ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
(6-й семестр)
Лектор — Артем Павлович Ковалевский

I. Теория вероятностей

1. Понятие вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Задача о встрече. События, операции над ними. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

2. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Размещение частиц по ячейкам. Статистики Максвелла—Больцмана, Бозе—Эйнштейна, Ферми—Дирака. Гипергеометрическое распределение.

3. Независимые события. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Время ожидания в схеме Бернулли.

4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

5. Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы распределений: дискретный, абсолютно непрерывный, смешанный.

6. Дискретные распределения. Преобразования дискретных случайных величин. Основные семейства дискретных распределений.

7. Абсолютно непрерывные распределения. Преобразования случайных величин с абсолютно неперывным распределением. Основные семейства абсолютно непрерывных распределений.

8. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.

9. Независимые случайные величины. Критерии независимости. Независимость функций от независимых случайных величин. Формула свертки.

10. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры. Неравенство Маркова. Неравенство Йенсена.

11. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины. Их свойства. Примеры. Неравенство Чебышева.

12. Ковариация. Коэффициент корреляции и его свойства.

13. Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства.

14. Характеристические и производящие функции: определения и свойства. Распределение суммы независимых случайных величин, имеющих гамма-распределение.

15. Распределение Максвелла—Больцмана. Распределение скоростей и энергий молекул газа. Распределение модуля скорости. Среднеквадратическая скорость.

16. Сходимость по распределению. Теорема о непрерывном соответствии. Сходимость по распределению к константе. Закон больших чисел Хинчина. Сходимость с вероятностью единица, ее свойства. Закон больших чисел Колмогорова.

17. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра—Лапласа.

18. Теорема Пуассона.

19. Моделирование случайных величин и векторов.

II. Математическая статистика

1. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко—Кантелли. Гистограмма и полигон частот.

2. Задача оценивания неизвестных параметров. Несмещенность, состоятельность оценок. Выборочные моменты и их свойства. Выборочные асимметрия и эксцесс.

3. Метод моментов. Состоятельность оценок, полученных методом моментов.

4. Метод максимального правдоподобия.

5. Задача линейной регрессии. Оценивание параметров. Модели с полиномиальным и циклическим трендом.

6. Распределения, связанные с нормальным (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера).

7. Лемма Фишера. Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности.

8. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

9. Асимптотические доверительные интервалы.

10. Проверка статистических гипотез, основные понятия. Критерии согласия Колмогорова, хи-квадрат. Связь статистических критериев и доверительных интервалов.

План семинаров

1-й семинар: Классическая вероятностная модель. Комбинаторика.

2-й семинар: Гипергеометрическое распределение. Геометрическая вероятностная модель.

3-й семинар: Независимые события. Схема Бернулли.

4-й семинар: Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

5-й семинар: Распределения случайных величин.

6-й семинар: Преобразования случайных величин.

7-й семинар: Математическое ожидание и дисперсия.

8-й семинар: Ковариация и коэффициент корреляции. Характеристические и производящие функции.

9-й семинар: Предельные теоремы.

10-й семинар: Выборка и выборочные характеристики. Оценивание неизвестных параметров методом моментов.

11-й семинар: Оценивание неизвестных параметров методом максимального правдоподобия. Задачи линейной регрессии.

12-й семинар: Интервальное оценивание.

13-й семинар: Статистические гипотезы и критерии.

Задачи

1.1. Найти вероятность того, что при подбрасывании игральной кости:
а) выпадет число 3;
б) выпадет число, отличное от трех;
в) выпадет число, не меньшее трех.

1.2. Однократно бросается пара игральных костей. Найти вероятность того, что:
а) сумма выпавших очков окажется равна трем;
б) выпадут одинаковые грани;
в) сумма выпавших очков окажется не меньше шести.

1.3. n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность того, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?

1.4. Числа $1;\ 2;\ \ldots;\ n$ расставлены случайным образом. Предполагая, что различные расположения чисел равновероятны, найти вероятность того, что числа $1,\ 2,\ 3$ расположены в порядке возрастания, но не обязательно рядом.

1.5. Найти вероятность того, что в наугад выбранном четырехзначном номере (от 0000 до 9999):
а) все цифры одинаковы;
б) все цифры различны;
в) ровно три одинаковые цифры;
г) только две одинаковые цифры;
д) две пары одинаковых цифр.

1.6. Найти вероятность того, что в наугад выбранном трехзначном автомобильном номере:
а) все цифры одинаковы;

б) все цифры различны;
в) только две одинаковые цифры.

1.7. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что:

а) все выйдут на четвертом этаже;

б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже;

в) все пятеро выйдут на разных этажах?

1.8. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "МАТЕМАТИКА"?

1.9. Буквы, составляющие Вашу фамилию, написали на карточках, затем карточки перетасовали и стали выкладывать в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что в результате получится Ваша фамилия?

