Эргодические свойства систем поллинга

С.Г.Фосс, Н.И.Чернова

1. Введение

В статье рассматривается система поллинга, состоящая из K очередей (станций) и одного обслуживающего прибора, который передвигается между очередями по некоторому случайному маршруту. Вызовы поступают в систему в стационарном эргодическом входном потоке. Маршрут прибора обладает некоторым свойством регенерации: в последовательности перемещений прибора между станциями и времен переключения с одной станции на другую можно выделить независимые, одинаково распределенные участки, которые названы циклами.

За один визит прибора в k-ю очередь обслуживается $f_k(x)$ вызовов, где x — длина этой очереди в момент прихода прибора. Условия, которым должны удовлетворять стратегии обслуживания f_k, сформулированы в параграфе 2, аналогичные условия приведены в [1, 3].

В статье найдены необходимые и достаточные условия ограниченности по вероятности процесса длины очереди. При выполнении этих условий доказано существование стационарного режима и сходимость к нему процесса длины очереди для системы, стартующей из нулевого начального состояния.

Пусть λ — интенсивность входного потока, p_k — вероятность вызову из входного потока быть направленным на станцию k, σ — среднее время обслуживания вызова, $F_k = \lim_{x\to\infty} f_k(x)$, C_k — среднее количество посещений очереди k за цикл, W — среднее суммарное время переключения за цикл (точные определения приведены в параграфе 2). При выполнении условия

$$\lambda\,[\sigma + \max_k \frac{p_k}{F_k C_k} W] < 1 \qquad (1)$$

показывается каплинг-сходимость к стационарному режиму процесса длины очереди. Если, напротив, нагрузка в левой части условия (1) строго больше 1, то длина очереди в системе по вероятности неограниченно растет.

Условия эргодичности для систем поллинга начали изучаться сравнительно недавно, и практически все имеющиеся результаты касаются моделей с пуассоновским входным потоком и независимыми, одинаково распределенными временами обслуживания и переключения.

В работе [2], например, исследуется эргодичность системы поллинга с пуассоновскими независимыми входными потоками, маршрут прибора в которой управляется матрицей вероятностей перехода и стратегии обслуживания зависят от случайного аргумента.

В статье [3] рассматривалась система поллинга со стационарным эргодическим входным потоком, маршрут прибора в которой образует цепь Маркова. Существование стационарного режима показано при выполнении следующего условия:

$$\lambda\,[\sigma + \sum_{k=1}^{K} \frac{p_k}{F_k \pi_k}\,\omega] < 1,$$

где $(\pi_k)_{1\le k\le K}$ — стационарное распределение соответствующей цепи Маркова и ω — среднее время переключения с одной станции на другую в стационарном режиме. Приведенное выше условие является достаточным для эргодичности, но не является необходимым.

В предлагаемой работе показано также, что условие (1) является достаточным для ограниченности по вероятности процесса длины очереди в системе поллинга с существенно более общими условиями на стратегии обслуживания, чем в работе [3].

Работа состоит из шести параграфов и приложения. В параграфе 2 приведены основные определения и утверждения. В параграфе 3 для детерминированного варианта системы поллинга установлены некоторые свойства монотонности характеристик системы в зависимости от моментов поступления вызовов во входном потоке. Детерминированная система поллинга может рассматриваться как реализация описанной в параграфе 2 стохастической системы на одном элементарном исходе. Основным результатом параграфа 4 является необходимость и достаточность условия (1) для ограниченности времени опустошения системы и длины очереди. При его доказательстве используются методы, изложенные в работе [4]. Вычисление констант, фигурирующих в условии (1), проводится в параграфе 5. Параграф 6 посвящен существованию стационарного режима, в приложение вынесены некоторые вспомогательные утверждения, в частности, результат о "случайно-субаддитивных"последовательностях, обобщающий результаты [5].

2. Описание системы и основные утверждения

Рассматривается система поллинга, состоящая из конечного числа K очередей (станций) с неограниченным числом мест ожидания каждая, обслуживаемых одним прибором. Вызовы поступают в систему в общем входном потоке, прибор перемещается между очередями в соответствии с некоторым случайным маршрутом.

Входной поток. Вызов с номером n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ поступает в момент времени $T_n = T_{n-1} + \tau_n$, $T_0 = 0$, направляется в очередь с номером μ_n, σ_n — его время обслуживания. Обозначим $\xi_n = (\tau_n, \mu_n, \sigma_n), n \in \mathbf{Z}$. Последовательность $\{\xi_n\}$ предполагается стационарной и метрически транзитивной. Пусть $\mathbf{E}\tau_1 = \lambda^{-1} < \infty$ и не равно нулю; $\mathbf{E}\sigma_1 = \sigma < \infty$; $\mathbf{P}(\mu_1 = k) = p_k > 0,\ \sum_{k=1}^{K} p_k = 1$.

Маршрут прибора. Предполагается, что задана последовательность пар случайных величин $\{\nu_j, w_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, в которой случайная величина ν_j принимает значения $1, \ldots, K$ и равна номеру j-ой по счету посещаемой прибором очереди, а случайная величина $w_j \geq 0$ — время, которое обслуживающий прибор тратит на переключение (переход) из очереди ν_j в очередь ν_{j+1}. Будем предполагать, что последовательность $\{\nu_j, w_j\}$ может быть поделена на независимые, одинаково распределенные участки случайной длины (циклы): существует возрастающая последовательность целочисленных случайных величин $\{j_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, таких что случайные вектора

$$\eta_i = (l_i; \nu_{j_i+1}, \ldots, \nu_{j_{i+1}}; w_{j_i+1}, \ldots, w_{j_{i+1}}),\ i \in \mathbf{Z},$$

независимы и одинаково распределены. Здесь $l_i = j_{i+1} - j_i$ — количество посещаемых прибором в i-м цикле очередей. Пусть $\psi_i = w_{j_i+1} + \ldots + w_{j_{i+1}},\ \ W = \mathbf{E}\psi_1 < \infty$ — среднее суммарное время переключения за цикл, $C_k = \mathbf{E}(I(\nu_{j_1+1} = k) + \ldots + I(\nu_{j_2} = k)) < \infty$ — среднее количество посещений очереди k за "типичный"цикл, $k = 1, \ldots, K$. Предполагается также, что последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\xi_n\}$ независимы.

Заметим, что предположение о циклическом характере последовательности $\{\nu_j\}$ выполнено, например, если эта последовательность образует однородную цепь Маркова. Циклами могут служить участки траектории цепи между последовательными возвращениями на фиксированную станцию.

Будем называть маршрутом прибора в пустой системе маркированный точечный случайный процесс, точками которого являются моменты начала циклов, а расстояние между точками равно суммарному времени переключения в течение соответствующего цикла. Обозначим

Ψ — маркированный точечный процесс с точками Ψ_i и марками η_i, $i \in \mathbf{Z}$, для которого $\Psi_0 = 0$, $\Psi_i = \Psi_{i-1} + \psi_i$ — момент окончания цикла с номером i, если прибор перемещается в пустой системе.

Рассмотрим также стационарный вариант процесса Ψ, то есть стационарный точечный процесс с теми же марками и теми же расстояниями между точками, что и у Ψ. Присвоим номер 0 первой положительной точке этого процесса. Итак:

$\Psi^{(1)}$ — стационарный эргодический точечный процесс с марками η_i, $i \in \mathbf{Z}$, нумерация точек которого такова, что $\Psi_0^{(1)}$ — первая положительная точка этого процесса (перескок через $t = 0$);

$\Psi^{(-n)}, n \geq 0$ — стационарный эргодический точечный процесс, полученный из процесса $\Psi^{(1)}$ сдвигом каждой его точки влево на случайную величину $\sum_{j=-n}^{0} \sigma_j$ и перенумерованный так, что $\Psi_0^{(-n)}$ — его первая положительная точка.

Заметим, что распределения процессов $\Psi^{(-n)}$ $(n \geq -1)$ совпадают, и эти процессы не зависят от входного потока.

Будем говорить, что процесс Ψ $(\Psi^{(-n)})$ управляет системой поллинга, если в пустой системе прибор перемещается между станциями в соответствии с этим маршрутом, то есть i-й цикл заканчивается в момент времени Ψ_i $(\Psi_i^{(-n)})$. Если же в системе присутствуют вызовы, то каждый цикл удлиняется на суммарное время обслуживания вызовов, покинувших систему в этом цикле. В параграфе 4 с каждым из введенных выше маршрутов будет связана система поллинга, управляемая этим маршрутом.

Стратегии обслуживания. Если прибор, прибывая на станцию k, застает x вызовов в очереди, он обслуживает, не прерываясь, $f_k(x) \leq x$ вызовов в порядке $FIFO$, а затем переключается на следующую станцию своего маршрута. Обслуженные вызовы покидают систему. Функцию $f_k : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$ назовем стратегией обслуживания очереди k. Условия $f_k(1) = 1,\ f_k(x) \leq x$ для всех $x \in \mathbf{Z}^+$, $k = 1, \ldots, K$ в дальнейшем всегда предполагаются выполненными. Рассматриваются следующие три класса, которым могут принадлежать стратегии обслуживания:

$\widehat{A} = \{f$: существует $\lim_{x\to\infty} f(x) = F \leq \infty\}$;

$A = \{f$: существует $\lim_{x\to\infty} f(x) = F \leq \infty, f(x) \leq F$ для всех $x \in \mathbf{Z}^+\}$;

$M = \{f : f(x) \leq f(x+1) \leq f(x) + 1$ для всех $x \in \mathbf{Z}^+\}$.

Класс M будем называть классом монотонных стратегий обслуживания. Очевидно, $M \subset A \subset \widehat{A}$.

Обозначения

Q_n — суммарная длина очереди в момент T_n в системе поллинга, управляемой процессом Ψ, входной поток в которую "обрезан": только вызовы с номерами $1, \ldots, n$ поступают в систему в моменты времени, соответственно, $T_1 \leq \ldots \leq T_n$;

$Q^k_{[-n,0]}(t)$ — длина очереди на станции k в момент времени t в системе, управляемой процессом $\Psi^{(-n)}$, в которую поступают только вызовы с номерами $-n, \ldots, 0$ (в моменты времени, соответственно, $T_{-n} \leq \ldots \leq T_0 = 0$);

$W^k_{[-n,0]}(t)$ — остаточное время обслуживания вызова, находящегося в момент t на обслуживании на станции k (в той же системе), $W^k_{[-n,0]}(t) = 0$, если в момент t прибор не обслуживает k-ю очередь.

Начальные условия всюду предполагаются нулевыми: до момента поступления первого вызова из входного потока рассматриваемые системы пусты. Пусть

$$F_k = \lim_{x\to\infty} f_k(x), \ \ \rho = \lambda \times [\sigma + \max_{1\le k\le K} \frac{p_k}{F_k C_k} W].$$

В работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $f_k \in \widehat{A}$ *для всех* $k = 1, \ldots, K$. *Если* $\rho < 1$, *то* Q_n *ограничена по вероятности, т.е.* $\lim\limits_{x\to\infty} \sup\limits_n \mathbf{P}(Q_n > x) = 0$

Теорема 2. *Пусть* $f_k \in A$ *для всех* $k = 1, \ldots, K$. *Если* $\rho > 1$, *то* $Q_n \xrightarrow{\mathrm{p}} \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $f_k \in M$ *для всех* $k = 1, \ldots, K$. *Если* $\rho < 1$, *то существует процесс*

$$\{Q^k(t), W^k(t);\ k = 1, \ldots, K;\ t \ge 0\}$$

и почти наверное конечные случайные величины $\bar{N},\ t_0$, *такие что:*

1. $\{Q^k_{[-n,0]}(t), W^k_{[-n,0]}(t)\} \ \ddot{=}\ \{Q^k(t), W^k(t)\}$ *для любого* $n \ge \bar{N}$, $k = 1, \ldots, K,\ t \ge 0$;
2. $Q^k_{[-n,0]}(t) = W^k_{[-n,0]}(t) = Q^k(t) = W^k(t) = 0$ *п.н. для всех* $k = 1, \ldots, K,\ t \ge t_0,\ n \ge 0$.

Если $\rho > 1$, *то* $Q_{[-n,0]}(0) = \sum_{k=1}^K Q^k_{[-n,0]}(0) \xrightarrow{\mathrm{p}} \infty$.

Таким образом, для рассматриваемых систем поллинга со стратегиями из класса A условие $\rho < 1$ необходимо и достаточно для ограниченности по вероятности длины общей очереди. Для систем со стратегиями из класса M это условие обеспечивает существование стационарного режима и сходимость к нему процесса длины очереди.

