpha t}\,dt = -e^{-\alpha t}\Big|_x^{\infty} = e^{-\alpha x}$

$$P(\xi > x + y \mid \xi > x) = \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y} = P(\xi > y)$$

Опр Нормальное (гауссовское) распр-е:

С.в. $\xi \in N_{a,\sigma^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, если:

$$f_\xi(t) = \varphi_{a,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Утв Если $a > 0$, $\sigma = 1$ $\quad N_{0,1}$ – ст. норм. распр-е

$$F_\xi(x) = \Phi_{a,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{a,\sigma^2}(t)\,dt$$

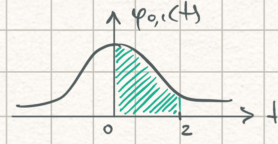
Утв $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \left| \frac{t-a}{\sigma} = u \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = I \qquad I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv = \iint e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}}\,du\,dv = \left| \begin{matrix} u = \rho\cos\varphi \\ v = \rho\sin\varphi \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho\,d\varphi = \int_0^{\infty} 2\pi \rho e^{-\rho^2/2}\,d\rho = 2\pi\left(-e^{-\rho^2/2}\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi$$

$\Rightarrow$ плотность

Утв $\xi \in N_{0,1}$ $\quad P(\xi>0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}$

$P(\xi\in(0,2)) = \int_0^2 \varphi_{0,1}(t)\,dt > 0$ (почти $\frac{1}{2}$)



плотность (чётная)

$P(\xi\in(-2,0)) = P(\xi\in(0,2)) > 0$

$P(\xi\in(-\infty,-10^6)) > 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{P(\xi\in B)>0 \quad \forall B:\ r(B)>0}$

Св-ва N_{a,σ^2}:

1. $\xi\in N_{a,\sigma^2} \Leftrightarrow \eta = \frac{\xi-a}{\sigma} \in N_{0,1}$

2. $\forall x \quad \Phi_{0,1}(0) = \frac{1}{2} \qquad \Phi_{0,1}(-x) = 1-\Phi_{0,1}(x)$

3. $\xi\in N_{a,\sigma^2} \Rightarrow P(|\xi-a|>3\sigma) < 0{,}0027$

Д-во: 1. $\Rightarrow$ $\xi\in N_{a,\sigma^2}$ $\quad \eta=\frac{\xi-a}{\sigma}$: $\quad F_\eta(x) = P(\eta<x) = P\left(\frac{\xi-a}{\sigma}<x\right) = P(\xi<\sigma x+a) =$

$= \int_{-\infty}^{\sigma x+a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt = \left|\frac{t-a}{\sigma}=u\right| = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi_{0,1}(x) \Rightarrow \eta\in N_{0,1}$

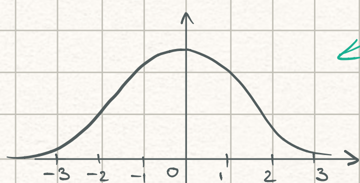
2. $\Phi_{0,1}(0) = P(\eta<0)$, где $\eta\in N_{0,1}$ $\quad = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}$, т.к. $\varphi_{0,1}(t)$ – чётн.

$\Phi_{0,1}(-x) = \int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1-\int_{-x}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = |t=-u| = 1-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1-\Phi_{0,1}(x)$

3. $P(|\xi-a|>3\sigma) = P\left(\left|\frac{\xi-a}{\sigma}\right|>3\right) = P(|\eta|>3) = P(\eta<-3)+P(\eta>3) \overset{2}{=}$

$= 1-P(\eta<3)+P(\eta>3) = 1-P(\eta<3)+1-P(\eta\leq 3) = 2P(\eta>3) <$

$< 0{,}0027$



Опр Гамма-распределение:

Сл.в. $\xi\in\Gamma_{\alpha,\lambda}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, если $\quad f_\xi(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1}e^{-\alpha t}, & t\geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt, \ \lambda>0$

Утв Гамма-распр-е $\longrightarrow$ показат. распр-е: $\quad \Gamma_{\alpha,1} = E_\alpha$

$F_\xi(x) \overset{x>0}{=} \int_0^x \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1}e^{-\alpha t}dt$

Утв Если $\lambda = n\in\mathbb{N}$: $\quad F_\xi(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\alpha x)^2}{k!}e^{-\alpha x} = P(\eta\geq n)$, где $\eta\in\Pi_{\alpha x}$

Опр Распределение Коши: $\qquad$ хвосты толстые, в отл. от норм.

Сл. в. $\xi\in C_{a,\sigma^2}$, $a\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$, если:

$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-a)^2}, \ x\in\mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-a)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sigma}dx = \left|\frac{x-a}{\sigma}=u\right| = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-a)^2}dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

Опр Распределение Парето: теория экстрем знач-й

С.в. $\xi \in P_\alpha$, $\alpha > 0$, если $f_\xi(t) = \begin{cases} \alpha t^{\alpha-1}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$

Св-во: $\forall x, y \geq 1$ $\quad P(\xi > xy \mid \xi > x) = P(\xi > y)$

Д-во: упр!

Опр Логнормальное распр-е: финансы всякие

С.в. $\xi \in LN_{a,\sigma^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\xi = e^\eta$, где $\eta \in N_{a,\sigma^2}$

Утв $F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(e^\eta < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dots \end{cases}$

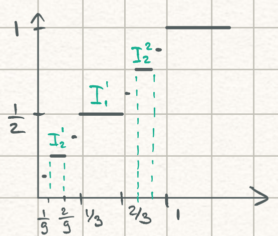
$\overset{x>0}{=} P(\eta < \ln x) = \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$

$= \left| \begin{matrix} e^t = u \\ t = \ln u \\ dt = \frac{du}{u} \end{matrix} \right| = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln u - a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{u} du$

$f_\xi(u) = \begin{cases} \frac{1}{u\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln u-a)^2}{2\sigma^2}}, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$

Сингулярные

1. Лестница Кантора



$I_1^1 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ $\quad I_2^1 = [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ $\quad I_2^2 = [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$

$I_3^1 = [\frac{1}{27}, \frac{2}{27}]$ $\quad I_3^2 = [\frac{7}{27}, \frac{8}{27}]$ $\quad \dots$

$I_n^k = [\frac{?}{3^n}, \frac{\;}{3^n}]$ $\qquad \mu(I_n^k) = 3^{-n}$, $\; k = 1, \dots, 2^{n-1}$

$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2/3}{1 - 2/3} = 1$

$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k \quad \Rightarrow \quad \mu(C) = 0$

Утв $P(\xi \in I_1^1) = P(\xi \leq \frac{2}{3}) - P(\xi < \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$P(\xi \in \cup\cup) = 0$

$P(\xi \in [0,1]) = 1 = P(\xi \in C) = 1$

$P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in C$

Упр Д-ть, что лестница Кантора непр-на. на экзамене не спросят

И хватит!

Опр С.в. ξ явл-ся **смесью**, если $\exists \xi_1, \xi_2$, $p_1, p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$ и

$P(\xi \in B) = p_1 P(\xi_1 \in B) + p_2 P(\xi_2 \in B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Зам о двойной рандомизации:

$\xi = \begin{cases} \xi_1, & \text{с вер. } p_1 \\ \xi_2, & \text{с вер. } p_2 \end{cases}$

$P(\xi \in B) \overset{\text{ФПВ}}{=} P(\xi \in B \mid H_1) \cdot P(H_1) + P(\xi \in B \mid H_2) \cdot P(H_2) = P(\xi_1 \in B) p_1 + P(\xi_2 \in B) p_2$

2.5. Преобразование случайных величин

Зам об измеримости преобр-я

Если ξ - с.в., $g(t)$ - борелевск. ф-я, то $\eta = g(\xi)$ - с.в.

Д-во: $g(t)$ - борел. $\Rightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \eta^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \ni \eta^{-1}(B) = \{\omega : \eta(\omega) \in B\} = \{\omega : g(\xi(\omega)) \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in \underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\}$$

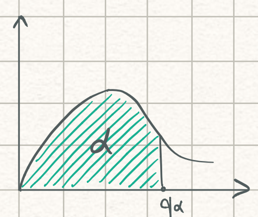
Теорема о лин. преобразовании абс. непр. распр-й

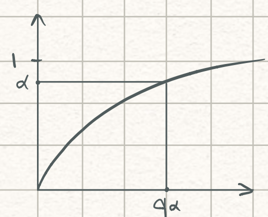
Пусть ξ имеет абс. непр. распр-е с $f_\xi(x)$. Тогда $\forall a \neq 0, b \in \mathbb{R}$: с.в. η имеет а.н.р. с $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Д-во: Пусть $a > 0$. $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t)\,dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{u-b}{a} \\ dt = \frac{du}{a} \end{matrix} \right| =$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right) du = \int_{-\infty}^{x} f_\eta(u)\,du$$

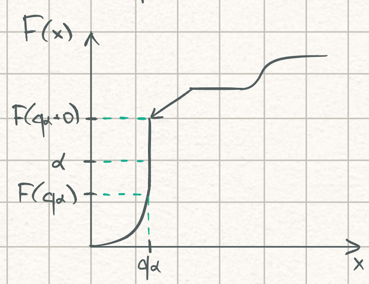
Опр Квантилью для непр. монот. ф-ии распр-я уровня $\alpha \in [0,1]$ наз. число $q_\alpha \in \mathbb{R}$: $F(q_\alpha) = \alpha$

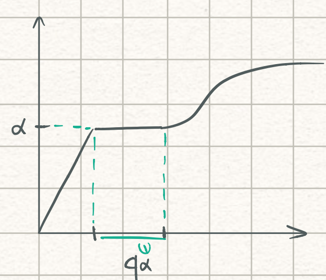




Опр Квантилью уровня $\alpha \in [0,1]$ наз. любое число $q_\alpha \in \mathbb{R}$: (общий случай)

$F(q_\alpha) \leq \alpha \qquad F(q_\alpha + 0) \geq \alpha$



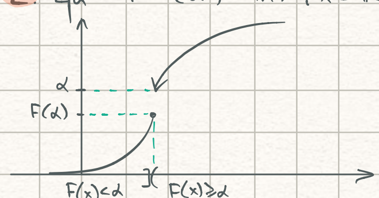


Опр Медиана: $\mu = q_{\frac{1}{2}}$

Опр Мода — любой локальн. max плотности распр-я.

Теорема о линейн. преобр. квантилей:

1. Пусть q_α - квантиль уровня $\alpha \in [0,1]$ для ξ. Тогда: $\forall a > 0, b \in \mathbb{R}$ $\qquad a q_\alpha + b$ - квантиль уровня $\alpha \in [0,1]$ для $\eta = a\xi + b$
2. $q_\alpha = F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < \alpha\}$



Д-во: 1. $F_\xi(q_\alpha) = P(\xi < q_\alpha) = P(a\xi+b < aq_\alpha+b) = P(\eta < aq_\alpha+b) = F_\eta(aq_\alpha+b) \le \alpha$

$F_\xi(q_\alpha+0) = P(\xi \le q_\alpha) = P(a\xi+b \le aq_\alpha+b) = P(\eta \le aq_\alpha+b) = F_\eta(aq_\alpha+b+0) \ge \alpha$

2. $F(F^\leftarrow(\alpha)) \le \alpha \qquad F(F^\leftarrow(\alpha)+0) \ge \alpha$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_\varepsilon : F(x_\varepsilon) \ge \alpha \qquad F^{-1}(\alpha)+\varepsilon > x_\varepsilon \Rightarrow F(\underset{\varepsilon\to 0}{F^\leftarrow(x)+\varepsilon}) \ge F(x_\varepsilon) \ge \alpha$

По опр-ю sup: $\forall \varepsilon>0 \ \ \exists x_\varepsilon \in \mathbb{R} \ \ F(x_\varepsilon) < \alpha : \ F^\leftarrow(\alpha)+\varepsilon > x_\varepsilon$

$\Rightarrow F(F^\leftarrow(\alpha)+\varepsilon) \ge F(x_\alpha) \ge \alpha$

$\downarrow \varepsilon \to 0$

$F(F^\leftarrow(\alpha)+0) \ge \alpha$

Теорема о квантильном преобразовании:

1. Пусть F_ξ - ф-я распр-я с.в. ξ. $U \in U_{0,1}$. Тогда $F_\xi^\leftarrow(U) \in F_\xi$
2. Пусть F_ξ - непр. Тогда $F_\xi(\xi) \in U_{0,1}$

Д-во: $F_\xi(x) = P(\xi < x) \qquad F_\xi(\xi) \cancel{=} P(\xi<\xi) = 0$

$\{U \le F(x)\} \underset{\uparrow}{\subseteq} \{F_\xi^\leftarrow(U) < x\} \overset{упр}{\subseteq} \{U \le F(x)\}$

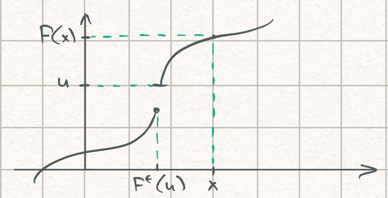
Покажем это от противного:

Пусть $F_\xi^\leftarrow(U) \ge x \qquad \forall \varepsilon>0 \ \ \exists x_\varepsilon : F(x_\varepsilon) < U$ и $F^\leftarrow(U) - \varepsilon < x_\varepsilon$

$\Rightarrow x - \varepsilon \le F^\leftarrow(U) - \varepsilon < x_\varepsilon$

$F(x-\varepsilon) = F(x_\varepsilon) < U \quad \Rightarrow$ при $\varepsilon \to 0$: $\ F(x) < U$

$\Rightarrow \{F^\leftarrow(U) \ge x\} \subseteq \{F(x) \le U\} \Rightarrow \{F(x) > U\} \subseteq \{F^\leftarrow(U) < x\}$



1. $\underbrace{P(U < F(x))}_{F(x)} \le \underbrace{P(F^\leftarrow(U) < x)}_{F(x)} \le \underbrace{P(U \le F(x))}_{F(x)}$

2. $P(F(\xi) < x) \overset{упр}{=} P(\xi < F^\leftarrow(x)) = F(F^\leftarrow(x)) \overset{упр}{=} x, \quad x \in [0,1]$

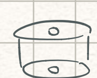
2.6. Многомерные распределения

Ex Кидаем 2 монеты:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р	
О	1/4	1/4	1/2
Р	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

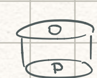
Теперь склеили их так:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р
О	1/2	0
Р	0	1/2



Теперь склеили иначе:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р
О	0	1/2
Р	1/2	0



Общий случай:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	О	Р	
О	p	$\frac{1}{2}-p$	1/2
Р	$\frac{1}{2}-p$	p	1/2
	1/2	1/2	

$p \in [0, \frac{1}{2}]$

Опр Случайный вектор — $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, если $\forall i \ \ \xi_i$ - с.в.