1.10. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k-м извлечении. Как изменится эта вероятность, если ключ каждый раз возвращается обратно в карман?

1.11. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекаются 6 карт. Какова вероятность того, что:

а) среди них окажется туз пик;

б) среди них окажется ровно один туз;

в) среди них окажутся ровно две бубновые карты;

г) среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?

1.12. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

1.13. На шахматную доску из 64 клеток ставятся наудачу две ладьи разного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

1.14. В лотерейном билете 20 полей, на 10 из которых расположены буквы слова «автомобиль». Игрок последовательно открывает поля. Если он найдет все буквы слова «автомобиль», открыв 10 полей, он выигрывает автомобиль. Если он найдет их, открыв 11 полей, он выигрывает стоимость половины автомобиля. Найти вероятность выигрыша автомобиля и стоимости половины автомобиля, если поля открываются наудачу.

2.1. Недобросовестный казначей заменил 3 из 50 золотых монет в казне на фальшивые. Султан взвешивает 3 наугад выбранных монеты. Какова вероятность того, что казначей будет уличен?

2.2. Из чисел 1, 2, ..., 49 наугад выбираются и фиксируются 6 чисел, считающиеся выигрышными. Некто, желающий выиграть, наугад называет свои 6 чисел из 49. Какова вероятность, что среди названных им чисел окажется не менее трех выигрышных?

2.3. Группа, состоящая из $2n$ девушек и $2n$ юношей, делится произвольным образом на две равные по количеству подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе окажется поровну юношей и девушек.

2.4. В ящике имеется 4 зеленых, 5 синих и 6 красных шаров. Наугад выбирается два шара. Какова вероятность того, что
а) это будут синий и зеленый шары;
б) шары окажутся одного цвета;
в) шары окажутся различных цветов.

2.5. Из колоды, насчитывающей 52 карты, наугад извлекают 6 карт. Какова вероятность, что среди них будут представители всех четырех мастей?

2.6. В купейный вагон (9 купе по 4 места) продано №+4 билетов. Найти вероятность того, что занятыми оказались ровно пять купе (**через № обозначен номер студента по списку группы**).

2.7. Группа, состоящая из $3n$ юношей и 3 девушек, делится произвольным образом на три равные по количеству подгруппы. Какова вероятность, что все девушки окажутся в разных подгруппах?

2.8. n различных шаров произвольным образом раскладываются по n ящикам. Какова вероятность, что при этом ровно один ящик окажется пустым?

2.9. n студентов произвольным образом расходятся по k аудиториям. Какова вероятность, что в первой аудитории окажется n_1 студентов, во второй — n_2 студентов, ..., в k-й аудитории — n_k студентов, $n_1 + \ldots + n_k = n$?

2.10. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?

2.11. На отрезок единичной длины произвольным образом брошены две точки, которые делят отрезок на три части. Какова вероятность, что из этих частей можно составить треугольник?

2.12. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Обозначим через X, Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.

а) Доказать, что для $0 < u < 1,\ \ 0 < v < 1$ выполнено

$$P\{X < u, Y < v\} = P\{X < u\}P\{Y < v\} = uv;$$

б) найти для $0 < t < 1$ вероятности

$$1)\ P\{|X - Y| < t\}; \quad 2)\ P\{XY < t\};$$

$$3)\ P\{\max(X, Y) < t\}; \quad 4)\ P\{\min(X, Y) < t\};$$

в) найти $P\{X + Y < t\}$ для $0 < t < 2$.

2.13. На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть X, Y, Z — расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность, что из отрезков с длинами X, Y и Z можно составить треугольник?

2.14. Отрезок длины l ломается в произвольной точке. Какова вероятность, что длина наибольшего обломка превосходит $2l/3$?

2.15. Точка бросается наудачу в квадрат. Найти вероятность того, что точка попадет в круг, вписанный в этот квадрат.

2.16. Точка бросается наудачу в треугольник с вершинами в точках (0,0),(2,0) и (0,1). Найти вероятность того, что

а) абсцисса точки окажется больше 1/2;

б) ордината точки окажется больше 1/2.

3.1. Элементы цепи выходят из строя (перегорают) независимо друг от друга с вероятностями по 0,1. Найти вероятность того, что цепь из трех элементов будет пропускать ток при (а) последовательном, (б) параллельном соединении элементов.

3.2. События $A_1, \ \ldots, \ A_n$ независимы, известны вероятности $p_i = P(A_i), \ \ i = 1, \ \ldots, \ n$. Найти вероятность того, что:

а) произойдет ровно одно из A_i;

б) не произойдет ни одно из A_i;

в) произойдет хотя бы одно из A_i.

3.3. Производят 3 независимых случайных перестановки букв Вашей фамилии. Найти вероятность того, что:

а) хотя бы раз получилась Ваша фамилия;

б) каждый раз получалась Ваша фамилия.

Сравнить вероятности, найденные в пунктах (а) и (б).