В параграфе 3 получены свойства монотонности детерминированной системы поллинга, а также показано, что класс M в некотором смысле "плотный"в A: любая функция из класса A может быть ограничена поточечно сверху и снизу функциями из M, имеющими одинаковый предел при $x \to \infty$. Доказательство теорем 1,2 приведено в параграфе 4. Показано, что эти утверждения выполнены для системы с монотонными стратегиями, и использовано свойство "плотности"класса M в A. Теорема 3 доказывается в параграфе 6.

3. Свойства монотонности

В этом параграфе рассматривается детерминированный случай системы поллинга, когда все управляющие последовательности неслучайны. Предполагается, что входной поток "обрезан": только конечное число вызовов поступает в систему. Будем считать, что прибор начинает работу в некоторый момент времени t^0 прибытием на станцию ν_1. Будем также считать, что прибор, начиная с момента t^0, перемещается между станциями, даже если в системе отсутствуют вызовы.

Назовем стратегией обслуживания набор K последовательностей функций $f = \{f(k), k = 1, \ldots, K\}$, в котором последовательность $f(k) = \{f_k^j\}_{j=1}^{\infty}$ назовем стратегией обслуживания на станции k.

Если прибор, прибывая на станцию k в j-ый раз, застает x вызовов в очереди, он обслуживает $f_k^j(x) \geq 0$ вызовов в порядке $FIFO$, а затем переключается на следующую станцию своего маршрута. Обслуженные вызовы покидают систему.

Замечание. В данном параграфе допускается, что стратегии обслуживания на одной и той же станции могут зависеть от номера визита прибора на эту станцию. В дальнейшем, как и в параграфе 2, для всех $1 \leq k \leq K$ $f_k^j \equiv f_k$ не зависит от j.

Пусть для любых $k \in \{1, \ldots, K\}$, $j = 1, 2, \ldots$ выполнены условия:

(1) $f_k^j(x) \leq x$ для любого $x \in \mathbf{Z}^+$;

(2) Если $x \leq y$ для $x, y \in \mathbf{Z}^+$, то $f_k^j(x) \leq f_k^j(y)$;

(3) Если $x \leq y$ для $x, y \in \mathbf{Z}^+$, то $x - f_k^j(x) \leq y - f_k^j(y)$.

Условия (2) и (3) приведены в работах [1, 3] и, как нетрудно видеть, эквивалентны условию $f_k^j(x) \leq f_k^j(x+1) \leq f_k^j(x)+1$, определяющему класс монотонных стратегий M. Свойствами (1)–(3) обладают, например, следующие функции:

1. Для всех x, j $\quad f_k^j(x) = x$.
2. Для всех x $\quad f_k^j(x) = \min(x, l_j)$, $l_j \in \mathbf{Z}^+$.

Мы будем предполагать также, что все стратегии обслуживания, которые мы будем рассматривать, удовлетворяют условию $f_k^j(1) = 1$, обеспечивающему возможность опустошения системы.

Предполагается, что в систему поступают только N вызовов в моменты времени $T_1 \leq \ldots \leq T_N$. До момента T_1 система пуста. Вызов с номером n поступает в момент времени $T_n = T_{n-1} + \tau_n$, направляется в очередь с номером μ_n, σ_n — необходимое ему время обслуживания.

Положим $\nu = \{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\omega = \{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\mu = \{\mu_n\}_{n=1}^{N}$, $\sigma = \{\sigma_n\}_{n=1}^{N}$.

Обозначим такую систему $\Sigma = (N, T, \mu, \nu, \omega, \sigma, f)$, где $T = \{T_n\}_{n=1}^N$ — "обрезанный"входной поток.

Пусть $\widetilde{\Sigma} = (N, \widetilde{T}, \mu, \nu, \omega, \sigma, \widetilde{f})$ — система поллинга, отличающаяся от системы Σ только моментами прихода вызовов и стратегиями обслуживания. Маршрут прибора, момент начала его работы, номера очередей, в которые направляются вызовы, и времена обслуживания в системах Σ и $\widetilde{\Sigma}$ одинаковы.

Свойства монотонности. Введем следующие обозначения:

U_j — момент прихода прибора в очередь ν_j (в системе Σ);

V_j — момент завершения обслуживания очереди ν_j и начала переключения в очередь ν_{j+1}, $U_{j+1} = V_j + w_j$, $j = 1, 2, \ldots$;

$X_k(u)$ — количество поступивших в очередь k к моменту u вызовов из входного потока,

$W(u)$ — суммарное время переключения прибора за период (t^0, u),

$R_k(u)$ — суммарное время работы прибора в k-ой очереди за тот же период времени,

$S_k(u)$ — количество полностью обслуженных вызовов в очереди k в системе Σ к моменту u, $S(u) = \sum_{k=1}^K S_k(u)$.

Пусть $R(u) = \sum_{k=1}^K R_k(u)$ — общее время работы за (t^0, u) в системе Σ. Соответствующие величины в системе $\widetilde{\Sigma}$ обозначим $\widetilde{U}_j$ и т.д.

Введенные величины обладают свойствами:

$$U_1 = \widetilde{U}_1 = t_0, \ \ W(u) + R(u) = u - t^0,$$

$$W(U_j) = \widetilde{W}(\widetilde{U}_j) = \sum_{i=1}^{j-1} \omega_i,$$

и если $S_k(V_i) \geq \widetilde{S}_k(\widetilde{V}_j)$ для некоторых i, j, k, то и $R_k(V_i) \geq \widetilde{R}_k(\widetilde{V}_j)$, поскольку вызовы обслуживаются в порядке $FIFO$. Кроме того, $W(u)$,$R_k(u)$ монотонно не убывают по u.

Пусть τ $(\widetilde{\tau})$ — момент окончания обслуживания последнего из N пришедших в систему Σ $(\widetilde{\Sigma})$ вызовов: $\tau = \inf(u : S(u) = N)$.

Будем писать $T \leq \widetilde{T}$, если $T_n \leq \widetilde{T}_n$ для всех $1 \leq n \leq N$, и $f \geq \widetilde{f}$, если $f_k^j(x) \geq \widetilde{f}_k^j(x)$ для всех $k = 1, \ldots, K; j = 1, 2, \ldots; x \in \mathbf{Z}^+$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если $T \leq \widetilde{T}, f \geq \widetilde{f}$, и стратегии f и $\widetilde{f}$ удовлетворяют свойствам (1)-(3), то:*

1. $U_j \geq \widetilde{U}_j, V_j \geq \widetilde{V}_j, \quad j = 1, 2, \ldots;$

2. $S_k(U_j) \geq \widetilde{S}_k(\widetilde{U}_j),\ k = 1, \dots, K,\ j \in \mathbf{N}$*;*

3. $S_k(V_j) \geq \widetilde{S}_k(\widetilde{V}_j),\ k = 1, \dots, K,\ j \in \mathbf{N}$*;*

4. $\tau \leq \widetilde{\tau}$*.*

Доказательство утверждений (1) – (3) теоремы проведем индукцией по j.

Пусть $j = 1$. Обозначим $\nu_1 = l$. Поскольку момент прихода прибора в очередь ν_1 равен, по определению, $U_1 = \widetilde{U}_1 = t^0$, длины очередей удовлетворяют неравенству:

$$x = X_l(U_1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N} I(T_n \leq U_1) I(\mu_n = l) \geq \sum_{n=1}^{N} I(\widetilde{T}_n \leq U_1) I(\mu_n = l) =$$
$$= \widetilde{X}_l(\widetilde{U}_1) = y.$$

По второму свойству монотонности стратегий обслуживания (здесь и далее в этом параграфе цифры 2 и 3 над неравенствами означают ссылку на соответствующее свойство монотонности стратегий обслуживания)

$$S_l(V_1) \stackrel{\text{def}}{=} f_l^1(x) \geq \widetilde{f}_l^1(x) \stackrel{2}{\geq} \widetilde{f}_l^1(y) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{S}_l(\widetilde{V}_1).$$

Поэтому $R_l(V_1) \geq \widetilde{R}_l(\widetilde{V}_1)$, и для моментов окончания первого периода обслуживания имеем:

$$V_1 = U_1 + R_l(V_1) \geq \widetilde{U}_1 + \widetilde{R}_l(\widetilde{V}_1) = \widetilde{V}_1.$$

При $i \neq l$, очевидно, $S_i(V_1) = \widetilde{S}_i(\widetilde{V}_1) = 0$. Тем самым первый шаг индукции завершен.

Предположим, что утверждения (1) – (3) выполнены для моментов начала и окончания визита прибора в очередь ν_{j-1}, $j \geq 2$, и покажем их справедливость для моментов U_j, V_j. Имеем:

$$U_j = V_{j-1} + \omega_{j-1} \geq \widetilde{V}_{j-1} + \omega_{j-1} = \widetilde{U}_j,$$
$$S_k(U_j) = S_k(V_{j-1}) \geq \widetilde{S}_k(\widetilde{V}_{j-1}) = \widetilde{S}_k(\widetilde{U}_j).$$

Обозначим $\nu_j = l$. Если $S_l(U_j) = 0$, то, повторяя рассуждения базиса индукции, получим требуемое утверждение. Рассмотрим случай $S_l(U_j) > 0$, и пусть прибор посещает очередь l в m-й раз, $m > 1$.

Обозначим $x = X_l(U_j) - S_l(U_j), y = \widetilde{X}_l(\widetilde{U}_j) - \widetilde{S}_l(\widetilde{U}_j)$ — длины очереди l в момент прихода прибора в очередь $\nu_j = l$ в соответствующих системах. Заметим, что $X_l(U_j) \geq \widetilde{X}_l(\widetilde{U}_j)$, поскольку $U_j \geq \widetilde{U}_j$. Возможны два случая: $x \geq y$ и $x < y$.

В первом случае $f_l^m(x) \stackrel{2}{\geq} f_l^m(y) \geq \widetilde{f}_l^m(y)$, поэтому и

$$S_l(V_j) = S_l(U_j) + f_l^m(x) \geq \widetilde{S}_l(\widetilde{U}_j) + \widetilde{f}_l^m(y) = \widetilde{S}_l(\widetilde{V}_j).$$

Во втором случае $x < y$, поэтому

$$z \stackrel{\text{def}}{=} S_l(U_j) - \widetilde{S}_l(\widetilde{U}_j) \geq y - x > 0.$$

Но $f_l^m(y) - f_l^m(x) \stackrel{3}{\leq} y - x \leq z$, то есть $f_l^m(x) \geq f_l^m(y) - z \geq \widetilde{f}_l^m(y) - z$. Наконец,

$$S_l(V_j) = S_l(U_j) + f_l^m(x) \geq \widetilde{S}_l(\widetilde{U}_j) + z + \widetilde{f}_l^m(y) - z = \widetilde{S}_l(\widetilde{V}_j).$$

То есть в обоих случаях $S_l(V_j) \geq \widetilde{S}_l(\widetilde{V}_j)$ и, следовательно, $R_l(V_j) \geq \widetilde{R}_l(\widetilde{V}_j)$.

$$\begin{aligned} V_j &= t^0 + W(U_j) + R(V_j) = \\ &= t^0 + W(U_j) + \sum_{i \neq l} R_i(U_j) + R_l(V_j) \geq \\ &\geq t^0 + \widetilde{W}(\widetilde{U}_j) + \sum_{i \neq l} \widetilde{R}_i(\widetilde{U}_j) + \widetilde{R}_l(\widetilde{V}_j) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{V}_j. \end{aligned}$$

Последнее неравенство завершает шаг индукции, и нам остается показать, что $\widetilde{\tau} \geq \tau$. Пусть $\tau = V_j \geq \widetilde{V}_j$ для некоторого j,

$$S(V_j) = N = \widetilde{S}(\widetilde{\tau}), \quad \widetilde{R}(\widetilde{\tau}) = R(V_j).$$

Тогда

$$\widetilde{\tau} = t^0 + \widetilde{W}(\widetilde{\tau}) + \widetilde{R}(\widetilde{\tau}) \geq t^0 + \widetilde{W}(\widetilde{V}_j) + \widetilde{R}(\widetilde{\tau}) =$$

$$t^0 + W(V_j) + R(V_j) = \tau.$$

□

Докажем простые следствия теоремы 4, позволяющие существенно расширить класс стратегий обслуживания по сравнению с рассматривавшимися в [3] монотонными стратегиями.

Следствие 1. *Если, в условиях теоремы 4, для любых k, j лишь одна из двух стратегий обслуживания $f_k^j, \widetilde{f}_k^j$ обладает свойствами монотонности (2) и (3), то есть принадлежит M, то утверждение теоремы 4 остается справедливым.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что выполняются два неравенства:

(i) если $x \geq y$, то $f_k^j(x) \geq \widetilde{f}_k^j(y)$;

(ii) если $x < y$, то $\widetilde{f}_k^j(y) - f_k^j(x) \leq y - x$.