Опр Совместным распределением с.в. $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ наз. вер. мера $P_{\bar{\xi}}(B) = P(\bar{\xi} \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Совместная ф-я распр-я: $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

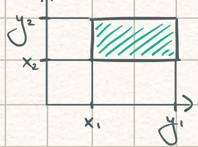
Св-ва

тут всё для $n=2$, но ясно, что для общ. случая аналогичные

1. $\forall x_1, x_2 \quad 0 \le F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) \le 1$
2. $\forall x_1 \le y_1, \ x_2 \le y_2 \quad F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) \le F_{\bar{\xi}}(y_1, y_2)$
3. $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = 0$

   $\lim\limits_{x_1 \to \infty} F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = P(\xi_2 < x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$

   $\lim\limits_{x_1 \to \infty} \lim\limits_{x_2 \to \infty} F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = 1$
4. $F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2)$ непр. слева по кажд. аргументу
5. $\forall x_1 \le y_1, \ x_2 \le y_2$



$$F_{\bar{\xi}}(y_1, y_2) - F_{\bar{\xi}}(y_1, x_2) - F_{\bar{\xi}}(x_1, y_2) + F_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) \geq 0$$
$$\| $$
$$P(\xi_1 \in [x_1, y_1), \xi_2 \in [x_2, y_2))$$

Зам Св-ва 1-5 х-теристические

Опр С.в. $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет дискретное распр-е, если найдётся не более чем счётный набор $\{(a_i, b_j)\}_{i,j}$: $\sum\limits_{i,j} P(\bar{\xi} = (a_i, b_j)) = 1$

$\xi_2 \backslash \xi_1$	a_1	......	a_m	
b_1	p_{11}		p_{m1}	
b_j	p_j		p_{mj}	p_j
b_n	p_{1n}		p_{mn}	
	$P(\xi_1 = a_1)$ q_1		q_m	

$p_{11} = P(\xi_1 = a_1, \xi_2 = b_1) \qquad p_{ij} = P(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j)$

$\sum\limits_i P(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j) = P(\bigcup\limits_i \{\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j\}) = P(\xi_2 = b_j) = p_j$

В общем, $\sum\limits_i q_i = 1 \qquad \sum\limits_j p_j = 1$, а $p_i + q_j$ = чему угодно от 0 до 2

$\xi_2 \backslash \xi_1$	1	.....	n
1	p_{11}		p_{n1}
$\vdots$			
n	p_{1n}		p_{nn}

$$P(\xi_1 = \xi_2) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \{\xi_1 = \xi_2 = i\}\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_1 = \xi_2 = i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}$$

несовм. соб.

Опр С.в. $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет абсолютно непр. распр-е, если $\exists\, p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $p_{\bar{\xi}}(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и $P(\bar{\xi} \in B) = \int\limits_B p_{\bar{\xi}}(\bar{x})\, d\bar{x} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Св-ва:

1. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} p_{\bar{\xi}}(\bar{x})\, d\bar{x} = 1$

   Д-во: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} p_{\bar{\xi}}(\bar{x})\, d\bar{x} = P(\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n) = P(\xi_1 \in \mathbb{R}, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}) = 1 \qquad P(\xi_i \in \mathbb{R}) = 1$

2. $p_{\xi_1}(x_1) = \int \dots \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} p_{\bar{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$

   Д-во: $P(\xi_1 \in B) = P(\xi_1 \in B, \xi_2 \in \mathbb{R}, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}) = \int\limits_{B_1} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}} p_{\bar{\xi}}(\bar{x})\, dx_2 \dots dx_n}_{p_{\xi_1}(x_1)} dx_1$

   т. Тонелли-Фубини (кого-то из)

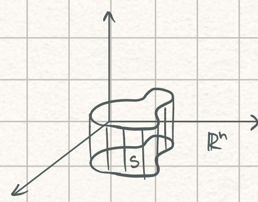
$P(\xi=\eta) = P((\xi,\eta)\in\{(x,x): x\in\mathbb{R}\}) = \iint\limits_{\underset{\text{меры } 0}{x=y}} p_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx\,dy = 0$

$P(\xi<\eta) = \iint\limits_{\{(x,y):x<y\}} p_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dx\,dy$ = чему угодно от 0 до 1

Опр многомерное равномерное распределение

$\bar\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in U_S$, $S\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(S)\in(0,\infty)$,

если $p_{\bar\xi}(\bar x) = \begin{cases}\frac{1}{\lambda(S)}, & x\in S\\ 0, & x\notin S\end{cases}$



Опр многомерное нормальное распределение:

$\bar\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)\in N_{\bar a,\Sigma}$, $\bar a\in\mathbb{R}^n$, $\Sigma=\Sigma^T>0$, $\Sigma\in M_n(\mathbb{R})$,

если $p_{\bar\xi}(\bar x) = \dfrac{(2\pi)^{-n/2}}{(\det\Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{(\bar x-\bar a)\Sigma^{-1}(\bar x-\bar a)^T}{2}}$

Ex

$$\Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2\end{pmatrix} \quad p_{\bar\xi}(\bar x) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sigma_1\dots\sigma_n} e^{-\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}+\dots+\frac{(x_n-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right]} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}}_{\varphi_{a,\sigma_1^2}(x_1)}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{-\frac{(x_n-a_n)^2}{2\sigma_n^2}}}_{\varphi_{a,\sigma_n^2}(x_n)}$$

Опр С.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ независимы, если $\forall B_1,\dots,B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$P(\xi_1\in B_1,\dots,\xi_n\in B_n) = P(\xi_1\in B_1)\dots P(\xi_n\in B_n)$

Теорема Критерий независимости:

След. утв-я эквивалентны:

1. $\xi_1,\dots,\xi_n$ — независимы
2. $F_{\bar\xi}(\bar x) = F_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot F_{\xi_n}(x_n)$ $\forall \bar x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
3. Если $\bar\xi$ имеет дискр. распр-е, то $\forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$:
   $P(\xi_1=a_1,\dots,\xi_n=a_n) = P(\xi_1=a_1)\cdot\ldots\cdot P(\xi_n=a_n)$
4. Если $\bar\xi$ имеет а.н.р., то $\forall x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ $p_{\bar\xi}(x_1,\dots,x_n) = p_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot p_{\xi_n}(x_n)$

Д-во: (1) <=> (4)

$\Rightarrow P(\xi_1\in B_1,\dots,\xi_n\in B_n) = P(\xi_1\in B_1)\dots P(\xi_n\in B_n) \overset{\text{св-во пл-ти}}{=} \int\limits_{B_1} p_{\xi_1}(x_1)dx_1\cdot\ldots\cdot\int\limits_{B_n} p_{\xi_n}(x_n)dx_n \overset{\text{Фубини}}{=}$

$= \iint\limits_{B_1\times\ldots\times B_n} p_{\xi_1}(x_1)\dots p_{\xi_n}(x_n)\,dx_1\dots dx_n$ дальше слова про Каратеодори

$\Rightarrow \forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $P(\bar\xi\in B) = \iint\limits_B p_{\xi_1}(x_1)\dots p_{\xi_n}(x_n)\,d\bar x \overset{\text{опр-е}}{=} \int\limits_B p_{\bar\xi}(\bar x)\,d\bar x$

$\Rightarrow p_{\bar\xi}(\bar x) = p_{\xi_1}(x_1)\dots p_{\xi_n}(x_n)$

$\Leftarrow P(\xi_1\in B_1,\dots,\xi_n\in B_n) = \iint\limits_{B_1\times\ldots\times B_n} p_{\bar\xi}(\bar x)\,d\bar x = \iint\limits_{B_1\times\ldots\times B_n} p_{\xi_1}(x_1)\dots p_{\xi_n}(x_n)\,d\bar x \overset{\text{Фубини}}{=} \int\limits_{B_1} p_{\xi_1}(x_1)dx_1\cdot\ldots\cdot\int\limits_{B_n} p_{\xi_n}(x_n)dx_n =$

$= P(\xi_1\in B_1)\cdot\ldots\cdot P(\xi_n\in B_n)$

Теорема о свёртке для дискретных с.в.

Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ (ξ не зависит от η), $P(\xi\in\{0,1,\dots\}) = P(\eta\in\{0,1,\dots\}) = 1$

Тогда $P(\xi+\eta=n) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\xi=k)P(\eta=n-k)$, $n=0,1,2,\dots$

Д-во: $\{\xi+\eta=n\} = \bigcup\limits_{k=0}^{n}\{\xi=k,\ \xi+\eta=n\}$

$\Rightarrow P(\xi+\eta=n) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\xi=k,\ \xi+\eta=n) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\xi=k,\ \eta=n-k) \overset{\text{нез}}{=} \sum P(\xi=k)P(\eta=n-k)$

Теорема о свёртке для а.н.р.:
Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ имеют а.н.р.. Тогда $f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) f_\eta(x-t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-t) f_\eta(t)\,dt$

Д-во: $F_{\xi+\eta}(y) = P(\xi+\eta<y) = \iint\limits_{u+v<y} f_{\xi,\eta}(u,v)\,du\,dv = \iint\limits_{u+v<y} f_\xi(u) f_\eta(v)\,du\,dv \overset{\text{Фуб}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u)\,du \int\limits_{-\infty}^{y-u} f_\eta(v)\,dv =$
$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u)\,du \int\limits_{-\infty}^{y} f_\eta(v-u)\,dv \overset{\text{Фуб}}{=} \int\limits_{-\infty}^{y} \Big(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u) f_\eta(v-u)\,du}_{= f_{\xi+\eta}(v)}\Big)\,dv = \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi+\eta}(v)\,dv$

Ex $\xi \in \Pi_\lambda,\ \eta \in \Pi_\lambda \Rightarrow \xi+\eta \in \Pi_{2\lambda}$

Ex 1 $\xi \in N_{0,1},\ \eta = \xi,\ \eta \in N_{0,1} \Rightarrow \xi+\eta = 2\xi \in N_{0,4}$

2 $\xi \in N_{0,1},\ \eta = -\xi,\ \eta \in N_{0,1} \Rightarrow \xi+\eta = 0 \in I_0$

3 $\xi \in N_{0,1},\ \xi \perp\!\!\!\perp \eta,\ \eta \in N_{0,1} \Rightarrow \xi+\eta \in N_{0,2}$

Д-во: $f_{\xi+\eta}(v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-u)^2}{2}}\,du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac12(2u^2-2uv+v^2)}\,du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac12\left(\sqrt2 u - \frac{v}{\sqrt2}\right)^2 - \frac{v^2}{4}}\,du =$
$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt2} e^{-\frac12\left(u-\frac{v}{\sqrt2}\right)^2}\,du = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt2} e^{-\frac12 u^2}\,du = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt2} e^{-\frac{v^2}{4}} \cdot \sqrt{2\pi}$ $\to \sigma^2 = 2$

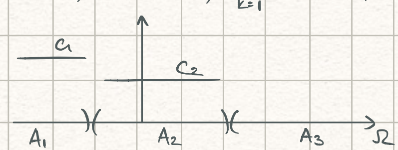
3. Числовые характеристики распределения

3.1. Математическое ожидание

$E\xi = \int\limits_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$ — мат. ожидание

Опр Простая сл. в. $\xi(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$, где $N \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing\ \forall i \neq j$,

$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ — индикатор



простые
↕
ступенчатые

Опр Мат. ожидание для простых с.в.: $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k P(A_k)$

Св-ва:
1. $Ec = c$
2. $E\alpha\xi = \alpha E\xi \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ — однородность
3. $\xi \le \eta \Rightarrow E\xi \le E\eta$
4. $|E\xi| \le E|\xi|$ — нер-во Δ-ка — можно из (3) д-ть
5. $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$ — аддитивность

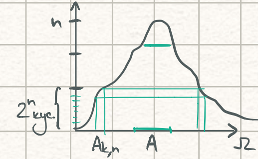
Д-во: $\xi = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{A_k} \qquad \eta = \sum\limits_{n=1}^{M} d_k \mathbb{1}_{B_n} \qquad \xi+\eta = \sum\limits_{k,n} (c_k + d_n)\mathbb{1}_{A_k \cap B_n}$

$E(\xi+\eta) = \sum\limits_{k,n} (c_k+d_n) P(A_k \cap B_n) = \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{M} c_k P(A_k \cap B_n) + \sum\sum d_n P(A_k \cap B_n) =$
$= \sum\limits_{k} c_k \sum\limits_{n} P(A_k \cap B_n) + \ldots \overset{\cap B_n = \Omega}{=\!=} \sum\limits_{k} c_k P(A_k) + \sum\limits_{n} d_n P(B_n) = E\xi + E\eta$

Опр $E(\xi; B) = \int\limits_B \xi(\omega) P(d\omega) = \int\limits_\Omega \xi(\omega) \mathbb{1}_B(\omega) P(d\omega)$

Лемма о приближении с.в. простыми с.в.:
$\forall \xi \ge 0\ \ \exists$ посл-ть простых ξ_n: $\forall \omega \in \Omega \quad \xi_n(\omega) \nearrow_{n\to\infty} \xi(\omega)$ (сходится, возрастая)

Д-во: $\xi_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \underbrace{\xi(\omega) \geq n}_{A} \\ \frac{k}{2^n}, & \underbrace{\xi(\omega) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}_{A_{k,n}}, \quad k = 0, \dots, n2^n - 1 \end{cases}$



всего $n \cdot 2^n$ кус.

$\xi_n(\omega) \geq \xi_{n,1}(\omega) \geq \xi_{n,2}(\omega) \geq \dots \quad \forall \omega \ \forall n$

Разбивается не по обл-ти опр-я, а по обл-ти знач-й — ключевое место

$\forall \omega \in \Omega \quad |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \frac{1}{2^n}$

Осталось понять, явл. ли $\xi_n(\omega)$ сл. в.:

$\xi_n(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}\{A_{k,n}\}$ — простая с.в., т.к. $A_{k,n}$ измеримы (т.к. ξ — с.в.)