3.4. Пусть событие A не зависит от самого себя. Доказать, что тогда $P(A)$ равна 0 или 1.

3.5. В шар радиуса R наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

3.6. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?

3.7. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8? Ничьих нет.

3.8. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k-м бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?

3.9. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?

3.10. Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m + l$ успехов, причем l успехов появятся в последних l испытаниях.

3.11. Шахматисты A и B решили сыграть между собой матч. Известно, что A выигрывает каждую партию у B с вероятностью $2/3$, и с вероятностью $1/3$ проигрывает. В связи с этим для победы в матче игроку A нужно набрать 4 очка, а игроку B для победы достаточно набрать 2 очка (за выигрыш в партии дается очко, за проигрыш — 0 очков, ничьих нет). Равны ли шансы на успех?

3.12. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три — в нижний сегмент, и по одной — в оставшиеся три сегмента.

3.13. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех в серии последовательных испытаний Бернулли произойдет на l-м испытании.

3.14. На отрезок [0,10] наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в [0,2], одна — в [2,3] и две — в [3,10].

4.1. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Известно, что две пули из трех попали в цель. Какова вероятность того, что промахнулся C?

4.2. Чтобы найти нужную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в фондах эта книга или нет, и если книга есть в фондах, то с вероятностью 0,5 она не занята другим читателем. Какова вероятность того, что студент найдет книгу, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

4.3. Наудачу выбирают число первых букв от 2 до m из Вашей фамилии (здесь m — общее число букв в фамилии) и осуществляют их случайную перестановку. Найти вероятность того, что в результате получится Ваша фамилия. Найти вероятность того, что выбрали две первых буквы, если известно, что Ваша фамилия получилась.

4.4. Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому, если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n он вытащит «хороший» билет. Какова вероятность вытащить «хороший» билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

4.5. Допустим, что вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, а вероятность поражения цели при k попаданиях равна $1 - q^k$. Какова вероятность того, что цель поражена, если было произведено n выстрелов?

4.6. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% — вторую, 21% — третью и 8% — четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй — кровь первой и второй групп, с третьей — кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность того, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?

4.7. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 3%, и третьего — 1%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 20% телевизоров с первого завода, 30% — со второго и 50% — с третьего?

4.8. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем делается это с вероятностями 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема каждой переданной буквы за две другие равны 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

4.9. Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин — дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.

4.10. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Затем из второй урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

4.11. Некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, где $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, а число λ положительно. Вероятность развития потомка из яйца равна p. Какова вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков?

4.12. В условиях предыдущей задачи у насекомого развилось 10 потомков. Какова вероятность того, что при этом было отложено 20 яиц?

5.1. Игрок выигрывает очко, если при подбрасывании монеты выпадает герб, и проигрывает очко в противном случае. Построить график функции распределения суммарного выигрыша игрока после двух бросаний монеты.

5.2. Построить график функции распределения числа подбрасываний симметричной монеты, производимых до выпадения первого герба включительно.

5.3. Выразить через функцию распределения случайной величины X вероятности следующих событий: $\mathbf{P}\{a < X < b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X < b\}$, $\mathbf{P}\{a < X \le b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X \le b\}$.

5.4. Могут ли функции

(а) $f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, (б) $f(y) = e^{-y}$, (в) $f(y) = \cos y$, (г) $f(y) \equiv 1$

быть плотностями распределения?

5.5. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(y) = \begin{cases} Cy^2, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти C и функцию распределения случайной величины X.

5.6. На отрезок длины l произвольным образом бросают две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.

5.7. Вычислить функцию гамма-распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ в случае, когда $\lambda = n$ — целое число.

5.8. В круг радиуса R наугад бросают точку. Найти:

(а) функцию распределения и плотность распределения расстояния этой точки до центра круга;

(б) совместную функцию распределения полярных координат точки.

5.9. Точку бросают наудачу в треугольник с вершинами, координаты которых равны (0; 0), (2№ – 15; 0), (0; 15 – 2№). Здесь № — номер студента по списку группы. Найти функции распределения и плотности декартовых координат точки.

5.10. Дискретное совместное распределение случайного вектора $(X,\ Y)$ задается таблицей:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0,2	0,1	0,0
1	0,4	0,0	0,3

Найти (а) одномерные распределения X и Y; (б) закон распределения $X+Y$; (в) закон распределения $Z = Y^2$.

5.11. Какова вероятность того, что значение случайной величины окажется целым, если известно, что она имеет нормальное распределение?

5.12. Случайные величины X, Y, Z независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $1/2$. Найти совместное распределение их суммы и произведения.

5.13. n точек независимо друг от друга бросаются на отрезок $[0;\ a]$. Найти функции распределения и плотности распределения случайных величин (а) Y_1 (крайняя слева точка), (б) Y_n (крайняя справа точка), (в) Y_k (k-я по счету слева точка, $k = 1, ..., n$).