Действительно, пусть, скажем, функция $\widetilde{f}_k^j \in M$. Тогда:

(i) $f_k^j(x) \geq \widetilde{f}_k^j(x) \stackrel{2}{\geq} \widetilde{f}_k^j(y)$;

(ii) $\widetilde{f}_k^j(y) - f_k^j(x) \leq \widetilde{f}_k^j(y) - \widetilde{f}_k^j(x) \stackrel{3}{\leq} y - x$. □

Рассмотрим три системы поллинга, отличающиеся лишь наборами стратегий обслуживания (с одним и тем же входным потоком и маршрутом прибора): $\Sigma^f, \Sigma^g, \Sigma^h$, причем для всех $k \in \{1, \dots, K\}, x, j = 1, 2, \dots$

$$f_k^j(x) \le g_k^j(x) \le h_k^j(x),$$

и свойствам монотонности (2),(3) удовлетворяют наборы стратегий f и h. Свойство (1) предполагается выполненным для всех стратегий, равно как и свойство $f_k^j(1) = 1$ при всех k, j. В этих условиях из теоремы 4 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. *1.* $U_j^f \le U_j^g \le U_j^h, V_j^f \le V_j^g \le V_j^h, \quad j \in \mathbf{N}$;

2. $S_k^f(U_j^f) \le S_k^g(U_j^g) \le S_k^h(U_j^h),\ k = 1, \dots, K,\ j \in \mathbf{N}$;

3. $S_k^f(V_j^f) \le S_k^g(V_j^g) \le S_k^h(V_j^h),\ k = 1, \dots, K,\ j \in \mathbf{N}$;

4. $\tau^f \ge \tau^g \ge \tau^h$.

Справедливость этого утверждения очевидна в силу теоремы 4 и следствия 1. Прямое доказательство этого утверждения можно найти также в статье [1].

Следствие 3. *Если в системе Σ^g при любых k, j стратегии обслуживания g_k^j принадлежат классу A, то найдутся функции $f_k^j, h_k^j \in M$, такие что:*

a) $f_k^j(x) \le g_k^j(x) \le h_k^j(x)$,

b) $G_k^j = \lim g_k^j(x) = \lim f_k^j(x) = \lim h_k^j(x)$ *при* $x \to \infty$,

и для систем $\Sigma^f, \Sigma^g, \Sigma^h$ с одним и тем же входным потоком и маршрутом прибора справедливы утверждения следствия 2.

Доказательство. Достаточно показать, что для любой функции g из класса A, введенного в параграфе 2, найдутся две функции f и h из класса M, имеющие тот же предел $G = \lim g(x) = \lim f(x) = \lim h(x)$ на бесконечности, такие что $f(x) \le g(x) \le h(x)$ для всех $x \ge 0$. В качестве таких "границ"можно взять, например, $h(x) = \min\{x, G\}$ и рекурсивно построенную f: $f(1) = 1$, $f(x+1) = \min\{f(x) + 1, \inf_{y \ge x+1} g(y)\}$. □

Следствие 3 утверждает, что время опустошения системы Σ^g, в которой все стратегии обслуживания принадлежат классу A, может быть "зажато"сверху и снизу соответствующими временами для систем Σ^f, Σ^h с монотонными стратегиями обслуживания, имеющими те же пределы на бесконечности, что и стратегии в Σ^g.

Замечание. Если, в условиях следствия 3, $g_k^j \in \widehat{A}$, то следствие 3 останется справедливым, если заменить (b) на условие

b') $G_k^j = \lim g_k^j(x) = \lim f_k^j(x) \le \lim h_k^j(x)$ при $x \to \infty$.

В качестве функции $h_k^j(x)$ из M можно взять $\min\{x, \sup_y g_k^j(y)\}$.

4. Стохастическая система поллинга

В этом параграфе рассматривается поведение систем поллинга в предположениях и обозначениях параграфа 2. Пусть $T = \{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — входной поток в систему, $T_0 = 0$. Предполагается, что стратегии обслуживания на каждой станции принадлежат классу M монотонных стратегий. Для каждого из введенных в параграфе 2 маршрутов прибора $\Psi, \Psi^{(1)}, \Psi^{(-n)} (n \geq 0)$ рассмотрим систему поллинга, управляемую этим маршрутом. Будем называть непустым цикл, в котором обслужен хотя бы один вызов.

Введем следующие обозначения.

$X_{[m,n]}(T)$ — момент окончания последнего непустого цикла в системе, управляемой процессом Ψ, входной поток в которую обрезан: только вызовы с номерами $m, \ldots, n$ поступают в систему в моменты времени, соответственно, $T_m \leq \ldots \leq T_n$;

$\widehat{X}_{[m,n]}(T)$ — момент окончания последнего непустого цикла для системы с тем же входным потоком, управляемой процессом $\Psi^{(1)}$;

$\widetilde{X}_{[-k,l]}(T)$ — такой же момент для системы, управляемой процессом $\Psi^{(-k)}$, в которую поступают только вызовы с номерами $-k, -k+1, \ldots, l$.

Введенные величины обладают следующими свойствами.

Свойство 1 *(причинность). Для всех $m \leq n$, $-k \leq l$ почти наверное*

$$X_{[m,n]}(T) \geq T_n, \widehat{X}_{[m,n]}(T) \geq T_n, \widetilde{X}_{[-k,l]}(T) \geq T_l.$$

Свойство 2 *(внешняя монотонность).*

$$X_{[m,n]}(T) \leq X_{[m,n]}(T') \quad \textit{п.н.},$$

$$\widehat{X}_{[m,n]}(T) \leq \widehat{X}_{[m,n]}(T') \quad \textit{п.н.},$$

$$\widetilde{X}_{[-k,l]}(T) \leq \widetilde{X}_{[-k,l]}(T') \quad \textit{п.н.},$$

если $T \leq T'$ п.н.

Доказательство этого факта является прямым следствием теоремы 4, в условиях которой мы находимся. Докажем, например, первое утверждение. Рассмотрим реализацию всех управляющих последовательностей случайных величин на одном элементарном исходе.

Пусть τ и τ' — моменты окончания обслуживания всех поступивших вызовов в сравниваемых системах (Σ и Σ'). По теореме

1 $\tau \leq \tau'$. Пусть τ принадлежит циклу с номером i в работе прибора в системе Σ , τ' —циклу с номером i' в системе Σ' . Заметим, что маршрут прибора в системах Σ и Σ' одинаков до момента T_m, а также после момента τ', поскольку выполнена одна и та же работа $R = \sigma_m + \ldots + \sigma_n$. То есть и в той, и в другой системе цикл с номером i' заканчивается в момент $\Psi_{i'} + R$, цикл с номером i в системе Σ заканчивается в момент $\Psi_i + R$. Поэтому $i \leq i'$. Тогда, очевидно, $\tau \leq \Psi_i + R \overset{\text{def}}{=} X_{[m,n]}(T) \leq \Psi_{i'} + R \overset{\text{def}}{=} X_{[m,n]}(T')$. □

Свойство 3 *(однородность). Для всех $c \in \mathbf{R}$, $m \leq n$, $-k \leq l$*

$$\widehat{X}_{[m,n]}(c+T) \overset{\mathrm{D}}{=} \widehat{X}_{[m,n]}(T) + c, \quad \widetilde{X}_{[-k,l]}(c+T) \overset{\mathrm{D}}{=} \widetilde{X}_{[-k,l]}(T) + c$$

(совпадают по распределению).

Доказательство. Достаточно заметить, что распределения процессов $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(1)} - c$ совпадают. □

Свойство 4 *(отделимость). Если $\widetilde{X}_{[-k,-k+m]}(T) \leq T_{-k+m+1}$ п.н. для некоторых k, m, l, таких что $-k+m \leq 0$, $-k+m < l$, то*

$$\widetilde{X}_{[-k,l]}(T) = \widetilde{X}_{[-k+m+1,l]}(T) \text{ п.н.}$$

Доказательство. Заметим, что после момента $\widetilde{X}_{[-k,-k+m]}(T)$ обслуживающий прибор и в одной, и в другой системе движется в соответствии с маршрутом

$$\Psi^{(-k)} + \sum_{j=-k}^{-k+m-1} \sigma_j \overset{\text{def}}{=} \Psi^{(-k+m)},$$

и, начиная с этого момента, сравниваемые системы п.н. работают одинаково. □

В дальнейшем цифры 1 – 4 над равенствами и неравенствами будут означать ссылку на вышеизложенные свойства.

Введем следующие обозначения:

$$Z_{[m,n]}(T) \overset{\text{def}}{=} X_{[m,n]}(T) - T_n,$$

$$\widehat{Z}_{[m,n]}(T) \overset{\text{def}}{=} \widehat{X}_{[m,n]}(T) - T_n,$$

$$\widetilde{Z}_{[-k,l]}(T) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{X}_{[-k,l]}(T) - T_l.$$

Лемма 1. **(Внутренняя монотонность $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Z}$).** *Для любых целых $-k \leq l$*

$$\widetilde{X}_{[-k-1,l]}(T) \geq \widetilde{X}_{[-k,l]}(T) \quad \text{п.н.},$$

$$\widetilde{Z}_{[-k-1,l]}(T) \geq \widetilde{Z}_{[-k,l]}(T) \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Рассмотрим входной поток T' с точками:

$$T'_j = \begin{cases} T_j - \widetilde{Z}_{-k-1}(T) & \text{для } j \le -k-1; \\ T_j & \text{для } j \ge -k \ . \end{cases}$$

Очевидно, что $\widetilde{X}_{[-k,l]}(T') = \widetilde{X}_{[-k,l]}(T)$, так как моменты прихода вызовов в эти системы одинаковы. Из свойства отделимости $\widetilde{X}_{[-k-1,l]}(T') = \widetilde{X}_{[-k,l]}(T')$, и по свойству монотонности $\widetilde{X}_{[-k-1,l]}(T')$ $\le \widetilde{X}_{[-k-1,l]}(T)$ п.н. □

Зададим преобразования сдвига, действующие на функциях, измеримых относительно σ-алгебр, порожденных входным потоком и маршрутом Ψ обслуживающего прибора. Случайный вектор η_i, как и в параграфе 2, описывает маршрут прибора в i-м цикле для процесса Ψ, $\psi_i = \Psi_i - \Psi_{i-1}$, $\Psi_0 = 0$.

Если

$$S = h(\ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots; \ldots, \eta_m, \eta_{m+1}, \ldots),$$

то

$$\theta_\xi \circ S \stackrel{\text{def}}{=} h(\ldots, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots; \ldots, \eta_m, \eta_{m+1}, \ldots),$$

$$\theta_\Psi \circ S \stackrel{\text{def}}{=} h(\ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots; \ldots, \eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \ldots).$$

Пусть θ_ξ^n, θ_Ψ^n — итерации преобразований θ_ξ, θ_Ψ.

Лемма 2. **(Свойство субаддитивности X и Z).** *Для произвольных $m \le l < n$, для любого T выполнены п.н. неравенства:*

$$X_{[m,n]}(T) \le X_{[m,l]}(T) + \theta_\xi^l \circ \theta_\Psi^{\rho[m,l]} \circ X_{[1,n-l]}(T);$$

$$Z_{[m,n]}(T) \le Z_{[m,l]}(T) + \theta_\xi^l \circ \theta_\Psi^{\rho[m,l]} \circ Z_{[1,n-l]}(T),$$

где $\rho[m,l] = \min\{k : \Psi_k \ge X_{[m,l]}(T) - \sum_{j=m}^{l} \sigma_j\}$.

Доказательство. Рассмотрим входной поток $T^1 = \{T_j^1\}$:

$$T_j^1 = \begin{cases} T_j & \text{для } j \le l; \\ T_j + Z_{[m,l]}(T) & \text{для } j > l \ . \end{cases}$$

По свойству 2 монотонности

$$X_{[m,n]}(T) \stackrel{2}{\le} X_{[m,n]}(T^1) = X_{[m,l]}(T) + \theta_\xi^l \circ \theta_\Psi^{\rho[m,l]} \circ X_{[1,n-l]}(T).$$

Поэтому и

$$\begin{aligned} Z_{[m,n]}(T) &= X_{[m,n]}(T) - \sum_{i=1}^{n} \tau_i \le X_{[m,l]}(T) - \sum_{i=1}^{l} \tau_i + \\ &+ \theta_\xi^l \circ \theta_\Psi^{[m,l]} \circ (X_{[1,n-l]}(T) - \sum_{i=1}^{n-l} \tau_i) = \\ &= Z_{[m,l]}(T) + \theta_\xi^l \circ \theta_\Psi^{\rho[m,l]} \circ Z_{[1,n-l]}(T) \end{aligned}$$

□

Лемма 3. **(Свойство субаддитивности $\widehat{X}$ и $\widehat{Z}$).** *Для произвольных $m \le l < n$, для любого T выполнены п.н. неравенства:*

$$\widehat{X}_{[m,n]}(T) \le \widehat{X}_{[m,l]}(T) + \theta_\xi^l \circ \theta_\Psi^{\widehat{\rho}[m,l]} \circ X_{[1,n-l]}(T);$$

$$\widehat{Z}_{[m,n]}(T) \le \widehat{Z}_{[m,l]}(T) + \theta_\xi^l \circ \theta_\Psi^{\widehat{\rho}[m,l]} \circ Z_{[1,n-l]}(T),$$

где $\widehat{\rho}[m,l] = \min\{k : \Psi_k^{(1)} \ge \widehat{X}_{[m,l]}(T) - \sum_{j=m}^{l} \sigma_j\}$.