Лемма о единственности предела

Пусть $\xi > 0$, $\xi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \xi$, $\eta_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} \xi \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$

Д-во: $\forall n \geq 1 \quad E\xi_n \leq \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$ ← для начала это покажем

если $\xi_n - \eta_k \leq \varepsilon$ $\mathbb{1} = 1$, иначе 0

$\xi_n - \eta_k = (\xi_n - \eta_k)\mathbb{1}\{\xi_n - \eta_k < \varepsilon\} + (\xi_n - \eta_k)\mathbb{1}\{\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon\} < \varepsilon + (\xi_n - \eta_k)\mathbb{1}\{\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon\}$

$E(\xi_n - \eta_k) \leq E\varepsilon + E((\xi_n - \eta_k)\mathbb{1}\{\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon + E(\xi_n \mathbb{1}\{\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon\}) \leq$

$\leq \varepsilon + c_n E\mathbb{1}\{\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon\} = \varepsilon + c_n P(\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon)$

$\Rightarrow E\xi_n \leq \varepsilon + c_n P(\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon) + E\eta_k$

вот с этой частью осторожно, ибо лажа

$B_k = \{\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon\} \qquad B_k \supset B_{k+1} \supset B_{k+2} \supset \dots$

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k = \varnothing$, т.к. $\forall \omega \in \Omega \ \exists K: \ \forall k \geq K \quad \eta_k(\omega) - \xi > -\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow B_k \subset \{\xi_n - \xi > \frac{\varepsilon}{2}\} = \varnothing \quad \forall k \geq K$

$\lim\limits_{k\to\infty} P(B_k) = 0 \qquad E\xi_n \leq \varepsilon + c_n \underbrace{P(\xi_n - \eta_k \geq \varepsilon)}_{\downarrow k\to\infty \ 0} + E\eta_k \to \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$

$\Rightarrow E\xi_n \leq \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$, аналогично получим $E\eta_k \leq \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$

$\downarrow n\to\infty \qquad\qquad \downarrow k\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \leq \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k \qquad \lim E\eta_k \leq \lim E\xi_n \qquad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = \lim\limits_{k\to\infty} E\eta_k$

Опр Мат. ожидание: Если $\xi \geq 0$ $E\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$, где $\xi_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \xi$ — простые с.в.

$\xi = \xi^+ - \xi^-, \quad \xi^+ = \max\{0, \xi\}, \quad \xi^- = \max\{0, -\xi\}$

$E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, если $E|\xi| = E\xi^+ + E\xi^- < \infty$

Св-ва

1. $E\alpha\xi = \alpha E\xi \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$
3. $|E\xi| \leq E|\xi|$
4. $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta, \quad E(|\xi| + |\eta|) < \infty$
5. $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \quad A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j \quad E|\xi| < \infty \ : \ E(\xi; A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} E(\xi; A_k)$ — счёт. аддит. интегралов

Д-во: $A \cap B = \varnothing \quad E(\xi; A \cup B) = E\xi\mathbb{1}_{A\cup B} = E\xi(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) = E(\xi; A) + E(\xi; B)$

Пусть $\xi \geq 0$. Д-м, что если $A_n: \ P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $E(\xi, A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$B_m = \{\xi \geq m\} \quad P(\overline{B_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 1 \quad P(B_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \ \forall m \geq M \quad P(B_m) < \varepsilon$

$E(\xi; A_n) = E(\xi; A_n \cap B_m) + E(\xi; A_n \cap \overline{B_m}) \leq$

$\xi_m \underset{m\to\infty}{\nearrow} \xi \qquad \xi \geq \xi\mathbb{1}_{\overline{B_m}} \geq \xi_m \mathbb{1}_{\overline{B_m}} \qquad (\xi_m \underset{m\to\infty}{\nearrow} \xi)$

$\Rightarrow E\xi \geq E\xi\mathbb{1}_{\overline{B_m}} \geq E\xi_m\mathbb{1}_{\overline{B_m}} \xrightarrow[m\to\infty]{} E\xi \qquad \Rightarrow E\xi\mathbb{1}_{B_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$\leq E(\xi; B_m) + m \cdot \underbrace{P(A_n)}_{\downarrow n\to\infty \ 0} \qquad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E(\xi; A_n) \leq \underbrace{E(\xi; B_m)}_{m\to\infty \to 0} \quad \forall m$

$\Rightarrow E(\xi, A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \xi = \xi^+ - \xi^-$

$$E(\xi; A) = E(\xi; \bigcup_{k=1}^{N} A_k) = E(\xi; \bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$P(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(A) < \infty$

$$\Rightarrow E(\xi; A) - \sum_{k=1}^{N} E(\xi; A_k) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

6 Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$: $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty$. Тогда $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$

Д-во: $E(\xi\eta) \overset{(5)}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} xy P(\xi \in dx, \eta \in dy) \overset{\text{нез}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} xy P(\xi\in dx)P(\eta \in dy) \overset{\text{ТФ}}{=} \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} xy P(\xi \in dx)) P(\eta\in dy) =$

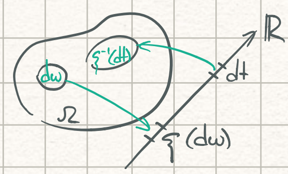
$= \int_{\mathbb{R}} y (\int_{\mathbb{R}} x P(\xi\in dx)) P(\eta \in dy) = \int_{\mathbb{R}} y P(\eta\in dy) \int_{\mathbb{R}} x P(\xi \in dx) = E\xi \cdot E\eta$

Зам МО по распр-ю

$\xi \longmapsto P_\xi(B) = P(\xi \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\qquad \int_{\mathbb{R}} g(t) P_\xi(dt)$

$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega) = [\xi(\omega) = t] = \int_B t P(\xi^{-1}(dt)) = \int_{\mathbb{R}} t P_\xi(dt)$

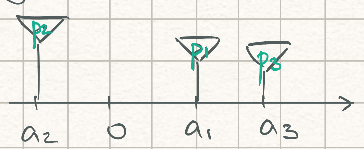
это не д-во и нормального не будет



$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} t P_\xi(dt)$

Зам о вычислении МО:

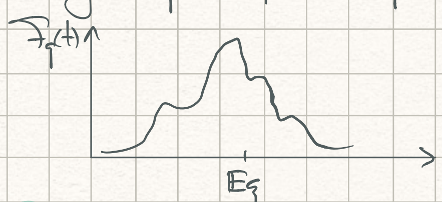
1 Пусть $\xi \in$ дискр. $\sum_k P(= a_k) = 1$ $\qquad E\xi = \sum_k a_k P(\xi = a_k)$, если $\sum |a_k| P(\xi = a_k) < \infty$



Вспоминаем про центр масс.

2 Пусть $\xi \in$ а.н.р. с $f_\xi(t)$ $\qquad E\xi = \int_{\mathbb{R}} t f_\xi(t) dt$, если $\int_{\mathbb{R}} |t| f_\xi(t) dt < \infty$

$P(\xi \in A) = \int_A f_\xi(t) dt$
$P(\xi \in dt) = f_\xi(t) dt$



3 $P(\xi \in A) = p_1 P(\xi_1 \in A) + p_2 P(\xi_2 \in A) + p_3 P(\xi_3 \in A)$ $\qquad p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_i \geq 0$

$E\xi = p_1 E\xi_1 + p_2 E\xi_2 + p_3 E\xi_3$

4 $Eg(\xi) = \int_\Omega g(\xi(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) P(\xi \in dt) = \begin{cases} \sum_k g(a_k) P(\xi = a_k), & \text{если } \xi \text{ - дискр и } \sum \text{ сх. абс.} \\ \int_{\mathbb{R}} g(t) f_\xi(t) dt, & \text{если } \xi \text{ - а.н. и } \int \text{ сх. абс.} \end{cases}$

5 $Eg(\xi, \eta) = \int_\Omega g(\xi(\omega), \eta(\omega)) P(d\omega) = \left| \begin{matrix} \xi(\omega) = x \\ \eta(\omega) = y \end{matrix} \right| = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) P(\xi \in dx, \eta \in dy)$

6 $P(\xi \in [x, y]) = F_\xi(y) - F_\xi(x)$ $\qquad P(\xi \in dt) = dF_\xi(t)$

$E\xi = \int_{\mathbb{R}} t P(\xi \in dt) = \int_{\mathbb{R}} t\, dF_\xi(t)$ — интеграл Лебега-Стилтьеса

просто запись красивая, а так не нужно

Теорема о свёртке:

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\xi(x-y) dF_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\eta(x-y) dF_\xi(y), \text{ если } \xi \perp\!\!\!\perp \eta$$

Д-во: $F_{\xi+\eta}(x) = P(\xi + \eta < x) = E \mathbb{1}\{\xi + \eta < x\} = Eg(\xi, \eta)$, где $g(u,v) = \mathbb{1}\{u + v < x\}$

$= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}\{u+v<x\} P(\xi \in du) P(\eta \in dv) = \iint_{u+v<x} 1 \cdot P(\xi \in du) P(\eta \in dv) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi \in du) \int_{-\infty}^{x-u} P(\eta \in dv) =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi \in du) \int_{-\infty}^{x-u} \mathbb{1}\{v < x-u\} P(\eta \in dv) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi \in du) \cdot E\mathbb{1}\{\eta < x - \xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi \in du) P(\eta < x - \xi) =$

$= \int_{\mathbb{R}} P(\xi \in du) F_\eta(x-u) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(x-u) dF_\xi(u)$

Ex вычисления МО:

1. $\xi \in B_p$

ξ	0	1
P	1-p	p

$E\xi = 0(1-p) + 1\cdot p = p$

2. $\xi \in B_{n,p}$ $\quad \xi \in \{0,1,2,\dots,n\}$ $\quad E\xi = \sum_{k=1}^{n} k\cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$

$= np \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m p^m (1-p)^{(n-1)-m}}_{=(p+(1-p))^{n-1}} = np$

Или: $S_n = X_1 + \dots + X_n$ $\quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{if успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad \xi \overset{d}{=} S_n$ ← распр-я совп.

$\Rightarrow E\xi = ES_n = E(X_1 + \dots + X_n) = EX_1 + \dots + EX_n = p + \dots + p = np$

3.

ξ	2	4	8	…
P	1/2	1/4	1/8	

$P(\xi = 2^k) = \frac{1}{2^k}$ $\quad E\xi \not\exists \; \sum_k 1 = \infty$

4. $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ $\quad \eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1}$ $\quad \xi = \sigma\eta + a$

$E\xi = E(\sigma\eta + a) = E(\sigma\eta) + E(a) = \sigma E\eta + a$

$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0$ т.к. ф-я нечёт и $\exists \int$ $\quad$ Проверим на сх-ть: $\int_{\mathbb{R}} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\int_0^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2/2} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = 2$

3.2. Моменты высшего порядка

Опр k-й момент: $E\xi^k = \int_{\mathbb{R}} t^k P(\xi \in dt) = \begin{cases} \sum_m a_m^k P(\xi = a_m), & \text{если } \xi \text{ - дискр. и } \sum \text{ сх. абс.} \\ \int_{\mathbb{R}} t^k f_\xi(t) dt, & \text{если } \xi \text{ - а.н. и } \int \text{ сх. абс} \end{cases}$

Опр k-й центральный момент: $E(\xi - E\xi)^k$

Опр Дисперсия: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

Опр $\sigma = \sqrt{D\xi}$ — стандартное отклонение

Теорема о существовании моментов:
Пусть $0 < m < k$ и $E|\xi|^k < \infty$. Тогда $E|\xi|^m < \infty$

Д-во: $|x|^m \le |x|^k + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |\xi|^m \le |\xi|^k + 1 \Rightarrow E|\xi|^m \le E|\xi|^k + 1 < \infty$

3.3. Моментные неравенства

Теорема нер-во Маркова
Пусть $E|\xi| < \infty$. Тогда $\forall x > 0 \quad P(|\xi| \ge x) \le \frac{E|\xi|}{x}$

Д-во: $E|\xi| = \underbrace{E(|\xi|, 1\{|\xi| \ge x\})}_{\ge E(x\cdot 1\{|\xi|\ge x\})} + \underbrace{E(|\xi|, 1\{|\xi| < x\})}_{\ge 0} \ge E(x\cdot 1\{|\xi| \ge x\}) = x\cdot P(|\xi| \ge x)$

Следствие:

Если $\xi \geq 0$ и $E\xi = 0$, то $\xi = 0$ почти всюду наверное $\Leftrightarrow P(\xi = 0) = 1$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \quad P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon} = 0 \leftrightarrow P(\xi > 0) = 0 \leftrightarrow P(\xi = 0) = 1$

Теорема обобщённое нер-во Чебышёва

Пусть $g(x) \geq 0$ и неубывает. $Eg(\xi) < \infty$. Тогда $P(|\xi| \geq x) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(x)}$

Д-во: $\{\xi \geq x\} \subseteq \{g(\xi) \geq g(x)\}$

$P(\xi \geq x) \leq P(g(\xi) \geq g(x)) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(x)}$

Зам экспоненциальное нер-во Чебышёва:

$P(\xi \geq x) \leq e^{-\Lambda(x)}$, где $\Lambda(x) = \sup\limits_{\lambda \geq 0} \{\lambda x - \ln Ee^{\lambda\xi}\}$ ← не спросят

Теорема

Пусть $\xi \perp \eta$, g, f – борел., тогда $g(\xi) \perp f(\eta)$

Д-во: $P(g(\xi) \in B_1, f(\eta) \in B_2) = P(\xi \in g^{-1}(B_1), \eta \in f^{-1}(B_2)) \overset{\text{нез}}{=} P(\xi \in g^{-1}(B_1)) P(\eta \in f^{-1}(B_2)) =$
$= P(g(\xi) \in B_1) P(f(\eta) \in B_2) \qquad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Утв $E(g(\xi)f(\eta)) = Eg(\xi)Ef(\eta)$

Теорема нер-во Коши-Буняковского:

Пусть $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$, тогда $|E\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2}\sqrt{E\eta^2}$.
Рав-во достигается только если $\exists a \in \mathbb{R} \quad \xi = a\eta$

Д-во: $x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq p(x) = E(x\xi + \eta)^2 = E[x^2\xi^2 + 2x\xi\eta + \eta^2] = x^2E\xi^2 + 2xE\xi\eta + E\eta^2 =$

$D = 4(E\xi\eta)^2 - 4E\xi^2E\eta^2 \leq 0$

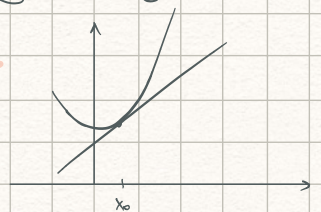
Если $D = 0 \Rightarrow \exists x_0 : p(x_0) = 0 \Rightarrow E(x_0\xi + \eta)^2 = 0 \Rightarrow x_0\xi + \eta = 0$ п.н.

В другую сторону к $D = 0$ подставить просто и ура!