6.1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\ \pi]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \sin X$.

6.2. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \operatorname{tg} X$.

6.3. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(t) = \begin{cases} \theta t^{\theta-1}, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = -\ln X$.

6.4. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbf{P}\{X = y_k\} = \mathbf{P}\{Y = y_k\} = p_k,\ k \geq 1$. Найти $\mathbf{P}\{X = Y\}$.

6.5. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на $[0;\ 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

6.6. Вычислить по формуле свертки плотность распределения суммы независимых случайных величин X и Y, имеющих показательное распределение с параметром 1.

6.7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин (а) $Y_1 = X^2$, (в) $Y_2 = \sin X$.

6.8. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины $\max(0,\ X)$.

6.9. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\ 1]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины Y.

Вариант 1. $Y = (1-X)^{-1}$.
Вариант 2. $Y = 2/X$.
Вариант 3. $Y = X^2/2$.
Вариант 4. $Y = 2\ln(1-X)$.
Вариант 5. $Y = 2^{-X}$.
Вариант 6. $Y = 2X^{-2}$.
Вариант 7. $Y = \arcsin X$.
Вариант 8. $Y = -1/X$.
Вариант 9. $Y = (1-X)^{-2}$.
Вариант 10. $Y = -3/X$.
Вариант 11. $Y = 3/X^3$.
Вариант 12. $Y = -2\ln X$.
Вариант 13. $Y = \operatorname{arctg} X$.
Вариант 14. $Y = 2^{X-1}$.
Вариант 15. $Y = -2/X^2$.

6.10. X и Y независимы, причем $\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = 1/2$, а $\mathbf{P}\{Y < t\} = t,\ 0 < t < 1$. Найти функции распределения случайных величин $X + Y$ и XY.

6.11. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин (а) $Y_1 = [X]$ (целая часть X), (б) $Y_2 = X - [X]$, (в) $Y_3 = X^2$, (г) $Y_4 = \alpha^{-1} \ln X$, (д) $Y_5 = \sqrt{X}$.

6.12. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(t) = (\pi(1+t^2))^{-1}$, $t \in \mathbf{R}$. Найти функцию и плотность распределения случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.

6.13. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие показательные распределения. Найти $\mathbf{P}\{X = 2Y\}$.

6.14. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на $[0; 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\max(X,\, 2Y)$.

7.1. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости.

7.2. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей:
(а) распределение Пуассона;
(б) геометрическое распределение;
(в) равномерное распределение на отрезке $[a;\, b]$;
(г) показательное распределение с параметром α;
(д) гамма-распределение.

7.3. Всего есть $|№ - 7| + 3$ ключей (№— номер студента по списку группы), из них только один подходит к замку. Ключи выбираются наудачу по одной из следующих схем:

а) испытанный ключ в дальнейших испытаниях не участвует;

б) ключ каждый раз выбирается наудачу из всех ключей.

Для каждой схемы найти ряд распределения, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение числа попыток.

7.4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \sin X$, если случайная величина X имеет равномерное распределение на: а) $[0;\, \pi]$; б) $[0;\, 2\pi]$.

7.5. Случайные величины X и Y — декартовы координаты точки, брошенной наудачу в единичный квадрат. Найти математическое ожидание и дисперсию их разности.

7.6. Случайные величины X и Y независимы, X имеет стандартное нормальное распределение, Y имеет распределение Бернулли с параметром $1/3$. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин (а) $2X + 3Y$; (б) $X - 9Y - 1$.

7.7. На отрезок $[0;\, \theta]$ бросают наудачу n точек. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин $X_{(1)}$ — координаты крайней справа точки и $X_{(n)}$ — координаты крайней слева точки.

7.8. Вычислить момент k-го порядка случайной величины, имеющей:
(а) равномерное распределение,
(б) гамма-распределение.

7.9. Случайная величина X принимает натуральные значения с вероятностями $\mathbf{P}\{X = k\} = Ck^{-10}$, $k = 1, 2, \ldots$. Как найти C? Какого порядка моменты существуют у этой случайной величины X?

7.10. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(t) = 3t^{-2}$ при $t \geq 1$. Тогда $\mathbf{E}X^{-1} = \int_1^\infty 3t^{-3}dt = 3/2$, $\mathbf{E}X^{-2} = \int_1^\infty 3t^{-4}dt = 1$, $\mathbf{D}X^{-1} = 1 - (3/2)^2 < 0$. Но известно, что дисперсия отрицательной не бывает. Объяснить противоречие.

8.1. Найти коэффициент корреляции $\rho\,(X, X+Y)$, где X и Y независимы, одинаково распределены и имеют конечную ненулевую дисперсию.

8.2. Точка произвольным образом бросается в круг единичного радиуса. Найти коэффициент корреляции ее декартовых координат.