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично предыдущему.

Лемма 4. **(Закон больших чисел)**. *Найдется конечная постоянная $\gamma \ge 0$, такая что*

$$\frac{Z_{[1,n]}}{n} \xrightarrow{\text{p}} \gamma, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}Z_{[1,n]}}{n} = \gamma;$$

$$\frac{Z_{[-n,-1]}}{n} \xrightarrow{\text{p}} \gamma, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}Z_{[-n,-1]}}{n} = \gamma;$$

$$\frac{\widehat{Z}_{[1,n]}}{n} \xrightarrow{\text{p}} \gamma, \ \frac{\widehat{Z}_{[-n,-1]}}{n} \xrightarrow{\text{p}} \gamma.$$

Доказательство. Утверждение леммы для процесса Z следует из результатов, изложенных в приложении (о случайно-субаддитивных последовательностях). Докажем, что лемма справедлива для процесса $\widehat{Z}$. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mid \frac{\widehat{Z}_{[1,n+M]}(T)}{n} - \gamma \mid \ge \varepsilon) = 0$$

для некоторой константы M и произвольного $\varepsilon > 0$.

(a) В одну сторону доказательство этого утверждения сразу следует из свойства субаддитивности. Действительно,

$$\widehat{Z}_{[1,M+n]}(T) \le \widehat{Z}_{[1,M]}(T) + \theta_\xi^M \circ \theta_\Psi^{\widehat{\rho}[1,M]} \circ Z_{[1,n]}(T),$$

поэтому $\forall \varepsilon > 0$ и $\delta < \varepsilon$

$$\mathbf{P}(\frac{\widehat{Z}_{[1,n+M]}(T)}{n} \ge \gamma + \varepsilon) \le \mathbf{P}(\frac{\widehat{Z}_{[1,M]}(T)}{n} \ge \delta) +$$

$$+ \mathbf{P}(\frac{Z_{[1,n]}(T)}{n} \ge \gamma + \varepsilon - \delta) \to 0,$$

поскольку $\widehat{Z}_{[1,M]}(T)$ — собственная случайная величина, и Z удовлетворяет ЗБЧ.

(b) Для доказательства второй части утверждения нам необходимо установить некоторое свойство солидарности процессов Z и $\widehat{Z}$, подобное субаддитивности.

Лемма 5. *Для любых $x > 0$, $x_0 < x$ и любого числа $M \in \mathbf{N}$ найдутся событие A_M такое,что $\mathbf{P}(\overline{A_M}) \to 0$ при $M \to \infty$, и собственная случайная величина ϕ_M такие, что*

$$\mathbf{P}(Z_{[1,n+1]} \geq x) \leq \mathbf{P}(\overline{A_M}) + \mathbf{P}(\widehat{Z}_{[1,M+n]} \geq x - x_0) + \mathbf{P}(\phi_M \geq x_0).$$

Действительно, пусть $M > 1$ — произвольное фиксированное число, T^1 — входной поток с точками

$$T^1_j = \begin{cases} -\infty & \text{для } j \leq M-1; \\ T_j & \text{для } j > M \ . \end{cases}$$

Снабдим для удобства все процессы добавочным аргументом, указывающим маршрут прибора, которым управляется система. Имеем:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{[1,M+n]}(T, \Psi^{(1)}) &\overset{2}{\geq} \widehat{X}_{[1,M+n]}(T^1, \Psi^{(1)}) \\ &\overset{\mathrm{D}}{=} \widehat{X}_{[M,M+n]}(T^1, \Psi^{(1)} - \sum_{j=1}^{M-1} \sigma_j). \end{aligned}$$

Пусть $\widetilde{\Psi} \overset{\mathrm{def}}{=} \Psi^{(1)} - \sum_{j=1}^{M-1} \sigma_j$, $\widetilde{\Psi}_0$ — первая положительная точка этого процесса, A_M — событие $\{\widetilde{\Psi}_0 < T_{M-1}\}$.

Обозначим T^2 входной поток с точками $T^2_j = \widetilde{\Psi}_0 + T_j - T_{M-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{[M,M+n]}(T^1, \widetilde{\Psi}) I_{\{A_M\}} &\overset{2}{\geq} \widehat{X}_{[M,M+n]}(T^2, \widetilde{\Psi}) I_{\{A_M\}} \\ &\overset{\mathrm{D}}{=} (\widetilde{\Psi}_0 + \theta_\xi^{M-1} \circ X_{[1,n+1]}(T)) I_{\{A_M\}}. \end{aligned}$$

Обозначив $\phi_M \overset{\mathrm{def}}{=} T_{M-1} - \widetilde{\Psi}_0$, получим:

$$(Z_{[1,n+1]}(T) - \phi_M) I_{\{A_M\}} \overset{\mathrm{D}}{\leq} \widehat{Z}_{[1,M+n]}(T) I_{\{A_M\}}.$$

Используя последнее неравенство, имеем: для любых x, $x_0 < x$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_{[1,n+1]} \geq x) &\leq \mathbf{P}(\overline{A_M}) + \mathbf{P}(Z_{[1,n+1]} \times I_{\{A_M\}} \geq x) \\ \leq \mathbf{P}(\overline{A_M}) &+ \mathbf{P}((Z_{[1,n+1]} - \phi_M) \times I_{\{A_M\}} \geq x - x_0) \\ &+ \mathbf{P}(\phi_M \times I_{\{A_M\}} \geq x_0) \\ \leq \mathbf{P}(\overline{A_M}) &+ \mathbf{P}(\widehat{Z}_{[1,M+n]} \geq x - x_0) + \mathbf{P}(\phi_M \geq x_0), \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы 5. Используя доказанное неравенство, имеем: для любых $\varepsilon, \varepsilon_1$, n, M

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\frac{Z_{[1,n+1]}}{n} \geq \gamma - \varepsilon) &\leq \mathbf{P}(\overline{A_M}) + \mathbf{P}(\frac{\widehat{Z}_{[1,M+n]}}{n} \geq \gamma - \varepsilon - \varepsilon_1) \\ &+ \mathbf{P}(\frac{\phi_M}{n} \geq \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Поскольку $\widetilde{\Psi}_0, \phi_M$— собственные случайные величины, и T_{M-1} неограниченно растет с ростом M, то для любого $\delta > 0$ найдутся числа $M = M(\delta), \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta) > 0$, что $\mathbf{P}(\overline{A_M}) < \delta$ и для n начиная с некоторого $\mathbf{P}(\phi_M/n \geq \varepsilon_1) < \delta$.

Тогда, наконец,

$$\liminf_n \mathbf{P}(\frac{\widehat{Z}_{[1,M+n]}}{n} \geq \gamma - \varepsilon - \varepsilon_1) \geq$$

$$\geq \liminf_n \mathbf{P}(\frac{Z_{[1,n+1]}}{n} \geq \gamma - \varepsilon) - 2\delta = 1 - 2\delta,$$

что вместе с (a) завершает доказательство закона больших чисел. □

Следствие 4. $X_{[1,n]}/n \xrightarrow{\mathrm{p}} \gamma + \lambda^{-1}$, $\widehat{X}_{[1,n]}/n \xrightarrow{\mathrm{p}} \gamma + \lambda^{-1}$.

Пусть A — следующее событие:

$$A = \{\lim_n \widetilde{Z}_{[-n,0]} < \infty\} = \{\widetilde{X} = \lim_n \widetilde{X}_{[-n,0]} < \infty\}$$

(пределы рассматриваются в смысле сходимости почти наверное, существование пределов гарантируется леммой (1)).

Теорема 5. $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Рассмотрим систему поллинга, в которую поступают вызовы с номерами $-n, -n+1, \ldots, 0, 1$, и прибор движется в соответствии с маршрутом $\Psi^{(-n,1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Psi^{(-n)} - \sigma_1$. Момент окончания последнего непустого цикла в такой системе обозначим $X^0_{[-n,1]}(T)$.

Рассмотрим вспомогательный входной поток T^1 с точками

$$T^1_j = \begin{cases} T_j & \text{для } j \leq 0; \\ \max\{T_1, \widetilde{X}\} & \text{для } j \geq 1 \ . \end{cases}$$

Тогда $\widetilde{X}_{[-n,1]}(T^1) = \widetilde{X}_{[-n,0]}(T) + \widehat{X}_{[1,1]}(T^1) - \max\{T_1, \widetilde{X}\}$, поскольку процесс $\Psi^{(-n)} + \sum_{j=-n}^{0} \sigma_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Psi^{(1)}$, то есть после момента $\widetilde{X}_{[-n,0]}(T) \leq \widetilde{X}$ прибор в системах с маршрутами $\Psi^{(-n)}$ и $\Psi^{(1)}$ движется почти наверное одинаково. Обозначим $\phi = \widehat{X}_{[1,1]}(T^1) - \max\{T_1, \widetilde{X}\}$. Тогда

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{X}_{[-n,0]}(T) & = & \widetilde{X}_{[-n,1]}(T^1) - \phi \geq \widetilde{X}_{[-n,1]}(T) - \phi \geq \\ & \geq & \widetilde{X}_{[-n,1]}(T - \sigma_1) - \phi = X^0_{[-n,1]}(T) - \sigma_1 - \phi \end{array} \quad (2)$$

Сдвиг

$$\theta_\xi \circ \Psi^{(-n)} \equiv \Psi^{(-n+1,1)} \equiv \Psi^{(-n)} + \sigma_{-n} - \sigma_1$$

является эргодическим (см. результаты [6, гл.1,§7]), и

$$\theta_\xi \circ \widetilde{X}_{[-n-1,0]}(T) = X^0_{[-n,1]}(T).$$

Из неравенства (2) следует, что $A \subseteq \theta_\xi \circ A$. Поскольку сдвиг θ_ξ эргодичен, событие A имеет вероятность 0 или 1. □

Преобразование масштаба. Для любого $0 \le c < \infty$, процесс cT состоит из точек $\{cT_i\}, i \in \mathbf{Z}$ Очевидно, что при всех n

(a) $Z_{[-n,-1]}(cT)$ убывает по c;

(b) $X_{[1,n]}(cT)$ возрастает по c.

Поэтому справедлива

Лемма 6. *Для любого $c \ge 0$ существует неотрицательная постоянная $\gamma(c)$,такая что*

$$\frac{Z_{[-n,-1]}(cT)}{n} \xrightarrow{\text{p}} \gamma(c);$$

$\gamma(c)$ убывает по c, тогда как $\gamma(c) + c\lambda^{-1}$ возрастает по c.

Теорема 6. *Если $\lim \widetilde{X}_{[-n,0]}(T) = \infty$ п.н., то $\lambda\gamma(0) \ge 1$. Если $\lambda\gamma(0) > 1$, то $\lim \widetilde{X}_{[-n,0]}(T) = \infty$ п.н.*

Доказательство. Докажем второе утверждение. Пусть Q— точечный процесс, все точки которого равны 0: $Q = 0 \times T$. Для фиксированного n , обозначим T^n точечный процесс с точками $T^n_j = T_{-n}$ для любого j. Тогда

$$\widetilde{X}_{[-n,0]}(T) \overset{2}{\ge} \widetilde{X}_{[-n,0]}(T^n) = Y_{[-n,0]}(Q) + T_{-n},$$

где $Y_{[-n,0]}(Q)$ — момент окончания последнего непустого цикла в системе с $n+1$ вызовом и маршрутом прибора $\Psi^{(-n)} - T_{-n}$. Этот маршрут тоже стационарен, не зависит от входного потока, и случайные величины $Y_{[-n,0]}(Q)$ и $\widehat{X}_{[-n,0]}(Q)$ одинаково распределены. Поэтому

$$\liminf \frac{\widetilde{X}_{[-n,0]}(T)}{n} \ge \gamma(0) - \lambda^{-1} > 0,$$

что завершает доказательство второй части теоремы.