Теорема нер-во Йенсена:

Пусть $g(x)$ выпуклая (вниз), $E|g(\xi)| < \infty$, $E|\xi| < \infty$. Тогда $Eg\xi \geq g(E\xi)$

Д-во:



$\forall x_0 \quad \exists c : \; g(x) \geq g(x_0) + c(x - x_0) \quad \forall x$

$x_0 = E\xi \quad \exists c : \; g(x) \geq g(E\xi) + c(x - E\xi) \quad \forall x$

$\Rightarrow g(\xi) \geq g(E\xi) + c(\xi - E\xi)$

$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$

3.4. Дисперсия

Опр Дисперсия $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$, если $E\xi^2 < \infty$

Опр Стандартное отклонение: $\sigma = \sqrt{D\xi}$

Св-ва дисперсии:

1. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

   Д-во: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$

2. $D\xi \geqslant 0$ $\quad \Rightarrow E\xi^2 \geqslant (E\xi)^2$

3. $D\xi = 0 \iff \xi \in I_c$

   Д-во: $\Leftarrow$ очевидно

   $\Rightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Rightarrow (\xi - E\xi)^2 = 0$ п.н. $\Rightarrow \xi = E\xi$ п.н. $\Rightarrow \xi \in I_{E\xi}$

4. $D(c\xi) = c^2 D\xi$

   $D(\xi + c) = D\xi$

5. Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$. Тогда $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$

   Д-во: $D(\xi \pm \eta) = E((\xi - E\xi) \pm (\eta - E\eta))^2 = E(\xi - E\xi)^2 \pm 2E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] + E(\eta - E\eta)^2 = D\xi + D\eta \pm$
   $\pm 2E\underbrace{(\xi - E\xi)}_{=0}E\underbrace{(\eta - E\eta)}_{=0} = D\xi + D\eta$

6. $D\xi = \min\limits_{a \in \mathbb{R}} E(\xi - a)^2$

   Д-во: $E(\xi - a)^2 = E(\xi \pm E\xi - a)^2 = \overset{D\xi}{\overset{=}{E(\xi - E\xi)^2}} + \overset{=0}{2E(\xi - E\xi)}\overset{c}{(E\xi - a)} + \overset{\geqslant 0}{(E\xi - a)^2} \geqslant D\xi$

7. Классическое нер-во Чебышёва:

   Пусть $E\xi^2 < \infty$. Тогда $\forall x > 0$ $\quad P(|\xi - E\xi| \geqslant x) \leqslant \dfrac{D\xi}{x^2}$

   Д-во: $P(|\xi - E\xi| \geqslant x) = P((\xi - E\xi)^2 \geqslant x^2) \underset{\text{нер-во Маркова}}{\leqslant} \dfrac{E(\xi - E\xi)^2}{x^2} = \dfrac{D\xi}{x^2}$

Ex вычисления $D\xi$:

1. $\xi \in B_p$: $\quad E\xi = p$

$\xi - E\xi$	$-p$	$1-p$
P	$1-p$	p

   $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$

$(\xi - E\xi)^2$	p^2	$(1-p)^2$
P	$1-p$	p

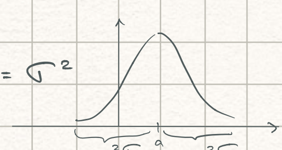
   А можно считать нормально: $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

2. $\xi \in B_{n,p}$ $\quad \xi \overset{d}{=} S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\quad X_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$ – независ.

   $D\xi = DS_n = D(X_1 + \ldots + X_n) = DX_1 + \ldots + DX_n = np(1-p)$

3. $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ $\quad E\xi = a$ $\quad \eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1}$, $\quad \xi = \sigma\eta + a \Rightarrow D\xi = \sigma^2 D\eta = \sigma^2$

   $D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = E\eta^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \underbrace{\dfrac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$



3.5. Коэффициент корреляции

Опр Ковариация $Cov(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)]$, если $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$

Св-ва:

1. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow Cov(\xi, \eta) = 0$

2. Обратного нет.

   Д-во: $\xi \in N_{0,1}$, $\eta = \xi^2$. $Cov(\xi, \eta) = E(\xi(\xi^2 - \overset{!}{E\xi^2})) = E\xi^3 - E\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\xi}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$ из неч, но надо ещё д-ть абс сх-ть

3. $Cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$

4. $Cov(\xi, \xi) = D\xi \geq 0$
   $Cov(\xi, \eta) = Cov(\eta, \xi)$
   $Cov(a\xi_1 + b\xi_2, \eta) = a\,Cov(\xi_1, \eta) + b\,Cov(\xi_2, \eta)$

5. $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i + \sum\limits_{i \neq j} Cov(\xi_i, \xi_j)$

   Д-во: $\xi_k' = \xi_k - E\xi_k \quad D\xi_k = D\xi_k'$
   $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1' + \ldots + \xi_n') = E(\xi_1' + \ldots + \xi_n')^2 = E[\sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k')^2 + \sum\limits_{i \neq j} \xi_i' \xi_j'] =$
   $= \sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k' + \sum\limits_{i \neq j} Cov(\xi_i', \xi_j') \overset{6}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k + \sum\limits_{i \neq j} Cov(\xi_i, \xi_j)$

6. $Cov(a + \xi, \eta) = Cov(\xi, \eta)$

Опр Коэф-т корреляции: $\rho(\xi, \eta) = \frac{Cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi\, D\eta}}$

cos угла ~ ρ
скал. пр-е - Cov

Св-ва:

1. $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$

   Д-во: $\rho(\xi, \eta) = \frac{E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)}{\sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2}} \leq 1$ по нер-ву Коши-Бун.

2. $|\rho(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$ п.н.

   Д-во: $\Rightarrow \xi - E\xi = c(\eta - E\eta) \qquad \xi = a\eta + b$ п.н.

3. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow \rho(\xi, \eta) = 0$, но $\rho(\xi, \eta) = 0 \not\Rightarrow \xi \perp\!\!\!\perp \eta$

3.6. Матрица ковариации

$\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \qquad \Xi = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{1m} \\ \xi_{n1} & \xi_{nm} \end{bmatrix}$

Опр МО в $\mathbb{R}^n$: $E\bar{\xi} = (E\xi_1, \ldots, E\xi_n)^T$, $E|\xi_i| < \infty \ \forall i$

$E\Xi = \begin{pmatrix} E\xi_{11} & \cdots & E\xi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E\xi_{n1} & \cdots & E\xi_{nm} \end{pmatrix}$, $E|\xi_{ij}| < \infty \ \forall i,j$

Св-ва: 1 $E(A\bar\xi + B\bar\eta) = AE\bar\xi + BE\bar\eta$

2 Ξ, H: $\forall i,j,k,l$ $\xi_{ij} \perp \eta_{kl}$. Тогда: $E(\Xi \cdot H) = E\Xi \cdot EH$

Опр Матрица ковариации:

$$Cov(\bar\xi) = E[(\bar\xi - E\bar\xi)(\bar\xi - E\bar\xi)^T] = E\begin{bmatrix} (\xi_1 - E\xi_1)^2 & \cdots & (\xi_1 - E\xi_1)(\xi_n - E\xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\xi_n - E\xi_n)(\xi_1 - E\xi_1) & \cdots & (\xi_n - E\xi_n)^2 \end{bmatrix}$$

$$[Cov(\bar\xi)]_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j)$$

Св-ва: 1 $Cov(\bar\xi + \bar a) = Cov(\bar\xi)$

2 $Cov(A\bar\xi) = ACov(\bar\xi)A^T$

3 $\bar\xi \perp \bar\eta \Rightarrow Cov(\bar\xi + \bar\eta) = Cov(\bar\xi) + Cov(\bar\eta)$

Д-во н/з D

3.7. Многомерное нормальное распределение

Опр Многомерное нормальное распр-е: $\bar\xi \in N_{\bar a, \Sigma}$, $\bar a \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \Sigma^T > 0$, если:

$$f_{\bar\xi}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{(\bar x - \bar a)^T \Sigma^{-1}(\bar x - \bar a)}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Теорема о линейном преобразовании для $N_{\bar a, \Sigma}$

Пусть $\bar\xi \in N_{\bar 0, I}$, $A: \det A \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$. $\bar\eta = A\bar\xi + b$. Тогда: $\eta \in N_{b, AA^T}$

Д-во: $P(\bar\eta \in B) = P(A\bar\xi + b \in B) = P(\bar\xi \in A^{-1}(B - \bar b)) = \int\limits_{A^{-1}(B-\bar b)} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x^T x}{2}} d\bar x =$

$= \Big/ \bar x = A^{-1}(\bar u - \bar b) \Big/ = \int\limits_B (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\bar u - \bar b)^T (AA^T)^{-1}(\bar u - \bar b)} |\det A^{-1}| d\bar u$ $\qquad |\det A^{-1}| = \frac{1}{\sqrt{\det A^T A}}$

Следствие:

Пусть $\bar\xi \in N_{\bar a, \Sigma}$. $Cov(\xi_i, \xi_j) = 0$ $\forall i \neq j \iff \xi_i \perp \xi_j$ $\forall i,j$

Д-во: $\Rightarrow$ $Cov(\xi_i, \xi_j) = 0 \Rightarrow \Sigma = diag(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2) \Rightarrow f_{\bar\xi}(\bar x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{x_1}{2\sigma_1^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{x_n}{2\sigma_n^2}} =$

$= f_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$

Следствие:

Если $\bar\xi \in N_{\bar 0, I} \Rightarrow \bar\eta = Q\bar\xi \in N_{\bar 0, I}$, если $Q^T = Q^{-1}$

Контрпример.

1 $\bar\xi = (\eta, \eta)$, $\eta \in N_{0,1}$

↳ вырожд. $\Rightarrow$ не многомерн. норм. вект.

2 $\bar\xi = (\eta, \nu\eta)$, $\eta \in N_{0,1} \perp$

ν	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

— тут невыр., но не многомерн.

3.8. Копулы (Copula - Couple)

Опр Пусть $u_1,\dots,u_n$ имеют $U_{0,1}$. **Копулой** наз. $C(u_1,\dots,u_n) = F_{\bar U}(\bar u) = P(U_1<u_1,\dots,U_n<u_n)$, $\bar u\in[0,1]^n$

Теорема Sklar:
$\forall$ с.в. ξ $\exists$ копула $C(u_1,\dots,u_n)$: $F_{\xi}(\bar x) = F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = C(F_{\xi_1}(x_1),\dots,F_{\xi_n}(x_n))$
Если все $F_{\xi_i}(\cdot)\in C(\mathbb{R})$, то C - единственна

Д-во: (в непр. случае) Пусть $F_{\xi_i}\in C(\mathbb{R})$
$F_{\xi}(\bar x) = P(\xi_1<x_1,\dots,\xi_n<x_n) = P(F_{\xi_1}(\xi_1)\le F(x_1),\dots,F_{\xi_n}(\xi_n)\le F(x_n)) =$
$= C(F_{\xi_1}(x_1),\dots,F_{\xi_n}(x_n))$, где $C(u_1,\dots,u_n) = P(\underbrace{F_{\xi_1}(\xi_1)}_{\in U_{0,1}}<u_1,\dots,\underbrace{F_{\xi_n}(\xi_n)}_{\in U_{0,1}}<u_n)$
$\mathrm{Range}\,F_{\xi_i} = [0,1] \longrightarrow$ единств-ть

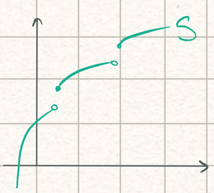
Ex копул ($n=2$)

1. $U_1 \perp\!\!\!\perp U_2$, $U_1,U_2\in U_{0,1}$ $\quad C(u,v) = P(U_1<u,U_2<v) = P(U_1<u)P(U_2<v) = uv$, $u,v\in[0,1]$
2. $U_1 = U_2$, $U_1,U_2\in U_{0,1}$ $\quad C(u,v) = P(U_1<u,U_2<v) = P(U_1<u,U_1<v) = \min\{u,v\}$
3. $U_1 = 1-U_2$, $U_1\in U_{0,1}$ $\quad C(u,v) = P(1-U_2<u,U_2<v) = \max\{u+v-1,0\}$

Теорема неравенство Fréchet-Hoeffding
$\forall u,v\in[0,1]$ $\quad \max\{u+v-1,0\}\le C(u,v)\le\min\{u,v\}$ $\quad \forall C$ - copula

Д-во: $C(u,v) = P(U_1<u,U_2<v) \le P(U_1<u) = u$ $\quad u\in[0,1]$
$C(u,v) \le P(U_2<v) = v$ $\quad v\in[0,1]$ $\quad \Rightarrow C(u,v)\le\min(u,v)$
$C(u,v) = P(U_1<u,U_2<v) = 1-P(\{U_1\ge u\}\cup\{U_2\ge v\}) \ge 1-P(U_1\ge u)-P(U_2\ge v) =$
$= 1-(1-u)-(1-v) = u+v-1$

Упр Записать и д-ть это нер-во в случае $n>2$

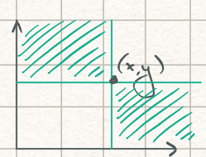


Опр Мн-во $S\subseteq\mathbb{R}^2$ наз. **неубывающим**, если
$\forall (x,y),(u,v)\in S$ вып-но $(x\le u)\Rightarrow(y\le v)$

Опр Мн-во $S\subseteq\mathbb{R}^2$ наз. **носителем** с.в. ξ, если $\xi\in S$ п.н., т.е. $P(\xi\in S)=1$

Теорема о правой границе в нер-ве F-H:
$F_{\xi,\eta}(x,y) = \min\{F_\xi(x),F_\eta(y)\} \Leftrightarrow \exists$ носитель (ξ,η) неубывающий

Д-во: Лемма:
S - неуб. $\Leftrightarrow \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\forall(u,v)\in S$
вып-но: либо $(u\le x)\Rightarrow(v\le y)$
либо $(v\ge y)\Rightarrow(u\ge x)$



$F_\xi(x) = P(\xi<x) = P(\xi<x,\eta<y) + P(\xi<x,\eta\ge y) = F_{\xi,\eta}(x,y) + P(\xi<x,\eta\ge y)$
$F_\eta(y) = \dots = F_{\xi,\eta}(x,y) + P(\eta<y,\xi\ge x)$

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \min\{F_\xi(x),F_\eta(y)\}$$

$\Leftrightarrow$ либо $P(\xi<x,\eta\ge y)=0$ либо $P(\eta<y,\xi\ge x)=0$ $\Leftrightarrow$ либо $\{(u,v)\,|\,u<x,\ v\ge y\}\notin S$ либо $\{(u,v)\,|\,v<y,\ u\ge x\}\notin S$ $\Leftrightarrow$ неуб.