8.3. Точку бросают наудачу в треугольник с вершинами, координаты которых равны $(0;\ 0)$, $(2№ - 15;\ 0)$, $(0;\ №)$. Здесь № — номер студента по списку группы. Найти коэффициент корреляции декартовых координат точки.

8.4. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти, для каких значений параметра β существует математическое ожидание случайной величины $Y = e^{\beta X}$.

8.5. Вычислить коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$, если двумерное распределение случайного вектора $(X,\ Y)$ задается таблицей:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0,5	0	0
1	0	0,1	0,4

8.6. Найти коэффициент корреляции $\rho\ (X, X^2)$, где X имеет:
(а) стандартное нормальное распределение;
(б) показательное распределение.

8.7. Найти характеристическую и производящую функции случайной величины, принимающей значения 0, 1 и 2 с равными вероятностями.

8.8. Найти характеристическую и производящую функции:
1) бернуллиевского распределения;
2) биномиального распределения;
3) пуассоновского распределения.

8.9. Найти константу C такую, что $X_1^2 + X_2^2$ совпадает по распределению со случайной величиной CY, где $(X_1,\ X_2)$ — вектор с двумерным стандартным нормальным распределением, а Y имеет показательное распределение с параметром № (здесь № — номер студента по списку группы).

8.10. Пусть X — неотрицательная целочисленная случайная величина. Выразить $\mathbf{E}X$ и $\mathbf{D}X$ через производные производящей функции.

8.11. Найти характеристическую функцию:
1) показательного распределения;
2) гамма-распределения;
3) квадрата стандартной нормальной случайной величины;
4) суммы квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин.

8.12. По характеристическим функциям восстановить распределения: $\cos t$, $(1-4it)^{-1}$, $\exp(2it - 2t^2)$.

9.1. Игрок в каждой игре (независимо от результатов других игр) выигрывает 80 рублей с вероятностью 0,1, проигрывает 20 рублей с вероятностью 0,9. Найти, к какой величине сходится средний выигрыш за n игр при $n \to \infty$.

9.2. Пусть $X_1,\ X_2,\ \ldots$ — случайные числа, то есть независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке от 0 до 1. Найти пределы п. н. следующих выражений при $n \to \infty$:

$$\text{а) } \frac{{X_1}^2 + \ldots + {X_n}^2}{n}; \qquad \text{в) } \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+X_1} + \ldots + \frac{1}{1+X_n}\right);$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{{X_1}^2 + \ldots + {X_n}^2}}{n}; \qquad \text{г) } \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)\right).$$

9.3. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены по закону Пуассона с параметром λ. К чему сходится с вероятностью единица последовательность

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)^2 \quad ?$$

9.4. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0.2, 4 с вероятностью 0.4, 3 с вероятностью 0.3 и 2 с вероятностью 0.1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.95 лежит средний балл.

9.5. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

9.6. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

9.7. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0.006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 1200 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного родственникам выплачивается 100000 рублей. Какова вероятность того, что:

(а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

(б) его доход превысит 6000000 рублей?

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0.95 доход был не менее 4000000 рублей?

9.8. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее 100 исправных?

9.9. Игральная кость подбрасывается 120 раз. Вычислить приближенно вероятность каждого из двух событий:

Вариант 1. Выпало не менее 10 единиц; выпало не менее 60 четных чисел.

Вариант 2. Выпало не менее 10 шестерок; сумма выпавших чисел меньше 300.

Вариант 3. В сумме выпало не менее 400 очков; сумма выпавших четных чисел не менее 250.

Вариант 4. Выпало менее 20 единиц; выпало не менее 20 двоек.

Вариант 5. Сумма выпавших чисел не меньше 320; тройка выпала не менее 10 раз.

Вариант 6. Пятерка и шестерка выпали всего не менее 20 раз; единица и двойка выпали менее 30 раз.

Вариант 7. Выпало не менее 70 нечетных чисел; выпало не менее 20 пятерок.

Вариант 8. Выпало менее 15 двоек; выпало не менее 60 нечетных чисел.

Вариант 9. Выпало не менее 10 единиц; сумма выпавших чисел не меньше 400.

Вариант 10. В сумме выпало менее 300 очков; сумма выпавших нечетных чисел менее 200.

Вариант 11. Выпало не менее 15 шестерок; выпало менее 20 единиц.

Вариант 12. Сумма выпавших чисел меньше 250; четверка выпала не менее 15 раз.

Вариант 13. Пятерка и шестерка выпали всего менее 20 раз; единица и двойка выпали не менее 25 раз.

Вариант 14. выпало не менее 65 четных чисел; выпало менее 20 шестерок.

Вариант 15. Выпало не менее 15 единиц; выпало не менее 70 четных чисел.

9.10. Сколько в среднем изюминок должны содержать калорийные булочки, чтобы с вероятностью не менее 0,99 в булочке была хотя бы одна изюминка?