Докажем первое утверждение. Пусть $l \ge 1$ — фиксированное целое число. Рассмотрим события

$$A_{n,l} = \{\widetilde{X}_{[-n,0]}(T) \ge T_l\}, B_{n,l} = \{\widehat{X}_{[-n,0]}(T) \ge T_l\}.$$

По условию теоремы, $\mathbf{P}(A_{n,l}) \to 1$ при $n \to \infty$, а так как с.в. $\widetilde{X}_{[-n,0]}(T)$ и $\widehat{X}_{[-n,0]}(T)$ одинаково распределены, то и

$$\mathbf{P}(B_{n,l}) \to 1, \mathbf{P}(\overline{B_{n,l}}) \to 0. \qquad (3)$$

По свойству субаддитивности, для любого целого $n > 0$ справедливо неравенство:

$$\widehat{X}_{[-n,l]}(T) \le \widehat{X}_{[-n,0]}(T) + \theta_{\Psi}^{\rho[-n,0]} \circ \sum_{i=1}^{l} X_i \text{ п.н.}, \qquad (4)$$

где $X_1 = X_{[1,1]}, \ldots, X_i = \theta_\xi \circ \theta_\psi \circ X_{i-1}$ интегрируемы и одинаково распределены.

Введем процесс T^n с точками

$$T_j^n = \begin{cases} T_j & \text{для } j \leq 0; \\ \widehat{X}_{[-n,0]}(T) & \text{для } j \geq 1\ . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{[-n,l]}(T) I(B_{n,l}) &\leq \widehat{X}_{[-n,l]}(T^n) I(B_{n,l}) = \\ = (\widehat{X}_{[-n,0]}(T) &+ Y_{[1,l]}(Q)) I(B_{n,l}) \text{ п.н.}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $Y_{[1,l]}(Q)) = \theta_\Psi^{\rho[-n,0]} \circ X_{[1,l]}(Q) \stackrel{\mathrm{D}}{=} X_{[1,l]}(Q)$.

Из неравенств (4) и (5) имеем (п.н.):

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_{[-n,l]}(T) - \widehat{Z}_{[-n,0]}(T) &\leq \theta_\Psi^{\rho[-n,0]} \circ \sum_{i=1}^{l} X_i \times I(\overline{B_{n,l}}) + \\ &+ Y_{[1,l]}(Q) I(B_{n,l}) - T_l \equiv I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{6}$$

$\mathbf{E}(I_1) + \mathbf{E}(I_2) < \infty$. В силу стационарности маршрута прибора,

$$\widetilde{Z}_{[-n,l]}(T) - \widetilde{Z}_{[-n,0]}(T) \stackrel{\mathrm{D}}{=} \widehat{Z}_{[-n,l]}(T) - \widehat{Z}_{[-n,0]}(T) \stackrel{..}{\leq} I_1 + I_2 \tag{7}$$

В силу стационарности входного потока и свойства внутренней монотонности,

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_{[-n,l]}(T) - \widetilde{Z}_{[-n,0]}(T) &\stackrel{\mathrm{D}}{=} \widetilde{Z}_{[-n-l,0]}(T) - \widetilde{Z}_{[-n-l,-l]}(T) \stackrel{..}{\geq} \\ &\stackrel{..}{\geq} \widetilde{Z}_{[-n-l,0]}(T) - \widetilde{Z}_{[-n-2l,-l]}(T) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \phi_1 \end{aligned} \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что $\phi_1 \stackrel{\mathrm{D}}{\leq} I_1 + I_2$, следовательно, $\mathbf{E}(\phi_1^+) < \infty$.

Заметим далее, что с.в.

$$\widetilde{Z}_{[-n-l,0]}(T),\ \widetilde{Z}_{[-n-2l,-l]}(T),\ \widetilde{Z}_{[-n-3l,-2l]}(T), \ldots$$

одинаково распределены и образуют стационарную последовательность. Применяя лемму 11 из приложения, получим:

$$\mathbf{E} \mid \phi_1 \mid < \infty\ , \mathbf{E}\phi_1 = 0.$$

Итак,

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{E}\phi_1 &\leq I_1 + I_2 = \\ &= l\ \mathbf{E}(X_{[1,1]} I(\overline{B_{n,l}})) + \mathbf{E}(Y_{[1,l]}(Q) I(B_{n,l})) - l\lambda^{-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Устремляя n к бесконечности и используя (3), получаем, что первое слагаемое в правой части (9) стремится к нулю и

$$0 \leq \mathbf{E}(Y_{[1,l]}(Q)) - l\lambda^{-1}.$$

Деля обе части этого неравенства на l и устремляя l к бесконечности, получим: $0 \leq \gamma(0) - \lambda^{-1}$, что и требовалось доказать. $\square$

Ограниченность процесса длины очереди.

Если выполнено условие $\lambda\gamma(0) < 1$, то $\lim \widetilde{Z}_{[-n,0]}(T) < \infty$ п.н., и

$$\sup_n \mathbf{P}(\widehat{Z}_{[1,n]} > x) = \sup_n \mathbf{P}(\widetilde{Z}_{[-n,0]} > x) \to 0 \tag{10}$$

при $x \to \infty$. Это эквивалентно тому, что

$$\lim_{x\to\infty} \sup_n \mathbf{P}(Z_{[1,n]} > x) = 0. \tag{11}$$

Действительно, из (11) следует (10) по свойству субаддитивности для $\widehat{Z}$ (см. лемму 3), обратное верно в силу леммы 5.

Покажем, что ограниченность по вероятности процесса $Z_{[1,n]}(T)$ эквивалентна ограниченности по вероятности длины общей очереди в системе в момент прихода n-го вызова $(Q_n(T))$. Пусть $Q_n = Q_n^1 + \ldots + Q_n^K$, $\sigma_{k,j}$ — время обслуживания j-го по счету вызова на станции k : если

$$m_1 = \min\{i \geq 1 : I(\mu_i = k) = 1\},$$

$$m_j = \min\{i > m_{j-1} : I(\mu_i = k) = 1\},$$

то $\sigma_{k,j} = \sigma_{m_j}$. Пусть $n_k = \max\{j : m_j \leq n\}$ — номер последнего вызова, поступающего на станцию k. Тогда для любого $k = 1, \ldots, K$

$$\sum_{j=n_k-Q_n^k+2}^{n_k} \sigma_{k,j} \leq Z_{[1,n]} \leq \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=n_k-Q_n^k+1}^{n_k} \sigma_{k,j} + \sum_{j=n_0+1}^{n_0+Q_n} \psi_j, \tag{12}$$

где $\psi_j = \Psi_j - \Psi_{j-1}$ — суммарное время переключения в цикле с номером j, $n_0(T, \Psi)$ — наибольший номер цикла, завершившегося до момента T_n.

Поскольку входной поток стационарен и эргодичен, а с.в. ψ_j независимы и одинаково распределены, из неравенства (12) следует, что $Q_n(T)$ и $Z_{[1,n]}(T)$ ограничены по вероятности одновременно.

Если $\lambda\gamma(0) > 1$, то по теореме 3 $\lim \widetilde{Z}_{[-n,0]}(T) = \infty$ п.н., а значит $Z_{[1,n]}(T)$ и $Q_n(T)$ по вероятности неограниченно возрастают.

Системы с немонотонными стратегиями.

Сформулируем следствия теоремы 6 для систем поллинга, стратегии обслуживания в которых принадлежат введенному в параграфе 2 классу A. Рассмотрим стохастическую систему Σ^g, $g_k \in A$ - стратегия обслуживания $k-$й очереди. Согласно следствию 3 параграфа 3, найдутся функции $f_k, h_k \in M$, такие что:

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty} g_k(x) = F_k = \lim_{x\to\infty} h_k(x);$$

$f_k(x) \leq g_k(x) \leq h_k(x)$ для всех $x \geq 0$. Как будет показано в следующем параграфе, для систем Σ^f, Σ^h

$$\gamma(0) = \sigma + \max_k [\frac{p_k}{F_k C_k} W].$$

Тогда для процесса $Z^g_{[1,n]}(T)$ справедливо

Следствие 5. *Если* $Z^g_{[1,n]}(T) \xrightarrow{\text{P}} \infty$, *то* $\lambda\gamma(0) \geq 1$. *Если* $\lambda\gamma(0) > 1$, *то* $Z^g_{[1,n]}(T) \xrightarrow{\text{P}} \infty$.

Доказательство. Действительно, если $Z^g_{[1,n]}(T) \xrightarrow{\text{P}} \infty$ то в силу следствия 3

$$Z^f_{[1,n]}(T) \ddot{\geq} Z^g_{[1,n]}(T) \xrightarrow{\text{P}} \infty.$$

Поскольку для системы Σ^f свойства (10) и (11) эквивалентны, то $\tilde{Z}^f_{[-n,0]}(T) \xrightarrow{\text{P}} \infty$. Так как последовательность $\tilde{Z}^f_{[-n,0]}(T)$ монотонна по n, имеет место сходимость к бесконечности п.н., и по теореме 6 $\lambda\gamma(0) \geq 1$. Если же $\lambda\gamma(0) > 1$, то $\tilde{Z}^h_{[-n,0]}(T) \to \infty$ п.н., следовательно,

$$Z^g_{[1,n]}(T) \ddot{\geq} Z^h_{[1,n]}(T) \xrightarrow{\text{P}} \infty$$

в силу следствия 3 и равносильности свойств (10) и (11). □

Утверждение теоремы 2 теперь прямо следует из следствия 5 и неравенства (12).

Рассмотрим еще более широкий класс стратегий обслуживания $\widehat{A}$, функции из которого удовлетворяют требованиям класса A, за исключением условия $g(x) \leq G = \lim_x g(x)$. Становится невозможным построение монотонной функции $h \geq g$ с тем же пределом, нижнюю же функцию по-прежнему построить можно (см. замечание к следствию 3), и справедливо

Следствие 6. *Если* $Z^g_{[1,n]}(T) \xrightarrow{\text{P}} \infty$, *то* $\lambda\gamma(0) \geq 1$.

Доказательство следствия (6) полностью аналогично предыдущему. Поскольку $Z^g_{[1,n]}(T)$ и $Q^g_n(T)$ ограничены по вероятности одновременно, из следствия (6) вытекает справедливость теоремы 1.

5. Явный вид условия эргодичности

Рассмотрим детерминированную модель системы поллинга, представляющую собой реализацию описанной выше системы на одном элементарном исходе.

Предполагается, что вызовы с номерами $1, \dots, N$ поступают в систему в момент времени $t = 0$, прибор перемещается между очередями по циклическому маршруту. Мы будем предполагать, что справедливы некоторые законы больших чисел, выполнение которых гарантируется условиями параграфа 2. Пусть также стратегии обслуживания $f_k \in M$ для $k = 1, \dots, K$.

Пусть w_n — общее время переключения за цикл с номером n, $l_{k,n}$ — количество посещений очереди k $(k = 1, \dots, K)$ в n-ом цикле, $L_k(n) = \sum_{j=1}^n l_{k,j}$. Предположим, что (для всякого k)

$$\lim_n \frac{\sum_{j=1}^n w_j}{n} = W > 0;$$

$$\lim_n \frac{L_k(n)}{n} = \lim_n \frac{\sum_{j=1}^n l_{k,j}}{n} = C_k > 0.$$

Пусть $N = N_1 + \ldots + N_K$ — длины очередей в момент 0, $\sigma_{k,j}$ — j-ое время обслуживания в очереди k. Пусть для любого k

$$\lim_N \frac{N_k}{N} = p_k > 0; \ \lim_n \frac{\sum_{j=1}^n \sigma_{k,j}}{n} = C_{\sigma,k} > 0.$$

Ограниченные стратегии обслуживания.

Пусть $\lim_x f_k(x) = F_k < \infty$, и для $t \geq 0$ $Q_N(t)$ — длина общей очереди в системе в момент t, $Q_N(0) = N$. Обозначим $Z_N = \inf\{t > 0 : \ Q_N(t) = 0\}$. Требуется найти $\gamma(0) \equiv \lim_N \frac{Z_N}{N}$. Существование этого предела было доказано в предыдущем параграфе.

Обозначим

1. $x^0 = \min\{x : f_k(y) = F_k \ \forall k, \ \forall y \geq x\}$;
2. $n_k = \max\{n : \sum_{j=1}^n l_{k,j} F_k + x^0 \leq N_k\}$.