Следствие:
Если ξ, η имеют непрерывные ф-ии распр-я, тогда $\xi = f(\eta)$, f - строго возрастает $\Leftrightarrow C_{\xi,\eta}(u,v) = \min\{u,v\}$

всё ради него

Perfect Dependance (comonotonic)

Упр Сформулир-ть и д-ть утв-е для левой границы нер-ва F-H

Теорема об инвариантности копулы при строго возр. преобр.
Пусть $C(u,v)$ для вектора (ξ,η) с непр. ф-ями распр-я, ф-ии $f(x), g(x)$ строго возр. Тогда $C_{f(\xi),g(\eta)}(u,v) = C_{\xi,\eta}(u,v)$

Д-во: $C_{f(\xi),g(\eta)}(F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y)) = P(f(\xi) < x,\ g(\eta) < y) = P(\xi < f^{\leftarrow}(x),\ \eta < g^{\leftarrow}(y)) =$
$= C_{\xi,\eta}(F_\xi(f^{\leftarrow}(x)), F_\eta(g^{\leftarrow}(y))) \overset{*}{=} C_{\xi,\eta}(F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y))$
$*$: $F_{f(\xi)}(x) = P(f(\xi) < x) = P(\xi < f^{\leftarrow}(x)) = F_\xi(f^{\leftarrow}(x))$
$Range(F_{f(\xi)}(x)) = [0,1]$, $Range(F_{f(\eta)}(y)) = [0,1]$, т.к. $F_{f(\xi)}(x), F_{g(\eta)}(y) \in C(\mathbb{R})$ непр-ть из строгого возраст-я
$\Rightarrow C_{f,g}(u,v) = C_{\xi,\eta}(u,v) \quad \forall u,v \in [0,1]$

Упр Сформулир-ть и д-ть ту же теорему для $f\nearrow, g\searrow$ и $f\searrow, g\searrow$

$*$ **Опр** коэф-т корреляции Спирмена — Spearman's rho
$\rho_S(\xi,\eta) = \rho(F_\xi(\xi), F_\eta(\eta))$

$*$ это опр-я для непр. случая только, общее дальше

$*$ **Опр** коэф-т корреляции Кендалла — Kendall's tau
$\rho_\tau(\xi,\eta) = 2P((\xi-\hat\xi)(\eta-\hat\eta) > 0) - 1$, где $(\hat\xi,\hat\eta)$ - независ. копия вектора (ξ,η)

Опр коэф-т корреляции Спирмена
$\rho_S(\xi,\eta) = 3[P((\xi_1-\xi_2)(\eta_1-\eta_3)>0) - P((\xi_1-\xi_2)(\eta_1-\eta_3)<0)]$, где $(\xi_1,\eta_1), (\xi_2,\eta_2), (\xi_3,\eta_3)$ - нез. с.в. с распр-м как у (ξ,η)

Для непр. F_ξ, F_η: $\rho_S(\xi,\eta) = 12\iint (C(u,v) - uv)\,du\,dv = \rho(F_\xi(\xi), F_\eta(\eta))$

E: $U_{0,1}$; D: $U_{0,1}$; EUV после ф-лы и. по частям

Опр коэф-т корреляции Кендалла
$\rho_\tau(\xi,\eta) = P((\xi-\hat\xi)(\eta-\hat\eta)>0) - P((\xi-\hat\xi)(\eta-\hat\eta)<0)$, где $(\hat\xi,\hat\eta)$ - независ. копия вектора (ξ,η)

Св-ва: Пусть F_ξ, F_η непр-ны и строго возрастают
1. ρ_S зависит только от копулы (ξ,η) — т.к. $C_{F_\xi(\xi),F_\eta(\eta)} = C_{\xi,\eta}$; для дискр. не работает
2. ρ_S не меняется при возраст. преобр-ях
3. $\rho_S = 1 \Rightarrow F_\xi(\xi) = F_\eta(\eta) \Rightarrow C_{\xi,\eta}(u,v) = \min\{u,v\} \Leftrightarrow \xi = f(\eta),\ f\nearrow$

Утв Эти св-ва верны и для ρ_τ

Ex **Опр** Копула с.в. $\xi \in N_{\bar a,\Sigma}$ наз. гауссовской

больше примеров в лекции за 11.13

Опр Коэф-ты экстремальной зависимости:

$\lambda_u(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to 1-0} P(\xi \geq q_\xi(\alpha) \mid \eta \geq q_\eta(\alpha))$ upper

$\lambda_l(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to +0} P(\xi < q_\xi(\alpha) \mid \eta < q_\eta(\alpha))$ lower

Лемма о коэф-тах экстр. завис-ти:

Пусть F_ξ, F_η - непр. Тогда $\lambda_u(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to 1-0} \frac{1-2\alpha + C(\alpha,\alpha)}{1-\alpha}$ $\lambda_l(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to +0} \frac{C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$

Д-во: $\lambda_l(\xi,\eta) = \lim\limits_{\alpha\to+0} \frac{P(\xi<q_\xi(\alpha), \eta<q_\eta(\alpha))}{P(\eta<q_\eta(\alpha))} = \lim\limits_{\alpha\to+0} \frac{P(F_\xi(\xi)< F_\xi(q_\xi(\alpha)), F_\eta(\eta)<F_\eta(q_\eta(\alpha)))}{P(F_\eta(\eta)<F_\eta(q_\eta(\alpha)))} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to+0} \frac{C(\alpha,\alpha)}{\alpha}$ Для upper ч/з обратное событие

Ex 1 Гауссовская копула $\rho = 0{,}9$. Будет ли завис-ть в экстр. значениях?

$\lambda_u = \lambda_l = 0$ Не будет!

2 Gumball $\lambda_u > 0, \lambda_l = 0$

3 Clayton $\lambda_l > 0, \lambda_u = 0$

$E(\xi|\eta)$:

Ex 1 $\xi \in N_{\eta,1}$ $\eta \in U_{0,1}$ $E(\xi|\eta) = \eta$ какая-то двойная рандомизация

2 Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - н.о.р. $\eta \in \{1,2,3,\dots\}$ $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\eta} \xi_k$ нез-ть не нужна

$E(\xi|\eta) = E(\sum\limits_{k=1}^{\eta}\xi_k|\eta) = \eta \cdot E\xi_1$

3 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ - погода или t° $E(\xi_5|\xi_1,\dots,\xi_4)$ - тут непонятки

... позавчера вчера сегодня

3.9. Условное математическое ожидание

$\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$ - вер. пр-во

$\mathcal{G}$ - σ-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Опр Пусть ξ - с.в. УМО с.в. ξ отн. σ-алг. $\mathcal{G}$ наз. такая $\hat{\xi}$, что:

1. $\hat{\xi} \sim \mathcal{G}$ в $\mathcal{G}$ содержится вся инф-ция, нужная, чтобы опр-ть $\hat{\xi}$
2. $\forall B \in \mathcal{G}$ $E(\xi \cdot 1\!\!1_B) = E(\hat{\xi}\cdot 1\!\!1_B)$

Обозначаем $\hat{\xi} = E(\xi|\mathcal{G})$ ← неконструктивное опр-е

Теорема о $\exists!$ УМО:

Если $E|\xi| < \infty$, то $\exists!$ $E(\xi|\mathcal{G})$ с точностью до мн-ва нулевой вер-ти.

Св-ва УМО:

Пусть $E|\xi|<\infty$, $E|\eta|<\infty$, $\mathcal{G}$ - σ-алгебра:

1. Если $\xi = a$ п.н., то $E(\xi|\mathcal{G}) = a$ п.н.

Д-во: $a \sim \mathcal{G}$ $\forall B\in\mathcal{G}$ $E(\xi\cdot 1\!\!1_B) = E(a\cdot 1\!\!1_B) \Rightarrow a = E(\xi|\mathcal{G})$ подходит под опр-е $\Rightarrow$ по т. единств-но

2 Если $\xi \sim G$, то $E(\xi|G) = \xi$ п.н.

Д-во: $\xi \sim G$, $\forall B \in G$ $E(\xi \cdot \mathbb{1}_B) = E(\xi \cdot \mathbb{1}_B)$

3 Если $\xi \le \eta$ п.н., то $E(\xi|G) \le E(\eta|G)$ п.н.

Д-во: $\hat{\xi} = E(\xi|G)$ $\hat{\eta} = E(\eta|G)$. $B = \{\hat{\xi} > \hat{\eta}\} \in G$

$0 \ge E((\hat{\eta}-\hat{\xi})\mathbb{1}_B) = E((\eta-\xi)\mathbb{1}_B) \ge 0 \Rightarrow E((\hat{\eta}-\hat{\xi})\mathbb{1}_B) = 0 \Rightarrow (\hat{\eta}-\hat{\xi})\mathbb{1}_B = 0$ п.н. $\Rightarrow P(B) = 0$

4 $E(a\xi + b\eta|G) = aE(\xi|G) + bE(\eta|G)$

Д-во: упр 1: $E(a\xi|G) = aE(\xi|G)$

упр 2: $E(\xi+\eta|G) = E(\xi|G) + E(\eta|G)$

5 $|E(\xi|G)| \le E(|\xi||G)$ п.н.

Д-во: $\xi \le |\xi|$, $-\xi \le |\xi|$ $\Rightarrow$ $E(\xi|G) \le E(|\xi||G)$ п.н., $-E(\xi|G) \le E(|\xi||G)$ п.н.

6 $EE(\xi|G) = E\xi$ аналог ФПВ

Д-во: Возьмём $B = \Omega$ $E\hat{\xi} = E(\hat{\xi}\cdot\mathbb{1}_\Omega) = E(\xi\cdot\mathbb{1}_\Omega) = E\xi$

7 Если $\xi \perp G$ (т.е. $\forall B \in G$ $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P(B, \xi \in A) = P(B)\cdot P(\xi \in A)$), то $E(\xi|G) = E\xi$ п.н.

Д-во: $E\xi \sim G$, $\forall B \in G$ $E(\xi\cdot\mathbb{1}_B) = E\xi\cdot E\mathbb{1}_B = E(\mathbb{1}_B\cdot E\xi)$

8 Пусть $G_1 \subseteq G_2$ $E[E(\xi|G_1)|G_2] = E(\xi|G_1)$

$E[E(\xi|G_2)|G_1] = E(\xi|G_1)$

Д-во: 1) т.к. $E(\xi|G_1) \sim G_2$

2) $E(\xi|G_1) \sim G_1$ $\forall B \in G_1$ $E(E(\xi|G_1)\mathbb{1}_B) = E(\xi\,\mathbb{1}_B) = /B \in G_2/ = E(E(\xi|G_2)\mathbb{1}_B)$

9 Пусть $\eta \sim G$: $E|\xi\eta| < \infty$ $E(\xi\eta|G) = \eta E(\xi|G)$ п.н.

Д-во: $\hat{\xi} = E(\xi|G)$ $\hat{\xi} \sim G$ $\eta\hat{\xi} \sim G$. Пусть $B_0 \in G$, $\eta = \mathbb{1}_{B_0}$

$\forall B \in G$ $E(\xi\eta\,\mathbb{1}_B) = E(\xi\,\mathbb{1}_{B_0 \cap B}) = E(\hat{\xi}\,\mathbb{1}_{B_0\cap B}) = E(\hat{\xi}\eta\,\mathbb{1}_B)$

Пусть $\eta = \sum_{k=1}^{k} c_k \mathbb{1}_{B_k}$, тогда $E(\xi\eta|G) = \eta E(\xi|G)$ п.н.

$\forall \eta$ $\exists \eta_k \xrightarrow{\text{пн}} \eta$, η_k – простые $|\eta_k| \le |\eta_{k+1}| \le \ldots \le |\eta|$

$E(\xi\eta|G) \xleftarrow{L_2} E(\xi\eta_k|G) = \eta_k E(\xi|G) \xrightarrow{\text{пн}} \eta E(\xi|G)$

тут были слова про т. Лебега

$E|E(\xi\eta|G) - E(\xi\eta_k|G)| = E|E(\xi(\eta-\eta_k)|G)| \le EE(|\xi|\cdot|\eta-\eta_k||G) = E|\xi|\cdot\underbrace{|\eta-\eta_k|}_{\to 0} \longrightarrow 0$ $\quad \le |\xi||2\eta|$

$\varepsilon_k \xrightarrow{\text{пн}} \varepsilon_1$ $\varepsilon_k \xrightarrow{L_2} \varepsilon_2$ $\Rightarrow \varepsilon_k \xrightarrow{P} \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_{n_k} \xrightarrow{\text{пн}} \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ п.н.

Опр $L_2 = \{\xi : \Omega \to \mathbb{R} : E\xi^2 < \infty\}$ – Гильбертово пр-во со скал. пр-ем $\langle \xi, \eta \rangle = E\xi\eta$

$L_2^G = \{\xi : \Omega \to \mathbb{R} \mid \xi \sim G,\ E\xi^2 < \infty\}$ – замкн. подпр-во

Теорема УМО — ортопроекции

← кто-то так опр-т УМО

Пусть $E\xi^2<\infty$. Тогда $\forall \eta\in L_2^G \quad \langle \eta, \xi - E(\xi|G)\rangle = 0$

$\min\limits_{\eta\in L_2^G}\|\xi-\eta\|_2 = \|\xi - E(\xi|G)\|_2$

Д-во: $\forall\eta\in L_2^G \quad E(\eta(\xi-E(\xi|G))) = E(\eta\xi) - E(\eta E(\xi|G)) = E(\xi\eta) - EE(\eta\xi|G) = 0$

$\hat\xi = E(\xi|G)$

$\|\eta-\xi\|_2^2 = \|\eta-\hat\xi+\hat\xi-\xi\|_2^2 = \|\eta-\hat\xi\|^2 + 2\underbrace{\langle \overbrace{\eta-\hat\xi}^{\in L_2^G}, \overbrace{\hat\xi-\xi}^{E(\xi|G)-\xi}\rangle}_{=0} + \|\hat\xi-\xi\|^2 = \|\eta-\hat\xi\|^2 + \|\hat\xi-\xi\|^2 \geqslant \|\hat\xi-\xi\|^2$

$\sigma(\eta) = \{\{\omega: \eta(\omega)\in A\}, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ - σ-алг., порожд. с.в. η

$\sigma(\bar\eta) = \{\{\omega: \bar\eta(\omega)\in A\}, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$

$E(\xi|\eta) = E(\xi|\sigma(\eta)) \qquad E(\xi|\bar\eta) = E(\xi|\sigma(\bar\eta))$

$P(\xi\in(0,\infty)|A) = \dfrac{P(\{\xi\in(0,\infty)\}\cap A)}{P(A)>0} \qquad P(\xi\in B|A) = \dfrac{P(\{\xi\in B\}\cap A)}{P(A)}$

$\boxed{E(\xi|A) = \dfrac{E(\xi\,\mathbb{1}_A)}{P(A)}}$, $P(A)>0$

Лемма УМО для а.н.р.