9.11. При производстве матрицы каждый из $2 \cdot 10^7$ пикселей может быть поврежден с вероятностью 10^{-7} независимо от других. Какова вероятность того, что будет повреждено более 3 пикселей?

9.12. Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7.2 \cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 5 млн. карточек. Какова вероятность, что никто не угадал все 6 номеров? Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0.9 хотя бы один угадал 6 номеров?

10.1. По данной реализации выборки $\vec{x}$ =(0; 0; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1):

а) построить график реализации эмпирической функции распределения;

б) вычислить реализации выборочного среднего и выборочной дисперсии.

10.2. По реализации выборки 1; 0; 1; 1; 0; 1; 0; 0; 0; 1 вычислить реализации выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочного среднеквадратического отклонения, несмещенной выборочной дисперсии, выборочных асимметрии и эксцесса.

10.3. По данной реализации выборки $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:

а) построить графики эмпирической функции распределения, гистограммы и полигона частот (число промежутков выбрать в соответствии с формулой Стеджеса);

б) вычислить выборочные среднее, дисперсию, асимметрию и эксцесс.

Вариант 1. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 2. (0; 7; 1; 0; -1; 6; -1; 2; 3; 4)
Вариант 3. (8; 2; 3; 3; 1; 5; 5; 2)
Вариант 4. (-1; 4; 1; 1; -1; 0; 3; 2; 3)
Вариант 5. (3; -2; -4; 0; -4; 2; 1; 0; 0; 0)
Вариант 6. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 7. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 8. (3; -4; 1; 2; 2; -6; 5; 3; -4)
Вариант 9. (-2; 2; 4; -2; 7; -3; 0; 2; 0; -1)
Вариант 10. (-1; 3; 1; 0; -3; 8; -3; 2)
Вариант 11. (0; 0; 0; 0; 1; 5; 4; 2; 1; 3)
Вариант 12. (1; -2; 0; 0; -4; 6; -6; -2; 3)
Вариант 13. (1; 2; 8; 8; 4; 1; 1; 2; 3)
Вариант 14. (5; -2; -3; 0; 4; 0; 5; 2)
Вариант 15. (4; 0; 4; 0; 2; 2; 2)

10.4. Пассажир маршрутного такси измерил 8 раз время ожидания такси и получил следующие результаты (в минутах): 8; 4; 5; 4; 2; 15; 1; 6. У него есть две гипотезы относительно графика движения такси: либо график движения соблюдается, и время ожидания имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\ \theta]$, либо график движения не соблюдается, и время ожидания имеет показательное распределение с параметром λ.

а) Вычислить реализации оценок параметров θ и λ, использовав оценки $\widetilde{\theta}_2 = (n+1)X_{(n)}/n$ и $\widetilde{\lambda}_2 = \frac{n-1}{n\overline{X}}$.

б) Построить на одном графике реализацию эмпирической функции распределения и теоретические функции распределения равномерного и показательного законов, в которые вместо неизвестных параметров подставлены реализации их оценок.

в) Построить на одном графике реализацию гистограммы и теоретические плотности распределения равномерного и показательного законов, в которые вместо неизвестных параметров подставлены реализации их оценок.

г) На основании проведенного исследования сделать вывод о том, какая из гипотез выглядит более соответствующей экспериментальным данным.

10.5. Пусть выборка из нормального распределения с параметрами a, σ^2. Вычислить $\mathbf{E}\overline{X}$, $\mathbf{D}\overline{X}$. Какое распределение имеет случайная величина $\overline{X}$?

10.6. Найти математическое ожидание и дисперсию эмпирической функции распределения в точке t, если элементы выборки объема n имеют функцию распределения $F(t)$.

10.7. По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из бернуллиевского распределения B_p с неизвестным параметром $p \in (0;\ 1)$ построить оценки параметра p:

а) по первому моменту;

б) по второму моменту;

в) по произвольному k-му моменту.

Можно ли отдать предпочтение какой-либо из построенных оценок? Исследовать их состоятельность и несмещенность.

10.8. По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из биномиального распределения $B_{m,p}$ построить оценки методом моментов:

а) параметра p по первому и по второму моменту при известном $m > 0$;

б) параметров p и m.

Исследовать состоятельность построенных оценок.

10.9. Методом моментов найти оценку параметра $\alpha > 0$ по выборке из показательного распределения с плотностью $f_\alpha(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $t > 0$. Будет ли оценка несмещенной и состоятельной?

10.10. Используя метод моментов, построить бесконечную последовательность различных оценок параметра θ равномерного распределения на отрезке $[0;\ \theta]$. Будут ли полученные оценки состоятельными?

10.11. С помощью метода моментов построить оценку параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $\theta t^{\theta-1}$ при $t \in [0;\ 1]$.

10.12. Найти оценки параметра по первому и второму моменту.