Поскольку

$$\lim_n \frac{\sum_{j=1}^n l_{k,j}}{\sum_{j=1}^{n+1} l_{k,j}} = 1,$$

и $n_k \to \infty$ при $N \to \infty$, то

$$\lim_N \frac{\sum_{j=1}^{n_k} l_{k,j}}{\sum_{j=1}^{n_k+1} l_{k,j}} = 1,$$

$$\lim_N \frac{\sum_{j=1}^{n_k} l_{k,j} F_k + x^0}{n_k} = F_k C_k;$$

$$\lim_N \frac{N_k}{n_k} = F_k C_k.$$

Поэтому

$$\frac{n_k}{N} = \frac{n_k}{N_k} \times \frac{N_k}{N} \to \frac{p_k}{F_k C_k} = \alpha_k > 0.$$

Перенумеруем очереди так, что $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_K$. Рассмотрим для простоты случай $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_K$.

Тогда $n_1 < n_2 < \ldots < n_K$ для достаточно больших N, и $n_{k+1} - n_k = (\alpha_{k+1} - \alpha_k)N + o(N)$ для любого $k = 1, \ldots, K-1$. Обозначим Z_N^1 общую длину первых n_1 циклов и, для $k = 1, 2, \ldots, K-1$,
Z_N^{k+1} — общую длину циклов с номерами $n_k + 1, \ldots, n_{k+1}$. Тогда

$$Z_N = \sum_{k=1}^{K} Z_N^k + o(N), \quad Z_N^1 = n_1(W + \sum_{r=1}^{K} C_r F_r C_{\sigma,r}) + o(N)$$

и, для $k = 2, \ldots, K$

$$Z_N^k = (n_k - n_{k-1})(W + \sum_{r=k}^{K} C_r F_r C_{\sigma,r}) + o(N).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
Z_N^1 &= \sum_{j=1}^{n_1} w_j + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{L_k(n_1)F_k} \sigma_{k,j} + o(N) = n_1 W + o(N) \\
&+ \sum_{k=1}^{K} n_1 \frac{L_k(n_1)F_k}{n_1} \frac{1}{L_k(n_1)F_k} \sum_{j=1}^{L_k(n_1)F_k} \sigma_{k,j} + o(N) = \\
&= n_1 W + n_1 \sum_{k=1}^{K} C_{\sigma,k} F_k C_k + o(N);
\end{aligned}$$

Обозначим $a_k = L_r(n_k)F_r, a_{k+1} = L_r(n_{k+1})F_r$.

$$\begin{aligned}
Z_N^k &= \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} w_j + \sum_{r=2}^{K} \sum_{j=a_k}^{a_{k+1}} \sigma_{r,j} + o(N) = \\
&= (n_{k+1} - n_k)(W + \sum_{r=2}^{K} C_r F_r C_{\sigma,r}) + o(N).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
Z_N &= n_1(W + \sum_{k=1}^{K} C_k F_k C_{\sigma,k}) + (n_2 - n_1)(W + \sum_{k=2}^{K} C_k F_k C_{\sigma,k}) + \ldots \\
&+ (n_K - n_{K-1})(W + \sum_{k=K}^{K} C_k F_k C_{\sigma,k}) + o(N) \\
&= n_K W + \sum_{k=1}^{K} n_k C_k F_k C_{\sigma,k} + o(N); \\
\frac{Z_N}{N} &= \alpha_K W + \sum_{k=1}^{K} \alpha_k C_k F_k C_{\sigma,k} + o(1) =
\end{aligned}$$

$$= \quad \alpha_K W + \sum_{k=1}^{K} p_k C_{\sigma,k} + o(1).$$

То есть для случая ограниченных стратегий обслуживания доказана

Теорема 7.

$$\gamma(0) = \sum_{k=1}^{K} p_k C_{\sigma,k} + \max_k\{\frac{p_k}{F_k C_k}\} \times W = \sigma + \max_k\{\frac{p_k}{F_k C_k}\} \times W,$$

где $\sigma = \mathbf{E}\sigma_n$ — среднее время обслуживания вызова из входного потока.

Неограниченные стратегии обслуживания.

Пусть для некоторого фиксированного $m \in \{1, \ldots, K-1\}$ $F_1, \ldots, F_m < \infty, F_{m+1} = \ldots = F_K = \infty$. Рассмотрим систему с одной очередью, дисциплина обслуживания которой $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Обозначим $A_r = \{n \geq 0 : f(n) \leq r\};\ R = \min\{r \geq 0 : A_r \neq \emptyset\}$.

Для любого $N \geq 0$ определим последовательность $\{X_n^{(N)}; n \geq 0\}$:

$$X_0^{(N)} = N;$$

$$n \geq 0 \ \ X_n^{(N)} < 0, \ \ X_{n+1}^{(N)} = -1;$$

$$X_n^{(N)} \geq 0, \ \ X_{n+1}^{(N)} = X_n^{(N)} - f(X_n^{(N)}).$$

Пусть $L_R = \sup\{n : \ n \in A_R\}$, множество $B = (-\infty, L_R)$. Обозначим $C^{(N)} = \min\{n \geq 0 : \ X_n^{(N)} \in B\}$. Очевидно, что $C^{(N)} \leq N$ для любого N.

Лемма 7. $\lim_N \frac{C^{(N)}}{N} = 0$.

Доказательство. Для $r > R$ определим числа L_r :

$$L_r = \sup\{n : n \in A_r\};$$

и числа $M_r, \ r \geq R$ по индукции: $M_R = L_R$; и для $r \geq R$

$$M_{r+1} = M_r + ([\frac{(L_{r+1} - M_r)^+}{r+1}] + 1) \times (r+1).$$

Тогда для всех $M_r \leq n \leq M_{r+1} \quad f(n) \geq r+1$, и если $M_r < K \leq M_{r+1}, \ \alpha_{K,r} = \min\{n : X_n^{(K)} \leq M_r\}$, то

$$\alpha_{K,r} \leq \min\{\frac{K - M_r}{r+1} + 1; \frac{M_{r+1} - M_r}{r+1}\}.$$

Поэтому если $M_r < N \le M_{r+1}$, то

$$\begin{aligned} C^{(N)} &\le [\frac{N-M_r}{r+1}] + 1 + \sum_{i=R}^{r-1} \#\{n:\ X_n^{(N)} \in (M_i, M_{i+1}]\} \le \\ &\le [\frac{N-M_r}{r+1}] + 1 + \sum_{i=R}^{r-1} \frac{M_{i+1}-M_i}{i+1}. \end{aligned}$$

Имеем: для любого I, такого что $r \ge I \ge R$

$$\begin{aligned} C^{(N)} &\le [\frac{N-M_I}{I+1}] + 1 + (\sum_{i=R}^{I-1} + \sum_{i=I}^{r-1}) \frac{M_{i+1}-M_i}{I+1} \le \\ &\le [\frac{N-M_I}{I+1}] + 2 + \sum_{i=R}^{I-1} \frac{M_{i+1}-M_i}{I+1} \le \\ &\le \frac{N}{I+1} + 2 + \sum_{i=R}^{I-1} \frac{M_{i+1}-M_i}{I+1}. \end{aligned}$$

И, наконец,

$$\limsup \frac{C^{(N)}}{N} \le \frac{1}{I+1} \quad I \ge R,$$

что завершает доказательство леммы. □

Вернемся к системе с K очередями.

Обозначим $C(N) = \max_{m+1 \le k \le K} C^{(N_k)}$ $(= o(N)$ по предыдущей лемме). Поэтому прибор успевает завершить "почти все"обслуживания вызовов, ожидающих на последних $K-m$ очередях, и $o(N)$ обслуживаний на остальных станциях за первые $C(N)$ циклов.

Для очередей с номерами $1, \ldots, m$, повторяя конструкцию первой части параграфа для ограниченных стратегий обслуживания, и перенумеровав очереди так что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$, получим следующее представление:

$$Z_N = \sum_{k=m+1}^{K} \sum_{j=1}^{N_k} \sigma_{k,j} + R_w + Z_N^1 + \ldots + Z_N^m + o(N).$$

Здесь число R_w означает общее время переключения за первые $C(N)$ циклов, $R_w = o(N)$ при $N \to \infty$. Поэтому

$$Z_N = \sum_{k=m+1}^{K} N_k C_{\sigma,k} + o(N) + n_m W + \sum_{k=1}^{m} n_k C_k F_k C_{\sigma,k} + o(N),$$

где все числа n_k как в первой части параграфа. Получим окончательно:

$$\lim_N \frac{Z_N}{N} = \max_{1 \le k \le m} \{\frac{p_k}{F_k C_k}\} \times W + \sum_{k=1}^{K} p_k C_{\sigma,k}.$$

То есть утверждение теоремы 7 остается справедливым и для случая неограниченных стратегий обслуживания ($1/F_k = 0$ при $F_k = \infty$).

6. Существование стационарного режима

Рассмотрим произвольную реализацию описанной в параграфе 2 системы поллинга на одном элементарном исходе (детерминированную модель). Перенумеруем маршрут прибора $\Psi^{(1)}$ в пустой системе следующим образом. Присвоим номер 0 времени переключения, которое прибор осуществляет в момент времени $+0$, следующему времени переключения присвоим номер 1, и т.д., предыдущему — номер -1, и т.д. Получим последовательность времен переключения $\{w_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$.

Пусть, по-прежнему, $\Psi_0^{(1)} = \min\{\Psi_l^{(1)} : \quad \Psi_l^{(1)} > 0\}$ — момент окончания нулевого цикла, $\Psi_l^{(1)}$, $l \in \mathbf{Z}$ — момент окончания цикла с номером l. Введем следующие обозначения:

a_i — момент начала i-го времени переключения в пустой системе, $a_{i+1} = a_i + w_i$;

$E_l = \Psi_l^{(1)} - \Psi_{l-1}^{(1)}$ — общее время переключения в l-ом цикле.

Для точечного процесса $\Psi^{(-n)} = \Psi^{(1)} - \sum_{j=-n}^{0} \sigma_j$ сохраним введенную выше нумерацию времен переключения и циклов: i-ое время переключения для процесса $\Psi^{(-n)}$ начинается в момент времени $a_i^{(-n)} \stackrel{\text{def}}{=} a_i - \sum_{j=-n}^{0} \sigma_j$, l-ый цикл заканчивается в момент $\Psi_l^{(-n)} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_l^{(1)} - \sum_{j=-n}^{0} \sigma_j$.

Будем называть $[-n, 0]$-моделью систему поллинга, в которую поступают $n+1$ вызовов с номерами $-n, -n+1, \ldots, 0$ из входного потока (см. параграф 4), и прибор перемещается в соответствии с маршрутом $\Psi^{(-n)}$. Момент опустошения $[-n, 0]$-модели от всех поступивших вызовов обозначим $\tau_{[-n,0]}$.

Введенная модель обладает следующими очевидными свойствами:

1. $\tau_{[-n,0]} < \infty$;
2. $\tau_{[-n,0]}$ совпадает с одним из моментов $a_i, i \geq 1$, скажем, с $a_{M_{[-n,0]}}$;
3. $\tau_{[-n,0]} \leq \widetilde{X}_{[-n,0]}$, где $\widetilde{X}_{[-n,0]}$, как и в параграфе 4, обозначает момент окончания последнего непустого цикла.

Обозначим $\delta_{[-n,0]}$ номер последнего времени переключения в $[-n, 0]$-модели до момента $\tau_{[-n,0]}$. Очевидно, $\delta_{[-n,0]} = M_{[-n,0]} - 1$, поскольку начиная с момента $\tau_{[-n,0]}$ маршрут прибора в $[-n, 0]$-модели совпадает с $\Psi^{(1)}$.

Лемма 8. *Последовательности $\tau_{[-n,0]}, \delta_{[-n,0]}$ не убывают по n.*

Доказательство. Пусть $n \geq 0$. Введем $[-n-1,0]'$-модель, отличающуюся от $[-n-1,0]$-модели только моментом прихода вызова с номером $-n-1$. Определим T'_{-n-1} так, чтобы обслуживание $-n-1$-го вызова было закончено до момента T_{-n} : пусть

$$l_0 = \max\{l :\ \Psi_l^{(-n-1)} + \sigma_{-n-1} \equiv \Psi_l^{(-n)} < T_{-n}\},$$

$$l_1 = \max\{l \leq l_0 :\ l -$$

$$\mu_{-n-1}\},$$

$$j_0 = \max\{j :\ a_j^{(-n-1)} \leq \min\{T_{-n-1}, \Psi_{l-1}^{(-n-1)}\}.$$

Достаточно теперь положить $T'_{-n-1} = a_{j_0}^{(-n-1)}$.

Сравним модели $[-n-1,0]'$ и $[-n-1,0]$. По теореме 4 параграфа 3, $\tau'_{[-n-1,0]} \leq \tau_{[-n-1,0]}$. Поскольку общее время работы прибора до момента опустошения для этих моделей одинаково, то суммарное время переключения за интервал времени $[a_{j_0}^{(-n-1)}, \tau'_{[-n-1,0]}]$ в первой модели меньше, чем за время $[a_{j_0}^{(-n-1)}, \tau_{[-n-1,0]}]$ во второй модели. Поэтому и $\delta'_{[-n-1,0]} \leq \delta_{[-n-1,0]}$.