Пусть (ξ,η) имеет а.н.р.: $E|\xi|<\infty$. Тогда: $E(\xi|\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\cdot\dfrac{f_{\xi,\eta}(x,\eta)}{f_\eta(\eta)}\,dx$ ← ф-ла Байеса

← апостериорная плотность

Д-во: $\hat\xi(\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\cdot\dfrac{f_{\xi,\eta}(x,\eta)}{f_\eta(\eta)}\,dx \sim \sigma(\eta)$

Надо:

$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad E(\xi\cdot\mathbb{1}_{\{\eta\in A\}}) = E(\hat\xi(\eta)\cdot\mathbb{1}_{\{\eta\in A\}})$

$E(\hat\xi(\eta)\cdot\mathbb{1}_{\{\eta\in A\}}) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x\cdot\mathbb{1}_{\{y\in A\}}\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{y\in\mathbb{R}}\mathbb{1}_{\{y\in A\}}\int\limits_{x\in\mathbb{R}} x\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy =$

$= \int\limits_{y\in\mathbb{R}}\mathbb{1}_{\{y\in A\}} f_\eta(y)\int\limits_{x\in\mathbb{R}} x\cdot\dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}\,dx\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{\{y\in A\}} f_\eta(y)\cdot\hat\xi(y)\,dy = E(\hat\xi(\eta)\cdot\mathbb{1}_{\{\eta\in A\}})$

Лемма УМО для дискр.:

Пусть $E|\xi|<\infty$, η имеет дискр. распр-е. Тогда: $E(\xi|\eta) = E(\xi|\eta=a_k)$, если $\eta=a_k$, $k=1,2,\ldots$

$E(\xi|\eta=a_k) = \dfrac{E(\xi;\eta=a_k)}{P(\eta=a_k)} = \dfrac{E(\xi\cdot\mathbb{1}_{\{\eta=a_k\}})}{P(\eta=a_k)}$

Д-во: $\hat\xi(a_k) \overset{def}{=} E(\xi|\eta=a_k) \qquad \hat\xi(\eta)\sim\sigma(\eta)$

$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad E(\xi\cdot\mathbb{1}_{\{\eta\in A\}}) = \sum\limits_{k:a_k\in A} E(\xi\cdot\mathbb{1}_{\{\eta=a_k\}}) = \sum\limits_{k:a_k\in A} E(\xi|\eta=a_k)\cdot P(\eta=a_k) = \sum\limits_{k:a_k\in A}\hat\xi(a_k)\cdot P(\eta=a_k) =$

$= E(\hat\xi(\eta)\cdot\mathbb{1}_{\{\eta\in A\}})$

Теорема УМО для $N_{b,\Sigma}$

Пусть $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1})\in N_{b,\Sigma}$, $\Sigma=\Sigma^T>0$. Тогда

$E(\xi_{n+1}|\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum\limits_{k=1}^n c_k\cdot\xi_k$ п.н., где c_k - ед. реш. СЛУ $E\xi_{n+1}\cdot\xi_i = \sum\limits_{k=1}^n c_k E\xi_k\cdot\xi_i$, $i=1,\ldots,n$

Д-во: $\bar\xi_n = (\xi_1,\ldots,\xi_n)^T \quad \Sigma_n = Cov(\bar\xi_n) \quad E\xi_{n+1}\cdot\bar\xi_n = \Sigma_n\cdot\bar c$

$\zeta_{n+1} = (\xi_1,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1}-\sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k)^T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \\ -c_1 & \ldots & -c_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\\ \xi_{n+1}\end{pmatrix} \qquad \zeta_{n+1}\in N_{**}$

$E\xi_i(\xi_{n+1}-\sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k) = E\xi_i\xi_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^n c_k E\xi_i\xi_k = 0 \qquad i=1,\ldots,n$

$\Rightarrow \xi_{n+1}-\sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k \perp \xi_1,\ldots,\xi_n$

$E(\xi_{n+1}|\xi_1,\ldots,\xi_n) = E(\xi_{n+1}-\sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k|\xi_1,\ldots,\xi_n) + E(\sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k|\xi_1,\ldots,\xi_n) = \underbrace{E(\xi_{n+1}-\sum c_k\xi_k)}_{=0} + \sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k =$

$= \sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k$ п.н.

4. Сходимость с.в. и их распределений. Предельные теоремы.

4.1. Сходимость

Опр Сходимость почти наверное:
$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} \xi$, если $P(\{\omega: \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}) = 1$

Опр Сходимость по вероятности:
$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Опр Сходимость по распределению / слабая сходимость:
$\xi_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \xi$, если $\forall x_0$ — точки непр-ти $F_\xi(x)$ вып-но: $F_{\xi_n}(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x_0)$

просто сх-ть по распр-ю, нам неважно, как связ. ξ_n и ξ

Зам Если $F_\xi(x)$ — непр., тогда $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ т.е. равномерная сход-ть

Опр Сходимость в среднеквадратич. смысле:
$\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, если $E\xi_n^2 < \infty$, $E\xi^2 < \infty$ и $E|\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Теорема Закон Больших Чисел Чебышёва:
Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — попарно независ. и од. распр, $E\xi_1^2 < \infty$. Тогда $\frac{S_n}{n} = \frac{\sum \xi_k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} E\xi_1$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\frac{S_n}{n} - E\xi_1| \geq \varepsilon) = P(|\frac{S_n}{n} - E(\frac{S_n}{n})| \geq \varepsilon) \overset{\text{нер-во Чебышёва}}{\leq} \frac{D\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $S_n \simeq nE\xi_1$

Теорема Бореля – Кантелли:
Пусть $\{A_n\}_{n\geq1} \subseteq \mathcal{F}$. $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Тогда
1. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, то $P(A) = 0$
2. Если $\{A_n\}$ независ. в совок. и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_k) = \infty \Rightarrow P(A) = 1$

Д-во: 1. $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$

2. $\overline{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$, $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$ — возр. посл-ть $\Rightarrow$ можно показать, что
$P(\overline{A}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty} P(\bigcap\limits_{k=n}^{N} \overline{A_k}) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty} P(\overline{A_n}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_N}) \leq$
$\leq |1 - x \leq e^{-x}| \leq \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty} e^{-\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k)} = 0 \Rightarrow P(A) = 1$

Лемма критерий сходимости п.н.:
$\xi_n \xrightarrow{\text{пн}} \xi \Leftrightarrow \sup\limits_{k\geq n} |\xi_k - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

Д-во: $A = \{\omega: \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n\geq N} \{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \frac{1}{m}\}$
$\overline{A} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\geq N} \{|\xi_n - \xi| > \frac{1}{m}\}$. $P(\overline{A}) = 0 \Leftrightarrow \forall m \geq 1 \quad P(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\geq N} \{|\xi_n - \xi| > \frac{1}{m}\}) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall m \geq 1 \quad \lim\limits_{N\to\infty} P(\bigcup\limits_{n\geq N} \{|\xi_n - \xi| > \frac{1}{m}\}) = 0 \Leftrightarrow \forall m \geq 1 \quad \lim\limits_{N\to\infty} P(\sup\limits_{n\geq N} |\xi_n - \xi| > \frac{1}{m}) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sup\limits_{n\geq N} |\xi_n - \xi| \xrightarrow[N\to\infty]{P} 0$

Теорема $\xrightarrow{\text{п.н.}}$ vs $\xrightarrow{P}$
1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \exists n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty: \quad \xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

Д-во: 1 $\forall \varepsilon>0 \quad P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon) \leq P(\sup\limits_{k\geq n}|\xi_k-\xi|\geq\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

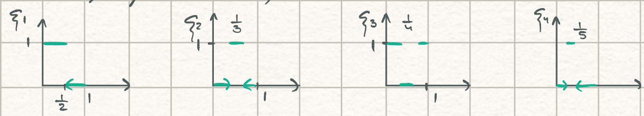
2 Д-м сначала: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)<\infty \quad \forall\varepsilon>0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{пн}} \xi$:

$\forall\varepsilon>0 \quad P(\sup\limits_{n\geq N}|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon) = P(\bigcup\limits_{n\geq N}\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}) \leq \sum\limits_{n\geq N} P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. $\forall k\geq 1 \quad \exists n_k \quad P(|\xi_{n_k}-\xi|\geq \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \forall k_0: \frac{1}{k_0}<\varepsilon \quad \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k}-\xi|\geq\varepsilon) \leq \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k}-\xi|\geq\frac{1}{k}) \leq \sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[k_0\to\infty]{} 0$

3 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])$ $P=\lambda$



т.е. ступенька постоянно бегает и уменьшается

$P(\xi_n\geq\frac{1}{2}) = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall\varepsilon<1 \quad P(\xi_n\geq\varepsilon) = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

$\{\omega: \sup\limits_{n\geq N}\xi_n(\omega)>\frac{1}{2}\} = [0,1]$ когда-нибудь найдётся любое знач-е с.в. из $[0,1]$

Теорема $\xrightarrow{P}$ vs $\Rightarrow$

1 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \quad \Rightarrow \quad \xi_n \Rightarrow \xi$

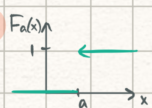
2 $\xi_n \Rightarrow a \quad \Rightarrow \quad \xi_n \xrightarrow{P} a$

3 $\xi_n \Rightarrow \xi \quad \not\Rightarrow \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi$

Д-во: 1 $F_{\xi_n}(x) = P(\xi_n<x) \overset{\forall\varepsilon>0}{=} \underbrace{P(\xi_n<x, |\xi_n-\xi|<\varepsilon)}_{\leq P(\xi<x+\varepsilon)} + \underbrace{P(\xi_n<x, |\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)}_{\leq P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \leq P(\xi<x+\varepsilon)$

$F_{\xi_n}(x) = P(\xi_n<x) \geq P(\xi_n<x, |\xi_n-\xi|<\varepsilon) \geq P(\xi<x-\varepsilon, |\xi_n-\xi|<\varepsilon) = P(\xi<x-\varepsilon) -$
$- P(\xi<x-\varepsilon, |\xi_n-\xi|\geq\varepsilon) \leq P(\xi<x-\varepsilon) - \underbrace{P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)}_{\to 0} \leq P(\xi<x-\varepsilon)$

$\Rightarrow F_\xi(x-\varepsilon) \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \xi_n \Rightarrow \xi$

2 

$\forall x<a \quad F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\forall x>a \quad F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
$\Rightarrow \quad P(\xi_n<a-\varepsilon), \ P(\xi_n\geq a+\varepsilon) \quad \forall\varepsilon>0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$

3 $\xi_n = \begin{cases} \xi, & n=2k \\ \xi, & n=2k+1 \end{cases} \qquad \xi\in N_{0,1} \quad \Rightarrow \quad \xi_n(\omega) = \{-\xi(\omega), \xi(\omega), -\xi(\omega), \dots\}$ сход. только если $\xi(\omega)=0$

это д-ли расх-ть п.н.

$\forall\varepsilon>0 \quad P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon) = \begin{cases} P(0\geq\varepsilon), & n=2k \\ P(|2\xi|\geq\varepsilon), & n=2k+1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 2\Phi(\frac{\varepsilon}{2})>0 & n=2k+1 \end{cases} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow \xi_n \overset{P}{\not\longrightarrow} \xi$

$\xi_n \Rightarrow \xi \quad \Leftarrow \quad F_{\xi_n}(x) \longrightarrow F_\xi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \Leftarrow \quad F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Теорема $\xrightarrow{L_2}$ vs $\xrightarrow{\text{пн}}$ + $\xrightarrow{P}$

1 $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi \quad \Rightarrow \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi$

2 $\xi_n \xrightarrow{\text{пн}} \xi \quad \not\Rightarrow \quad \xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$

Д-во: 1 $\forall\varepsilon>0 \quad P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon) \overset{\text{НЧ}}{\leq} \frac{E|\xi_n-\xi|^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2 Пусть 

$\Omega=[0,1] \quad \mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1]) \quad P=\lambda$

$\forall\omega \quad \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{пн}} 0$

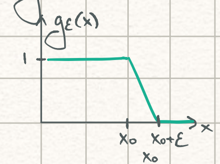
$E\xi_n^2 = n^2\cdot\frac{1}{n} + 0\cdot\frac{n-1}{n} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \Rightarrow$ нет $\xrightarrow{L_2}$

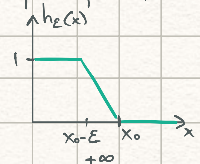
4.2. Свойства сходимостей

Теорема критерий слабой сходимости

$\xi_n \Rightarrow \xi \iff \forall g \in CB(\mathbb{R})$ (непр. огр.) вып-но $Eg(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} Eg(\xi)$

Д-во: $\Leftarrow$ Пусть x_0 — точка непр. $F_\xi(x)$, $\varepsilon>0$. Возьмём $g_\varepsilon(x)$, $h_\varepsilon(x)$:





Тогда $g_\varepsilon(x), h_\varepsilon(x) \in CB(\mathbb{R})$

Дурацко-техническое :(

$F_{\xi_n}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} g(x)dF_{\xi_n}(x) \le \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)dF_\xi(x) \le F_\xi(x_0+\varepsilon)$

$F_{\xi_n}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} h(x)dF_{\xi_n}(x) \ge \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dF_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)dF_\xi(x) \ge F_\xi(x_0-\varepsilon)$

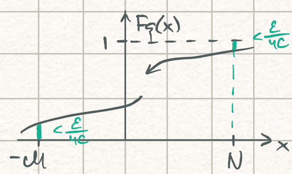
$\Rightarrow F_\xi(x_0) \xleftarrow[\varepsilon\to 0]{} F_\xi(x_0-\varepsilon) \le \varliminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_0) \le \varlimsup_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_0) \le F_\xi(x_0+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F_\xi(x_0)$

$\Rightarrow$ Мн-во точек разрыва ф-ии $F_\xi(\cdot)$ не более, чем счётно (счётное объед-е конечных мн-в)

Пусть $g(x) \in CB(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists C>0: |g(x)| \le C$. Пусть $\varepsilon>0$

Возьмём $N, M>0$: $F_\xi(-M) < \frac{\varepsilon}{4C}$, $1-F_\xi(N) < \frac{\varepsilon}{4C}$

N, M - точки непр-ти $F_\xi(\cdot)$



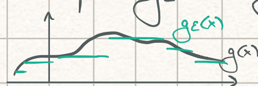
Тогда для дост. больших $n \ge 1$: $F_{\xi_n}(-M) < \frac{\varepsilon}{2C}$

$1-F_{\xi_n}(N) < \frac{\varepsilon}{2C}$

$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_{\xi_n}(x) - \int_{-M}^{N} g(x)dF_{\xi_n}(x)\right| \le C\cdot P(\xi_n \notin [-M,N)) < \varepsilon$

$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_\xi(x) - \int_{-M}^{N} g(x)dF_\xi(x)\right| \le C\cdot P(\xi \notin [-M,N)) < \varepsilon$

Для $g(\cdot)$ опр-м $g_\varepsilon(\cdot)$ - кус. пост. ф-я такая, что $\sup_{x\in[-M,N]} |g_\varepsilon(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и скачки g_ε в точках непр-ти $F_\xi(\cdot)$



Тогда для дост. больших $n \ge 1$: $\left|\int_{-M}^{N} g_\varepsilon(x)dF_{\xi_n}(x) - \int_{-M}^{N} g(x)dF_{\xi_n}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} P(\xi_n \in [-M,N]) \le \varepsilon$

$\left|\int_{-M}^{N} g_\varepsilon(x)dF_\xi(x) - \int_{-M}^{N} g(x)dF_\xi(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} P(\xi \in [-M,N]) \le \varepsilon$

$\int_{-M}^{N} g_\varepsilon(x)dF_{\xi_n}(x) - \int_{-M}^{N} g_\varepsilon(x)dF_\xi(x) = \sum_{k=1}^{K} g(y_k)(F_{\xi_n}(y_k) - F_{\xi_n}(y_{k-1})) - \sum_{k=1}^{K} g(y_k)(F_\xi(y_k) - F_\xi(y_{k-1})) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ в силу $\xi_n \Rightarrow \xi$