Вариант 1. Случайные величины принимают значения 0, 1, 2 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X=0\} = (1-p)^2,\ \mathbf{P}\{X=1\} = 2p(1-p),\ \mathbf{P}\{X=2\} = p^2.$$

Вариант 2. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 3. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta} e^{-x^3/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 4. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 5. Случайные величины принимают значения 1, 2, 3 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X=1\} = p^2,\ \mathbf{P}\{X=2\} = 2p(1-p),\ \mathbf{P}\{X=3\} = (1-p)^2.$$

Вариант 6. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta} e^{-x\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 7. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-(\theta+1)/\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Вариант 8. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} (\theta-1) x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Вариант 9. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 10. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 11. Случайные величины принимают значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X=0\} = (1-p)^3,\ \mathbf{P}\{X=1\} = 3p(1-p)^2,$$
$$\mathbf{P}\{X=2\} = 3p^2(1-p),\ \mathbf{P}\{X=3\} = p^3.$$

Вариант 12. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 13. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{\theta} e^{-x^4/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 14. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} e^{-2x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 15. Случайные величины принимают значения 2, 3, 4 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = p^2,\ \mathbf{P}\{X = 3\} = 2p(1-p),\ \mathbf{P}\{X = 4\} = (1-p)^2.$$

10.13. С помощью метода моментов построить оценку параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $2t/\theta^2$ при $t \in [0;\ \theta]$. Исследовать оценку на состоятельность.

10.14. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} 3t^2\theta^{-3}, & t \in [0;\ \theta]; \\ 0, & t \notin [0;\ \theta]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра $\theta > 0$ методом моментов, исследовать ее на несмещенность и состоятельность.

10.15. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод моментов, построить оценки:

а) неизвестного математического ожидания α;

б) неизвестной дисперсии σ^2, если α известно;

в) неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

11.1. По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из бернуллиевского распределения B_p с неизвестным параметром $p \in (0;\ 1)$ построить оценку параметра p методом максимального правдоподобия. (Указание: показать, что вероятность попадания в точку t для элементов выборки равна $f(t,\ p) = p^t(1-p)^{1-t}$, где t может принимать только два значения — 0 и 1). Исследовать состоятельность и несмещенность полученной оценки.

11.2. По выборке из показательного распределения E_α построить оценку максимального правдоподобия параметра $\alpha > 0$. Исследовать состоятельность оценки.

11.3. Найти оценку максимального правдоподобия. Проверить ее состоятельность.

Вариант 1. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta} e^{-x^3/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 2. Случайные величины принимают значения 0, 1, 2 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = (1-p)^2,\ \mathbf{P}\{X = 1\} = 2p(1-p),\ \mathbf{P}\{X = 2\} = p^2.$$

Вариант 3. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 4. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta} e^{-x\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 5. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 6. Случайные величины принимают значения 1, 2, 3 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = p^2, \ \mathbf{P}\{X = 2\} = 2p(1-p), \ \mathbf{P}\{X = 3\} = (1-p)^2.$$

Вариант 7. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 8. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-(\theta+1)/\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Вариант 9. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1) x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Вариант 10. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 11. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 12. Случайные величины принимают значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = (1-p)^3, \ \mathbf{P}\{X = 1\} = 3p(1-p)^2,$$
$$\mathbf{P}\{X = 2\} = 3p^2(1-p), \ \mathbf{P}\{X = 3\} = p^3.$$

Вариант 13. Случайные величины принимают значения 2, 3, 4 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = p^2, \ \mathbf{P}\{X = 3\} = 2p(1-p), \ \mathbf{P}\{X = 4\} = (1-p)^2.$$

Вариант 14. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{\theta} e^{-x^4/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 15. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} e^{-2x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11.4. Построить оценку максимального правдоподобия по выборке из распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t \ge 1; \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Доказать состоятельность полученной оценки.

11.5. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} e^{\theta - t}, & t \ge \theta; \\ 0, & t < \theta. \end{cases}$$

Найти оценку для θ:

а) методом моментов; б) методом максимального правдоподобия.

Будут ли полученные оценки состоятельными? Вычислить смещения оценок и получить исправленные несмещенные оценки.

11.6. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод максимального правдоподобия, построить оценки:

а) неизвестного математического ожидания α;

б) неизвестной дисперсии σ^2, если α известно;

в) неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

11.7. Пусть $Y_i = x_i + \theta + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь $x_i,\ \theta \in \mathbf{R}$. Найти оценку для θ по методу наименьших квадратов. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.8. Для регрессионной модели $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, найти оценки параметров $a,\quad b$ по методу наименьших квадратов. Найти ковариационную матрицу оценок. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.9. По реализации двумерной выборки $x_1 = 1$, $Y_1 = 0$, $x_2 = 2$, $Y_2 = 2,5$, $x_3 = 3$, $Y_3 = 0,5$, найти реализации оценок параметров модели из предыдущей задачи. Вычислить реализацию коэффициента детерминации.