Сравнивая $[-n-1,0]'-$ и $[-n,0]$-модели, получим :

$$\tau'_{[-n-1,0]} \equiv \tau_{[-n,0]}\ , \delta'_{[-n-1,0]} \equiv \delta_{[-n,0]},$$

так как $\Psi^{(-n-1)} + \sigma_{-n-1} \equiv \Psi^{(-n)}$, то есть после момента окончания обслуживания $-n-1$-го вызова (который по определению меньше T_{-n}) эти системы работают одинаково. В частности, все переключения прибора после T_{-n} начинаются в одни и те же для двух моделей моменты времени и имеют одинаковые номера. Тем самым утверждение леммы доказано. □

Будем предполагать, что выполнено условие

A_0**:** Существует предел $\lim_{n\to\infty} \tau_{[-n,0]} \equiv \tau\ < \infty$.

Если выполнено условие A_0 и $a_i \to \infty$ при $i \to \infty$, то τ совпадает с одним из $a_i,\ i \geq 1$. Более того, справедливо следующее утверждение, являющееся прямым следствием леммы 8 и условия A_0:

Следствие 7. *1. Найдутся $N \geq 1,\ M \geq 1$, такие что для любого $n \geq N$*

$$\tau_{[-n,0]} = \tau = a_M;$$

2. Существует предел $\lim_{n\to\infty} \delta_{[-n,0]} \equiv \delta \leq M < \infty$;

3. Найдется N_0, такое что $\delta_{[-n,0]} \equiv \delta$ для любого $n \geq N_0$;

4. $\delta = M - 1$.

Для $[-n,0]$-модели обозначим $\widehat{a}_i^{(-n)}$ реальный момент начала i-го переключения. По определению,

$$\widehat{a}_i^{(-n)} = a_i^{(-n)},\ a_i^{(-n)} < T_{-n},$$

$$\widehat{a}_i^{(-n)} = a_i,\ i \geq M_{[-n,0]}.$$

Введем следующее обозначение: для любой станции k, для любого номера переключения i пусть

$G^k_{i,[-n,0]}$ — количество вызовов, которые должны быть обслужены на станции k после момента $\widehat{a}_i^{(-n)}$.

Повторяя рассуждения леммы 8 и используя утверждение 3 теоремы 4, получим

Следствие 8. *Для любых i,k последовательность $\{G^k_{i,[-n,0]}\}$ не убывает по n.*

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 9. *Последовательность $G^k_{\delta,[-n,0]}$ ограничена сверху.*

Доказательство. Пусть $n \geq \max\{N, N_0\}$, и k' таково, что $G^{k'}_{\delta,[-n,0]} > 0$, $r_0 = \min\{j \geq 0\ :\ \mu_{-j} = k'\}$. Очевидно по определению дисциплин обслуживания, что в $[-n,0]$-модели при $n \geq r_0$ обслуживание последней группы вызовов на станции k' после времени $\widehat{a}_\delta^{(-n)}$ не может начаться до момента T_{-r_0}. Поэтому общее время обслуживания за последний визит прибора на эту станцию не больше $\tau - T_{-r_0}$. Тогда для всякого k

$$n_0 = \min\{l \geq 0\ :\ \sum_{j=-l}^{0} \sigma_j I(\mu_j = k') \geq \tau - T_{-r_0}\}\ \geq G^k_{\delta,[-n,0]},$$

что и требовалось доказать. □

В силу монотонности и ограниченности целочисленная последовательность $G^k_{\delta,[-n,0]}$ обладает свойствами:

1. Для любого k существует $G^k_\delta = \lim_{n\to\infty} G^k_{\delta,[-n,0]} < \infty$ и найдется $N_1 < \infty$, что при всех $n \geq N_1$, $k = 1,\dots K$

$$G^k_\delta = G^k_{\delta,[-n,0]}.$$

2. По определению, лишь одна из G^k_δ отлична от нуля: $G^{k_0}_\delta > 0$, $G^k_\delta = 0$ при $k \neq k_0$ Тогда в $[-n,0]$-модели при любом $n \geq \max\{N, N_0, N_1\}$ последнее обслуживание проходит на станции k_0, и в течение этого визита прибор обслуживает $G^{k_0}_\delta$ вызовов.

3. Для тех же n: $\widehat{a}_\delta^{(-n)} \equiv \widehat{a}_\delta = a_{\delta+1} - \sum_{j=-m_\delta}^0 \sigma_j I(\mu_j = k_0) - w_\delta$ не зависит от n, где $m_\delta = \min\{l \ : \ \sum_{j=-l}^0 I(\mu_j = k_0) = G_\delta^{k_0}\}$, $-m_\delta$ — номер вызова, который обслуживается первым в последней группе $G_\delta^{k_0}$ вызовов.

Рассмотрим теперь последовательность $G^k_{\delta-1,[-n,0]}$ и покажем справедливость леммы 9 и свойств 1 — 3 для этой последовательности.

Лемма 10. *Последовательность* $G^k_{\delta-1,[-n,0]}$ *ограничена сверху.*

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично лемме 9. Пусть $n \geq \max\{N, N_0, N_1\}$, $G^{k'}_{\delta-1,[-n,0]} > 0$, $r_0 = \min\{j \geq G_\delta^{k'} \ : \ \mu_{-j} = k'\}$. По-прежнему в $[-n,0]$-модели при $n \geq r_0$ обслуживание группы вызовов на станции k' после времени $\widehat{a}_{\delta-1}^{(-n)}$ не может начаться до момента T_{-r_0}, и общее время обслуживания оставшихся $G^{k'}_{\delta-1,[-n,0]}$ вызовов не больше $\tau - T_{-r_0}$. Тогда для всякого k

$$n_0 = \min\{l \geq G_\delta^{k'} \ : \ \sum_{j=-l}^{0} \sigma_j I(\mu_j = k') \geq \tau - T_{-r_0}\} \ \geq G^k_{\delta-1,[-n,0]},$$

что и требовалось доказать. □

Поскольку последовательность $G^k_{\delta-1,[-n,0]}$ целочисленная, не убывает и ограничена сверху, выполнены следующие утверждения:

1. Для любого k существует $G^k_{\delta-1} = \lim_{n\to\infty} G^k_{\delta-1,[-n,0]} < \infty$ и найдется $N_2 < \infty$, что при всех $n \geq N_2$, $k = 1, \dots K$

$$G^k_{\delta-1} = G^k_{\delta-1,[-n,0]}.$$

2. Не более чем одна из $G^k_{\delta-1}$ отлична от нуля.

3. При $n \geq \max\{N, N_0, N_1, N_2\}$ величина $\widehat{a}_{\delta-1}^{(-n)} \equiv \widehat{a}_{\delta-1}$ не зависит от n.

Положим $m_0 = \max\{m \geq 0 \ : \ \widehat{a}_{\delta-m} \geq 0\}$. Поскольку $\widehat{a}_{\delta-m_0} \leq a_{\delta-m_0}$, то $m_0 < M$. Продолжим предыдущие рассуждения для $G^k_{\delta-2,[-n,0]}, \dots, G^k_{\delta-m_0-1,[-n,0]}$. Получим после m_0+1 шага, что в $[-n,0]$-модели при любом $n \geq \bar{N} = \max\{N, N_0, N_1, N_2, \dots, N_{m_0+2}\}$ и $t \geq 0 > \widehat{a}_{\delta-m_0-1}$ состояние системы в момент t не зависит от n.

Обозначим

$Q^k_{[-n,0]}(t)$ — длину очереди на станции k в момент t;

$W^k_{[-n,0]}(t)$ — остаточное время обслуживания вызова на станции k в момент t;

$j_{[-n,0]}(t)$ — номер времени переключения, которое прибор совершает в момент t, либо предыдущего переключения, если в момент t прибор занят обслуживанием.

Сформулируем конечный результат.

Теорема 8. *При выполнении условия* A_0 *существует процесс*

$$\{Q^k(t), W^k(t), j(t), t \geq 0\}$$

и числа $\bar{N}, M < \infty$ *такие что*

1. $\{Q^k_{[-n,0]}(t), W^k_{[-n,0]}(t), j_{[-n,0]}(t)\} = \{Q^k(t), W^k(t), j(t)\}$ *для любых* $k = 1, \ldots, K$, $t \geq 0$, $n \geq \bar{N}$;

2. $Q^k_{[-n,0]}(t) = W^k_{[-n,0]}(t) = Q^k(t) = W^k(t) = 0$ *для любых* $k = 1, \ldots, K$, $t \geq a_M$, $n \geq 0$.

Вернемся к стохастической модели системы поллинга, описанной в параграфах 2,4. Поскольку

$$\tau_{[-n,0]} \leq \widetilde{X}_{[-n,0]} \text{ п.н.},$$

то при выполнении условия $\lambda\gamma(0) < 1$ по теореме 6

$$\tau \leq \lim \widetilde{X}_{[-n,0]}(T) < \infty \text{ п.н.},$$

то есть условие A_0 выполнено п.н. и теорема 8 обеспечивает существование и каплинг-сходимость к стационарному режиму.

Справедливость дополнительного предположения: $a_i \to \infty$ при $i \to \infty$ очевидна в силу стационарности $\Psi^{(1)}$. Таким образом, доказательство теоремы 3 закончено.

Приложение

Пусть $\{\xi_i\}, i \in \mathbf{N}$ — стационарная последовательность собственных случайных величин. Зададим стационарную последовательность случайных величин $\{\phi_i\}, i \in \mathbf{N}$ следующим образом:

$$\phi_i = \xi_i - \xi_{i+1}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. *Если* $\mathbf{E}(\phi_1^+) < \infty$, *то* $\mathbf{E} \mid \phi_1 \mid < \infty$, $\mathbf{E}\phi_1 = 0$.

Доказательство.

1. Покажем, что

$$\frac{\phi_1 + \ldots + \phi_m}{m} \xrightarrow{\text{p}} 0 \ \ m \to \infty.$$

Действительно,

$$\frac{\phi_1 + \ldots + \phi_m}{m} = \frac{\xi_1}{m} - \frac{\xi_{m+1}}{m} \xrightarrow{\text{p}} 0,$$

так как соответствующие с.в. собственые.

2. Покажем, что $\mathbf{E} \mid \phi_1 \mid < \infty$. Пусть $N > 0$, $\widetilde{\phi}_i = \max\{\phi_i, -N\} \geq -N$ ограничены снизу, следовательно, найдется случайная величина $\widetilde{\phi}$, такая что $\mathbf{E} \mid \widetilde{\phi} \mid < \infty$, $\mathbf{E}\widetilde{\phi} = \mathbf{E}\widetilde{\phi}_1$ и

$$\frac{\widetilde{\phi}_1 + \ldots + \widetilde{\phi}_m}{m} \to \widetilde{\phi} \,..$$

Предположим, найдется N такое что $\mathbf{E}\widetilde{\phi} = \mathbf{E}\widetilde{\phi}_1 < 0$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ $\mathbf{P}(\widetilde{\phi} < -\varepsilon) = \Delta > 0$, или

$$\mathbf{P}(\lim_m \frac{\widetilde{\phi}_1 + \ldots + \widetilde{\phi}_m}{m} < -\varepsilon) = \Delta > 0.$$

Тогда найдется m_0, что при всех $m \geq m_0$

$$\mathbf{P}(\frac{\widetilde{\phi}_1 + \ldots + \widetilde{\phi}_m}{m} \leq \frac{-\varepsilon}{2}) \geq \frac{\Delta}{2} > 0.$$

Но поскольку $\phi_i \leq \widetilde{\phi}_i$, то

$$\mathbf{P}(\frac{\phi_1 + \ldots + \phi_m}{m} \leq \frac{-\varepsilon}{2}) \geq \frac{\Delta}{2} > 0,$$

что противоречит утверждению, доказанному в пункте 1. То есть $\mathbf{E}\widetilde{\phi}_1 \geq 0$ для любого N и $\mathbf{E}\phi_1 \geq 0$. Тогда, очевидно,

$$\mathbf{E}\phi_1^- \leq \mathbf{E}\phi_1^+ < \infty,$$

откуда следует требуемое утверждение.