Ex Почему не берём разрывные: $g(x) = \begin{cases} 1, & x<x_0 \\ 0, & x \ge x_0 \end{cases}$ $Eg(\xi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_{\xi_n}(x) = \int_{(-\infty,x_0)} 1\cdot dF_{\xi_n}(x) = P(\xi_n < x_0) = F_{\xi_n}(x_0)$

$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ — ерунда

Неогр. не берём, т.к. там расходиться будет

Лемма сходимость для непр. ф-й:

Пусть $g(x) \in C(\mathbb{R})$ $\xi_n \overset{\text{пн}}{\underset{P}{\overrightarrow{\Rightarrow}}} \xi$. Тогда $g(\xi_n) \overset{\text{пн}}{\underset{P}{\overrightarrow{\Rightarrow}}} g(\xi)$

Д-во: $\xrightarrow{\text{пн}}$: $\{\omega: \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\} \subseteq \{\omega: g(\xi_n(\omega)) \to g(\xi(\omega))\} \Rightarrow 1 = P(\{\dots\}) \le P(\{\dots\}) \Rightarrow g(\xi_n) \xrightarrow{\text{пн}} g(\xi)$

$\xrightarrow{P}$: Пусть $g(\xi_n) \not\xrightarrow{P} g(\xi) \Rightarrow \exists \varepsilon>0$ $P(|g(\xi_n)-g(\xi)| \ge \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

$\exists n_k, \delta>0$ $P(|g(\xi_{n_k})-g(\xi)| \ge \varepsilon) > \delta$ ← противоречие

но! $\xi_{n_k} \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \exists k_m \to \infty: \xi_{n_{k_m}} \xrightarrow{\text{пн}} \xi \Rightarrow g(\xi_{n_{k_m}}) \xrightarrow{\text{п.н.}} g(\xi)$ $\Rightarrow g(\xi_n) \xrightarrow{P} g(\xi)$

$\Rightarrow$: $\forall h \in CB$ $Eh(\xi_n) \to Eh(\xi)$, а надо $Eh(g(\xi_n)) \to Eh(g(\xi))$

$h \in CB(\mathbb{R})$ $g \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow h(g(\cdot)) \in CB(\mathbb{R})$ и ура!

Лемма сходимость и арифм. опер.

Пусть $\xi_n \overset{\text{пн}}{\underset{P}{\rightarrow}} \xi$, $\eta_n \overset{\text{пн}}{\underset{P}{\rightarrow}} \eta \Rightarrow \xi_n \pm \eta_n \overset{\text{пн}}{\underset{P}{\rightarrow}} \xi \pm \eta$, $\xi_n \cdot \eta_n \overset{\text{пн}}{\underset{P}{\rightarrow}} \xi\cdot\eta$

Для слабой не можем говорить о сумме с.в. (или ещё чём-то)

Д-во: + $\xrightarrow{\text{пн}}$ $A=\{\omega: \xi_n(\omega)\to\xi(\omega)\}$ $B\{\omega: \eta_n(\omega)\to\eta(\omega)\}$ $P(A\cap B)=1-P(\bar A\cup\bar B)=1$

$\xrightarrow{P}$ $\forall\varepsilon>0$ $P(|\xi_n+\eta_n-(\xi+\eta)|\geq\varepsilon)\leq P(|\xi_n-\xi|+|\eta_n-\eta|\geq\varepsilon)\leq$

$\leq P(\{|\xi_n-\xi|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|\eta_n-\eta|\geq\frac{\varepsilon}{2}\})\leq P(|\xi_n-\xi|\geq\frac{\varepsilon}{2})+P(|\eta_n-\eta|\geq\frac{\varepsilon}{2})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Теорема Слуцкого:

Пусть $\xi_n\xrightarrow{P}a$, $\eta_n\Rightarrow\eta$. Тогда $\xi_n+\eta_n\Rightarrow a+\eta$, $\xi_n\cdot\eta_n\Rightarrow a\eta$

Д-во: + Можно считать, что $a=0$ (иначе возьмём $\tilde\eta_n=\eta_n-a$, $\tilde\eta=\eta-a$)

Пусть x_0 – т. непр-ти $F_\eta(x)$. $\forall\varepsilon>0$:

$$F_{\xi_n+\eta_n}(x_0)=P(\xi_n+\eta_n<x_0)=\underbrace{P(\xi_n+\eta_n<x_0,\ |\xi_n|<\varepsilon)}_{\leq P(\eta_n<x_0+\varepsilon,\ |\xi_n|<\varepsilon)}+\underbrace{P(\xi_n+\eta_n<x_0,\ |\xi_n|\geq\varepsilon)}_{\leq P(|\xi_n|\geq\varepsilon)}\leq$$

$$\leq P(\eta_n<x_0+\varepsilon)-\underbrace{P(\eta_n<x_0+\varepsilon,\ |\xi_n|\geq\varepsilon)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}+\underbrace{P(|\xi_n|\geq\varepsilon)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$$

$\exists\varepsilon_k\to0$: $x_0+\varepsilon_k$ точка непр. $F_\eta(x)$ $\forall k$

$\Rightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty}F_{\xi_n+\eta_n}(x_0)\leq P(\eta<x_0+\varepsilon_k)=F_\eta(x_0+\varepsilon_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}F_\eta(x_0)$ ← это была оценка сверху

Оценка снизу: $F_{\xi_n+\eta_n}(x_0)=P(\xi_n+\eta_n<x_0)\geq P(\xi_n+\eta_n<x_0,\ |\xi_n|<\varepsilon)$ дальше как и сверху

Самая слабая метрика близости в каком-то смысле самая важная

Опр Посл-ть $\{\xi_n\}_{n\geq1}$ – **равномерно интегрируема**, если $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{n\geq1}E(|\xi_n|;|\xi_n|\geq N)=0$

Зам 1. Если $E\sup|\xi_n|<\infty$, то ξ_n – РИ — из 2го д-ть можно

2. Если $\forall n$ $|\xi_n|\leq\eta$ п.н., $E\eta<\infty$, то ξ_n – РИ

Д-во: $E(|\xi_n|;|\xi_n|\geq N)\leq E(\eta;|\xi_n|\geq N)\leq E(\eta;\eta\geq N)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$

3. Если ξ_n – РИ, то $E|\xi_n|<\infty$ $\forall n$

Д-во: $E(|\xi_n|)=E(|\xi_n|;|\xi_n|<N)+E(|\xi_n|;|\xi_n|\geq N)<N+\varepsilon<\infty$

Теорема критерий сх-ти МО:

Пусть $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$, $E|\xi_n|<\infty$ $\forall n\geq1$. Тогда след. утв-я эквив-ны:

1. ξ_n – РИ
2. $E|\xi_n-\xi|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и $E|\xi|<\infty$
3. $E|\xi_n|\to E|\xi|$, $E|\xi|<\infty$

Д-во: $1\Rightarrow2$: Если $\xi_n\xrightarrow{P}\xi\Rightarrow\exists n_k\to\infty$ $\xi_{n_k}\xrightarrow{\text{пн}}\xi$ — тут мб ошибка где-то :c

$\Rightarrow$ по лемме Фату: $E|\xi|\leq\varliminf\limits_{n\to\infty}E|\xi_n|\leq\sup\limits_{n\geq1}E|\xi_n|\leq\sup\limits_{n\geq1}E(|\xi_n|,|\xi_n|\geq N)+N<\infty$

$\forall\varepsilon>0$ $\forall N>0$: $E|\xi_n-\xi|=E(|\xi_n-\xi|;|\xi_n-\xi|<\varepsilon)+E(|\xi_n-\xi|;|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)\leq$

$\leq\varepsilon\cdot P(|\xi_n-\xi|<\varepsilon)+E(|\xi_n|;|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)+E(|\xi|;|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)\leq$

$$\leq\varepsilon+\underbrace{E(|\xi_n|;|\xi_n|\geq N)}_{\leq\varepsilon\text{ выбором }N\ \forall n}+\underbrace{N\cdot P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)}_{\leq\varepsilon\text{ выбором }n\text{ при фикс. }N}+\underbrace{E(|\xi|;|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)}_{<\varepsilon\text{ выбором }n}\leq4\varepsilon$$

$2\Rightarrow3$: $|E|\xi_n|-E|\xi||\leq E|\xi_n-\xi|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$3\Rightarrow1$: Достаточно д-ть, что $\exists K>0$: $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{n\geq K}E(|\xi_n|;|\xi_n|\geq N)=0$, т.к. $E|\xi_n|<\infty$ $\forall n$ — тоже просто техническое

$E(|\xi_n|;|\xi_n|\geq N)=E|\xi_n|-E(|\xi_n|;|\xi_n|<N)$

$\forall\varepsilon>0$: $E(|\xi_n|;|\xi_n|<N)\geq E(|\xi_n|;|\xi_n|<N;|\xi_n-\xi|<\varepsilon)\geq E(|\xi|-\varepsilon;|\xi_n|<N;|\xi_n-\xi|<\varepsilon)\geq$

$\geq E(|\xi|;|\xi|\leq N-\varepsilon;|\xi_n-\xi|<\varepsilon)-\varepsilon=E|\xi|-E(|\xi|;|\xi|>N-\varepsilon)-E(|\xi|;|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)-\varepsilon$

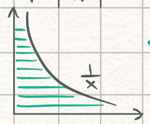
$\Rightarrow E(|\xi_n|; |\xi_n| \geq N) \leq \underbrace{E|\xi_n| - E|\xi|}_{<\varepsilon \text{ выбором } n} + \underbrace{E(|\xi|; |\xi| > N-\varepsilon)}_{<\varepsilon \text{ выбором } N} + \underbrace{E(|\xi|; |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)}_{<\varepsilon \text{ выбором } n} + \varepsilon \leq 4\varepsilon$

Контрпример

1

ξ_n	n	0
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$\xi_n \Rightarrow 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} 0$ $\quad E\xi_n = 1 \not\to 0 \Rightarrow$ не РИ



← тут интеграл расх. (это то, как можно интуитивно понять)

2

η_n	$-n$	0	n
P	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$

$\eta_n \xrightarrow{P} 0$ $\quad E\eta_n = 0$ $\quad$ но! $E|\eta_n| = 1 \not\to 0 \Rightarrow \eta_n$ не РИ

Теорема Лебега:
Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $|\xi_n| \leq \eta$ $\forall n$, $E\eta < \infty$. Тогда $E\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} E\xi$

Д-во: ξ_n – РИ $\Rightarrow E|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow |E\xi_n - E\xi| \leq E|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Зам в теореме Лебега достаточно $\xi_n \Rightarrow \xi$ — но там новое д-во строить

4.3. Характеристические функции

$\xi = \xi_1 + i\xi_2$ $\quad \eta = \eta_1 + i\eta_2$ $\quad \xi \in \mathbb{C}, \eta \in \mathbb{C}$ $\quad$ Умеем: $\xi \pm \eta$ $\quad \xi \cdot \eta$ $\quad \xi / \eta$ $\quad |\xi| \leq |\eta|$
$e^{i\eta} = \cos\eta + i\sin\eta$

Опр $E\xi = E\xi_1 + iE\xi_2$

Св-ва:
1. $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$
2. $|E\xi| \leq E|\xi|$
3. $(\xi_1, \xi_2) \perp\!\!\!\perp (\eta_1, \eta_2) \Rightarrow E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$

Опр Характеристической функцией наз. $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi)$ — просто мат. аппарат

Зам Хар. ф-я существует всегда! $|\varphi_\xi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leq E|e^{it\xi}| = E1 = 1$

Зам
$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \begin{cases} \sum e^{ita_n} P(\xi = a_n), & \text{если } \xi \sim \text{дискр.} \\ \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_\xi(x)\,dx, & \text{если } \xi \sim \text{а.н.р.} \end{cases}$$
— преобр-е Фурье $f_\xi(t) \Rightarrow$ его св-ва все

Св-ва:
1. $\varphi_\xi(0) = 1$, $\quad |\varphi_\xi(t)| \leq 1$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $\varphi_{a\xi+b}(t) = Ee^{it(a\xi+b)} = Ee^{iat\xi} \cdot e^{itb} = \varphi_\xi(at) \cdot e^{itb}$
3. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Rightarrow \varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi} \cdot e^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$
4. Если $E|\xi|^k < \infty$, то $\varphi_\xi(t)$ непр. дифф-ма k раз, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \cdot E\xi^k$

Д-во: $k=1$: $\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF(x)$ $\quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} ix \cdot e^{itx}\,dF(x)\right| \leq \int |ixe^{itx}|\,dF(x) = \int 1 \cdot |x| \cdot 1\,dF(x) = E|\xi| < \infty$
интеграл произв-х. нужна его равном. сх-ть

$\frac{d}{dt}\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx}\,dF(x)$, $\varphi'(0) = iE\xi$

$k-1 \to k$: $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx}\,dF(x)\right| \leq E|\xi|^k \Rightarrow \int$ из k-х произв-х сх. равном-но.