3. Покажем, что $\mathbf{E}\phi_1 = 0$. Пусть, напротив, $\mathbf{E}\phi_1 > 0$. Тогда найдется случайная величина ϕ, такая что $\mathbf{E}\phi = \mathbf{E}\phi_1 > 0$ и

$$\frac{\phi_1 + \ldots + \phi_m}{m} \xrightarrow{..} \phi.$$

Поэтому для некоторого $\varepsilon > 0$ $\mathbf{P}(\widetilde{\phi} > \varepsilon) = \Delta > 0$, Тогда найдется m_0, что при всех $m \geq m_0$

$$\mathbf{P}(\frac{\phi_1 + \ldots + \phi_m}{m} > \frac{\varepsilon}{2}) \geq \frac{\Delta}{2} > 0,$$

что противоречит утверждению, доказанному в пункте 1. Тем самым лемма доказана. $\square$

ЗБЧ для случайно-субаддитивных стохастических последовательностей.

Изложенные далее результаты являются обобщением соответствующих свойств для субаддитивных последовательностей ([5]) и используются в параграфе 4.

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ — произвольное метрическое пространство. Рассмотрим две последовательности случайных величин: $\{\xi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ со значениями в $\mathcal{X}$ и вещественнозначную последовательность $\{\psi_n\}_{-\infty}^{\infty}$. Будем предполагать следующее:

(a) $\{\xi_n\}$ — стационарная эргодическая последовательность;

(b) $\{\psi_n\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин и $\mathbf{P}(\psi_1 > 0) > 0$;

(c) эти последовательности взаимно независимы.

Положим

$$\mathcal{F}_{\xi} = \sigma\{\xi_n; -\infty < n < \infty\};$$
$$\mathcal{F}_{\psi} = \sigma\{\psi_n; -\infty < n < \infty\};$$
$$\mathcal{F}_{\xi,\psi} = \sigma\{(\xi_n, \psi_n); -\infty < n < \infty\}.$$

Пусть θ_ξ и θ_ψ — два сохраняющих меру преобразования сдвига $\mathcal{F}_{\xi,\psi}$-измеримых случайных величин:

если $S = h(\ldots, \xi_{n-1}, \xi_n \xi_{n+1}, \ldots; \ldots, \psi_{m-1}, \psi_m, \psi_{m+1}, \ldots)$,

то $\theta_\xi \circ S = h(\ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots; \ldots, \psi_{m-1}, \psi_m, \psi_{m+1}, \ldots)$

и $\theta_\psi \circ S = h(\ldots, \xi_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots; \ldots, \psi_m, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \ldots)$.

Для $n \geq 1$, θ_ξ^n и θ_ψ^n означают итерации θ_ξ и θ_ψ, соответственно; θ_ξ^{-n} и θ_ψ^{-n} — преобразования сдвига, обратные к θ_ξ^n и θ_ψ^n ; $\theta_\xi^0 \equiv \theta_\psi^0 \equiv I$ — тождественное преобразование.

Для каждого $k \geq 1$, пусть $Z_{[1,k]}$ — неотрицательная случайная величина и $\eta_{[1,k]} = \min\{n \geq 1 : \quad \psi_1 + \cdots + \psi_n \geq Z_{[1,k]}\}$. Положим $\eta_{[1,0]} \equiv 0$.

Будем предполагать, что:

(d) Для любых числа $l \geq 1$ и борелевского множества B, событие $\{Z_{[1,k]} \in B; \eta_{[1,k]} \leq l\}$ принадлежит σ-алгебре $\sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_k; \psi_1, \ldots, \psi_l\}$.

Для $m \leq n$ введем пару случайных величин

$$(Z_{[m,n]}, \eta_{[m,n]}) = \theta_\xi^{m-1} \circ \theta_\psi^{m-1} (Z_{[1,n-m+1]}, \eta_{[1,n-m+1]}),$$

и, для $r \leq m \leq n$, пару случайных величин

$$(Z_{[m,n]}^r, \eta_{[m,n]}^r) = \theta_\xi^{m-r} \circ \theta_\psi^{\eta_{[r,n-1]}} (Z_{[r,n-m+1]}, \eta_{[r,n-m+1]}).$$

Из предположений (a) – (d) следует, что последовательности $\{(Z_{[m,m+k]}^r, \eta_{[m,m+k]}^r), k \geq 0\}$ и $\{(Z_{[1,1+k]}, \eta_{[1,1+k]}), k \geq 0\}$ одинаково распределены. Положим

$$Z_1 = Z_{[1,1]}; \quad \eta_1 = \eta_{[1,1]}; \quad Z_2 = Z_{[2,2]}^1; \quad \eta_2 = \eta_{[2,2]}^1$$

и, для $k \geq 3$,

$$(Z_k, \eta_k) = \theta_\xi \circ \theta_\psi^{\eta_1} \circ (Z_{k-1}, \eta_{k-1}).$$

Из предположений (a) – (d) следует

Предложение 1. Последовательность $\{(Z_k, \eta_k), k \geq 1\}$ стационарная и эргодическая.

Пусть выполнены следующие предположения:

(e) $d \equiv \mathbf{E}Z_1 < \infty$;

(f) "Случайная"субаддитивность: для любых $r \leq m < n$,

$$Z_{[r,n]} \leq Z_{[r,m]} + Z^r_{[m+1,n]} ..$$

Сформулируем простые следствия, вытекающие из предположений (a) – (f).

Следствие 9. $Z_{[1,n]} \leq \sum_{i=1}^n Z_i \equiv S_n$ *для любого* $n \geq 1$.

Следствие 10. $\mathbf{E}Z_{[1,n]} \equiv g_n < \infty$ *и* $g_{n+m} \leq g_n + g_m$ *для всех* $n \geq 1, m \geq 1$.

Следствие 11. *Пусть* $\gamma = \inf_{n\geq 1} g_n/n$. *Тогда* $\gamma < \infty$ *и* $\gamma = \lim_n g_n/n$.

(Доказательство последнего утверждения см., например, в [5]).

Следствие 12. *Пусть* $\Phi = \limsup Z_{[1,n]}/n$. *Тогда* $\Phi \leq d$ *п.н.*

Доказательство. Так как $S_n/n \to d$ п.н., то $\limsup Z_{[1,n]}/n \leq \lim S_n/n = d$ п.н. □

Следствие 13. Φ *измеримо относительно* $\mathcal{F}_\xi$.

Доказательство. Поскольку $Z_{[1,n]} \leq Z_{[1,m]} + Z^1_{[m+1,n]}$ п.н., то для каждого фиксированного $m \geq 1$ и для $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\Phi = \limsup Z_{[1,n]}/n \leq \limsup Z^1_{[m+1,n]}/n = \\ = \limsup Z^1_{[m+1,n]}/(n-m+1) \equiv \Phi^1_{[m+1]}.\end{aligned}$$

Так как $\Phi \stackrel{\mathrm{D}}{=} \Phi^1_{[m+1]}$, то $\Phi = \Phi^1_{[m+1]}$ п.н. Для любого $\delta > 0$, $k \geq 1$ и $A \in \sigma\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$, выберем $m >> 1$, такое что $\mathbf{P}(\eta_{[1,m]} \geq k) \geq 1 - \delta$. Тогда для произвольного борелевского множества B

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\Phi \in B; A) &\leq \sum\nolimits_{i=k}^{\infty} \mathbf{P}(\Phi^1_{[m+1]} \in B; A; \eta_{[1,m]} = i) + \delta \\ &= \sum\nolimits_{i=k}^{\infty} \mathbf{P}(\Phi^1_{[m+1]} \in B) \times \mathbf{P}(A; \eta_{[1,m]} = i) + \delta \leq \\ &\leq \mathbf{P}(\Phi \in B) \times \mathbf{P}(A) + \delta\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathbf{P}(\Phi \in B; A) \geq \ldots \geq \mathbf{P}(\Phi \in B) \times \mathbf{P}(A) - \delta.$$

□

Следствие 14. $\Phi = \gamma$ п.н.

Доказательство. Покажем, что $\Phi = \mathrm{const}$ п.н. Действительно, $\Phi = \Phi^1_{[2]} = \theta^1_\xi \times \theta_\psi^{\eta[1,1]} \times \Phi^1_{[1]} \equiv \theta^1_\xi \times \Phi$ п.н. Поэтому Φ $\mathcal{F}_\xi$-инвариантная случайная величина и $\Phi = \mathrm{const}$ п.н.

Замечание. Последовательность S_n/n равномерно интегрируема, поскольку $S_n/n \to d$ п.н. и $\mathbf{E}S_n/n = d$ для любого n. Покажем, что $\gamma \le \Phi$ п.н. Последовательность $\{Z_{[1,n]}/n\}$ равномерно интегрируема. Поэтому

$$\gamma = \limsup \mathbf{E}Z_{[1,n]}/n \le \mathbf{E} \limsup Z_{[1,n]}/n = \Phi \text{ п.н.}$$

Покажем, наконец, что $\Phi \le g_k/k$ для любого k. Зафиксируем k и определим последовательность $\{Z^{(k)}_n\}$:

$$Z^{(k)}_1 = Z_{[1,k]}, \quad Z^{(k)}_2 = Z^1_{[k+1,2k]}$$

и для $l \ge 3$

$$Z^{(k)}_l = \theta_\xi \times \theta^{\eta_{[1,k]}} \times Z^{(k)}_{l-1}.$$

Если $km < n \le k(m+1)$, то $Z_{[1,n]} \le \sum_{l=1}^m Z^{(k)}_l$ п.н. и

$$\limsup Z_{[1,n]}/n \le \limsup [\sum_{l=1}^m Z^{(k)}_l]/k(m-1) = g_k/k \,..$$

□

Следствие 15. $Z_{[1,n]}/n \to \Phi$ *по вероятности.*

Доказательство. Пусть $\Phi_{[1,n]} = \sup_{m\ge n} Z_{[1,m]}/m$. Последовательность $\{\Phi_{[1,n]}\}_{n\ge1}$ не возрастает и $\Phi_{[1,n]} \to \Phi$ п.н. при $n \to \infty$. Поэтому

$$\Phi_{[1,n]} \times I\{\Phi_{[1,n]} \le \Phi + \epsilon\} \to \Phi$$

п.н. и

$$\mathbf{P}(Z_{[1,n]}/n \ge \Phi + \epsilon) \le \mathbf{P}(\Phi_{[1,n]} \ge \Phi + \epsilon) \to 0.$$

Предположим, найдется $0 < \delta < \Phi$, такое что $\limsup \mathbf{P}(Z_{[1,n]}/n \le \Phi - \delta) > 0$. Тогда можно выбрать подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой существует

$$\lim_k \mathbf{P}(Z_{[1,n_k]}/n_k \le \Phi - \delta) \equiv p > 0.$$

Выберем $q < \delta p$ и $x_0 >> 1$ такие что

$$\sup_n \mathbf{E}\{Z_{[1,n]}/n \times I(Z_{[1,n]}/n > x_0\} \le q$$

и $\epsilon > 0 : \epsilon \times (1-p) + q < \delta p$.

Определим для $n \geq 1$ последовательность случайных величин

$$\begin{aligned}\beta_n &= (\Phi - \delta) \times I(Z_{[1,n]}/n \leq \Phi - \delta) + \\ &+ (\Phi + \epsilon) \times I(\Phi - \delta < Z_{[1,n]}/n \leq \Phi + \epsilon) + \\ &+ x_0 \times I(\Phi + \epsilon < Z_{[1,n]}/n \leq x_0) + \\ &+ Z_{[1,n]}/n \times I(Z_{[1,n]}/n > x_0).\end{aligned}$$

Очевидно, что $Z_{[1,n]}/n \leq \beta_n$ п.н. Но

$$\begin{gathered}\mathbf{E}Z_{[1,n_k]}/n_k \leq \mathbf{E}\beta_{n_k} \leq (\Phi - \delta) \times p + (\Phi + \epsilon) \times (1 - p) + \\ x_0 \times \mathbf{P}(Z_{[1,n_k]}/n_k \geq \Phi + \epsilon) + q \to (\Phi - \delta) \times p + \\ (\Phi + \epsilon) \times (1 - p) + q = \Phi - \delta \times p + \epsilon \times (1 - p) + q < \Phi\end{gathered}$$

при $k \to \infty$. Пришли к противоречию. То есть $Z_{[1,n]}/n \to \Phi$ по вероятности. □

Список литературы

[1] H.Levy, M.Sidi, O.J.Boxma. Dominance relations in polling systems // Queueing Systems.- 1990.-V.6.- P.155-171.

[2] A.Borovkov, R.Schassberger. Ergodicity of a polling network // Stoch. Proc.Appl.-1994.-V.50.-P.253-262.

[3] L.Massoulie. Stability of non markovian polling systems // Proceedings of the conference on applied probability. Paris, 1993.

[4] F.Baccelli, S.Foss. On the saturation rule for the stability of queues. INRIA Report No 2015, Septembre 1993.

[5] J.F.C.Kingman. Subadditive ergodic theory. Ann.Probab.-1973.-V.1.-P.883-909.

[6] F.Baccelli, P.Bremaud. Elements of Queueing Theory. Springer-Verlag, 1994.