по предп. инд.: $\varphi^{(k-1)}(0) = i^{k-1} E\xi^{k-1} < \infty \Rightarrow \varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx}\,dF(x) \Rightarrow \varphi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$

Нужна ещё непр-ть:

$$|\varphi^{(k)}(t+h)-\varphi^{(k)}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(ix)^k e^{i(t+h)x}dF(x) - \int_{-\infty}^{+\infty}(ix)^k e^{itx}dF(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(ix)^k\cdot e^{itx}(e^{ihx}-1)dF(x)\right| \leq$$

$$\leq \int |x|^k|e^{ihx}-1|dF(x) = \mathbb{E}|\xi|^k|e^{ih\xi}-1| \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \text{ т.к. } |e^{ih\xi}-1| \xrightarrow[h\to 0]{\text{п.н.}} 0$$

Нужна мажоранта для т. Лебега: $|\xi^k||e^{ih\xi}-1| \leq 2\cdot|\xi|^k$, вот и непр-ть

5 Если $\xi \sim$ а.н.р., то $\varphi_\xi(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$ ← просто сх-ть, а тут сх-ть со скоростью

6 Если плотность $p_\xi(t)$ дифф-ма k раз и $p_\xi^{(k)}(t)$ интегрируема, то $|\varphi(t)| \leq \frac{C}{t^k}$

эскиз д-ва: $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}p(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{itx}}{it}\right)'_x p(x)dx = \underbrace{\frac{e^{itx}}{it}p(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0 \text{ для монот.}} - \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{itx}}{it}p'(x)dx = \frac{-1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p'(x)dx$

k раз по частям и вот

Ex 1 $\xi = a$: $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = e^{ita}$

2 $\xi\in\Pi_\lambda$: $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \sum_{k=0}^\infty e^{itk}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^\infty\frac{[e^{it}\lambda]^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

3 $\xi\in N_{a,\sigma^2}$: $\xi \overset{d}{=} \sigma\eta + a$ $\eta\in N_{0,1}$. $\varphi_\eta(t) = \mathbb{E}e^{it\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$ можно это считать, а можно хитрее

$$\frac{d}{dt}\varphi_\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}ixe^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}-ie^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-x^2/2})'dx = -ie^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}-te^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = -t\varphi_\eta(t)$$

Получили диффур. Решив, получим: $\varphi_\eta(t) = Ce^{-t^2/2}$, $C=1 \Rightarrow \varphi_\eta(t) = e^{-t^2/2} \Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

Теорема формула обращения:

Пусть $F_\xi(x)$ - ф.р. с.в. ξ, тогда $\forall x,y$ — точек непр-ти $F_\xi(\cdot)$ вып-но:

$$F_\xi(x)-F_\xi(y) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixt}-e^{-iyt}}{-it}\varphi_\xi(t)\cdot e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}dt$$

Зам 1 Если $\frac{\varphi_\xi(t)}{t}\in L_1(\mathbb{R})$ $F_\xi(x)-F_\xi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixt}-e^{-iyt}}{-it}\varphi_\xi(t)dt$

2 Хар. ф-я однозначно опр-т распр-е

Следствие устойчивость по суммированию:

1 Пусть $\xi\in\Pi_\lambda$, $\eta\in\Pi_\mu$, $\xi\perp\!\!\!\perp\eta \Rightarrow (\xi+\eta)\in\Pi_{\lambda+\mu}$

Д-во: $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_\eta(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}\cdot e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$

2 Пусть $\xi\in N_{a_1,\sigma_1^2}$, $\eta\in N_{a_2,\sigma_2^2}$, $\xi\perp\!\!\!\perp\eta$. Тогда $\xi+\eta\in N_{a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

3 $\xi\in B_{n,p}$, $\eta\in B_{m,p}$, $\xi\perp\!\!\!\perp\eta \Rightarrow \xi+\eta\in B_{n+m,p}$

4 $\xi\in\Gamma_{\lambda,\alpha}$, $\eta\in\Gamma_{\mu,\alpha}$, $\xi\perp\!\!\!\perp\eta \Rightarrow \xi+\eta\in\Gamma_{\lambda+\mu,\alpha}$

5 $\xi\in C_{0,1}$, $\eta\in C_{0,1}$, $\xi\perp\!\!\!\perp\eta \Rightarrow \xi+\eta\in C_{0,2}$

Д-во теоремы: Пусть ξ имеет плотность $p(x)$, $\varphi\in L_1(\mathbb{R})$. $p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt$

$$F(x)-F(y) = \int_y^x p(u)du = \int_y^x\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itu}\varphi(t)dtdu \overset{\text{инт-мо}}{=\!=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_y^x e^{-itu}du\,\varphi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{-it}\varphi(t)dt$$

Пусть $\eta_k = \sqrt{2}\sigma_k\cdot\eta$, где $\eta\in N_{0,1}$, $\xi\perp\!\!\!\perp\eta$, $\sigma_k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ это общий случай смотрим

$\xi+\eta\sim$ а.н.р., $\xi+\eta_k\sim$ а.н.р. $\varphi_{\xi+\eta_k}(t) = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_{\eta_k}(t) = \varphi_\xi(t)\cdot e^{-\sigma_k^2t^2}$

$|\varphi_\xi(t)|\leq 1 \Rightarrow \varphi_{\xi+\eta_k}(t)\in L_1(\mathbb{R})$

$$F_{\xi+\eta_k}(x)-F_{\xi+\eta_k}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-txu}-e^{-tyu}}{-it}\varphi_\xi(t)e^{-\sigma_k^2t^2}dt$$

$\xi+\eta_k = \xi+\sqrt{2}\sigma_k\eta \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi+\eta_k \xRightarrow[k\to\infty]{} \xi \Rightarrow \forall x_0$ - т. непр. $F_\xi(\cdot)$

$\Rightarrow F_{\xi+\eta_k}(x_0)\xrightarrow[k\to+\infty]{}F_\xi(x_0) \Rightarrow F_\xi(x)-F_\xi(y) = \lim_{\sigma_k\to 0}\dots$

Формула обращения в дискретном случае:

Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$ п.н. Тогда $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{itk} \cdot p_k$, где $p_k = P(\xi = k)$

Зам Возьмём $m \in \mathbb{Z}$: $e^{-itm}\varphi_\xi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{it(k-m)} p_k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itm}\varphi_\xi(t)\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-m)} p_k\,dt = 2\pi p_m, \text{ т.к. } \forall k \neq m \ \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-m)}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow p_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itm}\varphi_\xi(t)\,dt, \quad m \in \mathbb{Z}$$

кажется, это мы учимся p_m считать ч/з хар. ф-ии

Теорема о непрерывном соответствии:

$\xi_n \Rightarrow \xi \iff \varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_\xi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Д-во: $\Rightarrow$ $\varphi_{\xi_n}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_n} = \mathbb{E}\cos(t\xi_n) + i\mathbb{E}\sin(t\xi_n)$ $\qquad \cos(t\cdot *), \sin(t\cdot *) \in CB(\mathbb{R})$

$$\downarrow n\to\infty \qquad\qquad \downarrow n\to\infty$$

$$\mathbb{E}\cos(t\xi) + i\mathbb{E}\sin(t\xi) = \varphi_\xi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$ мерзость какая-то... ← можно найти у Прокопенко (11.27)

Теорема ЗБЧ Хинчина:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — н.о.р. и $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbb{E}\xi_1$ $\qquad$ т.е. достаточно 1го момента

Д-во: Пусть $a = \mathbb{E}\xi_1$. $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \mathbb{E}e^{it\frac{S_n}{n}} = \mathbb{E}e^{i\frac{t}{n}S_n} = \mathbb{E}e^{i\frac{t}{n}\xi_1} \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}e^{i\frac{t}{n}\xi_n} = \left(\mathbb{E}e^{i\frac{t}{n}\xi_1}\right)^n = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n =$

$= \left[\varphi_\xi(0) + \varphi'_\xi(0)\cdot\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = e^{n\ln\left(1 + i\frac{at}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)} =$

$= e^{n\left(i\frac{ta}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)} = e^{ita + o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{ita} \Rightarrow \frac{S_n}{n} \Rightarrow a \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$

Следствие: в усл-ях ЗБЧ Хинчина вып-но: $\frac{S_n}{n}$ — РИ и $\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\qquad$ ого, сх-ть в L_1

Д-во: $\mathbb{E}\frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = \frac{1}{n}\mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathbb{E}\xi_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} a \not\Rightarrow \frac{S_n}{n}$ — РИ $\qquad$ нужны модули!

$\frac{|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbb{E}|\xi_1|$ ← из ЗБЧ Х. $\qquad \mathbb{E}\frac{|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|}{n} = \mathbb{E}|\xi_1| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}|\xi_1|$

$\Rightarrow \frac{|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|}{n}$ — РИ $\Rightarrow \left|\frac{S_n}{n}\right| \leq \frac{|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|}{n}$ — тоже РИ

$$\leq \frac{n^2 C}{\varepsilon^2 n} = \frac{C}{n^2}$$

Теорема ЗБЧ Колмогорова:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — н.о.р.. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a \iff \exists \mathbb{E}\xi_1$ и $\mathbb{E}\xi_1 = a$

Д-во: $\Leftarrow$ и $\mathbb{E}\xi_1^4 < \infty$. ↙ конечное число может произойти $\qquad$ л. Б-К

$\forall \varepsilon > 0$: $A_n = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right\}$ $\qquad A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k$. Надо: $P(A) = 0 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

$\hat{\xi}_k = \xi_k - a$. $\mathbb{E}\hat{\xi}_k \overset{*}{=} 0$.

$P(A_n) = P(|S_n - an| \geq \varepsilon n) = P(|\hat{S}_n| \geq \varepsilon n) \leq \frac{\mathbb{E}\hat{S}_n^4}{\varepsilon^4 n^4}$

$\mathbb{E}(\hat{S}_n)^4 = \mathbb{E}\sum_{1\leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n} \hat{\xi}_{i_1}\cdot\hat{\xi}_{i_2}\cdot\hat{\xi}_{i_3}\cdot\hat{\xi}_{i_4} \overset{*}{=} \underbrace{C_4^2 \cdot C_n^2}_{3n(n-1)} \mathbb{E}\hat{\xi}_1^2\hat{\xi}_2^2 + n\mathbb{E}\hat{\xi}_1^4 \leq n^2 C$

$\Rightarrow \sum_n P(A_n) \leq \sum_n C\cdot\frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow P(A) = 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{пн}} a$

4.4. Центральная предельная теорема

Теорема ЦПТ:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – н.о.р., $0 < D\xi_1 < \infty$, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. Тогда $\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \eta \in N_{0,1}$

Д-во: $\hat{\xi}_k = \xi_k - E\xi_k \quad E\hat{\xi}_k = 0 \quad E\hat{\xi}_k^2 = D\hat{\xi}_k = D\xi_k$

$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{n}} = \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}$:

поэтому дисперсия впрямь удобная штука

$$\varphi_{\frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}}(t) = Ee^{it\frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}} = Ee^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\hat{S}_n} = \left(Ee^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\hat{\xi}_1}\right)^n = \left[\varphi_{\hat{\xi}_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left(1 + 0\cdot\frac{t}{\sqrt{n}} + (-1)D\xi_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n =$$
$$= e^{n\ln\left(1 - D\xi_1\cdot\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)} = e^{-D\xi_1\cdot\frac{t^2}{2} + o(1)} \longrightarrow e^{-D\xi_1\cdot\frac{t^2}{2}}$$ – хар. ф-я $N_{0,D\xi_1}$

Следствие:

В усл-ях ЦПТ: $\forall x < y \quad P\left(x < \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < y\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi_{0,1}(y) - \Phi_{0,1}(x)$

равномерно по $x<y$ → можно послед-ти подставлять

Ex Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – н.о.р. $E\xi_1 = 0.05$, $D\xi_1 = 64$.

Задача: найти $y_1(n), y_2(n)$: $P(y_1(n) < S_n < y_2(n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0{,}9973$

Имеем: $P(y_1(n) < S_n < y_2(n)) = P\left(\underbrace{\frac{y_1(n) - n(-0{,}05)}{8n}}_{a=} < \frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < \underbrace{\frac{y_2(n) + 0{,}05n}{8n}}_{=b}\right)$

$\downarrow n\to\infty$

$\int_a^b f_\eta(x)dx = \int_{-\infty}^b f_\eta(x)dx - \int_{-\infty}^a f_\eta(x)dx = F_\eta(b) - F_\eta(a) = \Phi_{0,1}(b) - \Phi_{0,1}(a) \overset{\text{надо}}{=} 0{,}9973$ т.е. надо взять $a = -3$, $b = 3$

$\Rightarrow y_2(n) = -0{,}05n + 24\sqrt{n} \Rightarrow P(-0{,}05n - 24\sqrt{n} < S_n < -0{,}05n + 24\sqrt{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0{,}9973$

Теорема Берри - Эссеена:

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – н.о.р. $D\xi_1 > 0$, $E|\xi_1|^3 < \infty$. Тогда $\exists C > 0$:

$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|P\left(\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} < t\right) - \Phi_{0,1}(t)\right| \leq C\cdot\frac{E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sqrt{n}} \qquad \forall n \geq 1$

Зам Скорость $\frac{1}{\sqrt{n}}$ неулучшаемая

Д-во:

ξ_1	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

$E\xi_1 = 0 \quad E\xi_1^2 = 1 \quad E|\xi_1|^3 = 1$

кажется, ф-ла Стирлинга

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right) = P(S_n = 0) = /n - \text{чёт}/ = C_n^{n/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\cancel{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left[\left(\frac{n/2}{\cancel{e}}\right)^n\cdot\left(2\pi\cdot\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{2}}\right)^n =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \quad \text{т.е. } P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1))$$

$\Rightarrow \sup_t\left|P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < t\right) - \Phi_{0,1}(t)\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot(1 + o(1))$

Зам $C \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}4$. Но есть ещё более точная оценка сверху.
$C \leq 0{,}4847$. А вообще мы можем брать $C = 1/2$

Зам Сходимости по вероятности в ЦПТ нет. $\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \not\xrightarrow{P} N_{0,1}$ в общем случае

Д-во: упр Нужен критерий Коши для $\xrightarrow{P}$

Пусть $E\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$

$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \not\xrightarrow{P} \eta \in N_{0,1} \Leftarrow \exists\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n, m \geq N: \ P\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S_m}{\sqrt{m}}\right| \geq \varepsilon\right) \geq \delta$

Можно взять $n = 4m$

Теорема об оценке точности в теореме Пуассона:

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н.о.р. $\in B_p$, $\eta \in \Pi_\lambda$, $\lambda = np$. Тогда $\sup\limits_{A \subseteq \mathbb{R}} |P(S_n \in A) - P(\eta \in A)| \le np^2$

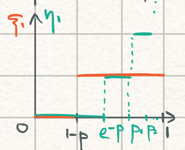
Д-во: Если S_n, η заданы на одном вер. пр-ве, то:

$$|P(S_n \in A) - P(\eta \in A)| = |P(S_n \in A, S_n = \eta) + P(S_n \in A, S_n \ne \eta) - P(\eta \in A, S_n = \eta)| =$$

$$= |P(S_n \in A, S_n \ne \eta) - P(\eta \in A, S_n \ne \eta)| \le P(S_n \ne \eta) - P(\eta \in A, S_n \ne \eta)$$

Пусть $\Omega = [0,1]$ $\mathcal{F} = B([0,1])$, $P = \lambda$, $u_1, \dots, u_n$ — н.о.р. точки из $[0,1]$

$p_i = P(\Pi_p \le i) = e^{-p}\left(1 + p + \dots + \frac{p^i}{i!}\right)$ $\quad \xi_k = \begin{cases} 0, & u_k \le 1-p \\ 1, & u_k > 1-p \end{cases}$ $\quad \eta_k = \begin{cases} 0, & u_k < e^{-p} = p_0 \\ i, & u_k \in [p_{i-1}, p_i) \end{cases}$ $\quad i = 1, 2, \dots$



$$P(\xi_1 \ne \eta_1) = [e^{-p} - (1-p)] + [1 - (e^{-p} + pe^{-p})] = p - pe^{-p} = p(1 - e^{-p}) \overset{\substack{1-p \le e^{-p} \\ 1-e^{-p} \le p}}{\le} p^2$$

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $\quad \xi_i \in B_p$ $\quad \eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$, $\quad \eta_i \in \Pi_p$

$\quad S_n \in B_{n,p}$ $\quad \eta \in \Pi_{np}$

$$|P(S_n \in A) - P(\eta \in A)| \le P(S_n \ne \eta) \overset{\text{хотя бы 1 разл.}}{\le} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{\xi_k \ne \eta_k\}\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k \ne \eta_k) \le np^2$$