11.10. Пусть $Y_i = \theta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь $x_i,\ \theta \in \mathbf{R}$. Найти оценку для θ по методу наименьших квадратов. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.11. Концентрация лекарства $Y > 0$ в крови пациента обратно пропорциональна массе тела $x > 0$. Найти оценку коэффициента пропорциональности для следующих моделей:

1) $Y_i = \theta/x_i + \varepsilon_i$;

2) $\ln Y_i = \ln(\theta/x_i) + \varepsilon_i$;

$i = 1, \ldots, n$. Найти оценку параметра θ в каждой модели. Найти дисперсию оценки в первой модели и дисперсию логарифма оценки во второй модели.

11.12. Для данной реализации $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ рассмотреть трендовые трехпараметрические модели:

а) модель с синусоидальным трендом

$$Y_j = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi j}{n} + b_1 \sin \frac{2\pi j}{n} + \varepsilon_j;$$

б) модель с квадратическим трендом

$$Y_j = a + bj + cj^2 + \varepsilon_j.$$

Оценки параметров найти по методу наименьших квадратов.

Для каждой из моделей вычислить долю объясненной дисперсии.

Выбрать ту модель, для которой доля объясненной дисперсии является наибольшей. Построить график выбранной линии регрессии.

Вариант 1. -1,8 -6,4 -13,3 -22,2

Вариант 2. 0,6 3,1 3,6 1,6

Вариант 3. 4,8 3,1 0,1 -4,6

Вариант 4. -2,0 0,0 2,8 2,5

Вариант 5. 1,8 -2,6 -9,7 -19,2

Вариант 6. 5,5 0,5 -0,7 2,6

Вариант 7. -1,5 0,1 4,3 10,1

Вариант 8. -3,1 -0,7 2,7 1,7

Вариант 9. -0,4 -4,8 -11,6 -21,2

Вариант 10. 1,6 4,2 5,4 3,0

Вариант 11. 3,9 3,3 -0,1 -5,1

Вариант 12. -3,0 0,0 2,0 2,2

Вариант 13. 2,4 -2,6 -10,0 -19,0

Вариант 14. 5,3 0,2 -0,9 3,3

Вариант 15. 2,2 0,2 3,7 10,5

12.1. Пусть элементы выборки $\vec{X}$ имеют плотность распределения

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1 + (t - \theta)^2)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Здесь θ — неизвестный параметр, $\theta \in \mathbf{R}$. Построить точный доверительный интервал для параметра θ по одному наблюдению ($n = 1$).

12.2. По выборке из распределения Бернулли с параметром p, $0 < p < 1$, построить асимптотический доверительный интервал для параметра p.

12.3. Дана выборка из геометрического распределения с параметром p, $0 < p < 1$. Построить асимптотический доверительный интервал для параметра p.

12.4. По выборке из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$ построить асимптотический доверительный интервал для параметра λ.

12.5. Дана выборка из распределения с плотностью $e^{-|t-a|}/2$, $a \in \mathbf{R}$. Построить асимптотический доверительный интервал для параметра a.

12.6. Известно, что измерения величины a независимы, имеют нормальное распределение с математическим ожиданием a (то есть отсутствует систематическая погрешность) и стандартным отклонением 10 мм. Результаты 4 измерений дали среднее значение 512 мм. Найти доверительный интервал для параметра a уровня 0,95; уровня 0,998.

12.7. Известно, что измерения величины a независимы, имеют нормальное распределение с математическим ожиданием a (то есть отсутствует систематическая погрешность) и стандартным отклонением σ. Результаты 100 измерений эталонной длины 1 м дали выборочное среднее 1,01 м и выборочный второй момент 1,04 м^2. Найти доверительный интервал для стандартного отклонения уровня 0,9; уровня 0,99.

12.8. По выборке объема 25 из нормального распределения подсчитаны выборочное среднее 2,1 и выборочный второй момент 4,42. Построить точные доверительные интервалы уровня 0,95 для параметров нормального распределения.

12.9. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти точечные оценки и доверительные интервалы уровня 0,95 для математического ожидания и дисперсии. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому отклонению, и график оценки плотности распределения.

Вариант 1. 2,3 1,7 2,7 2,0 2,0 1,6
Вариант 2. 1,6 1,9 2,8 2,2 2,2 1,9
Вариант 3. 2,3 2,8 2,7 2,7 2,2 0,8
Вариант 4. 2,0 1,5 2,2 2,1 2,0 2,0
Вариант 5. 2,9 2,3 2,3 1,5 2,1 2,0
Вариант 6. 2,0 1,8 0,9 1,9 1,4 2,0
Вариант 7. 1,9 1,6 2,1 0,7 1,4 2,2
Вариант 8. 3,0 0,4 2,2 0,2 2,6 1,7
Вариант 9. 2,1 1,5 1,8 2,0 1,8 1,4
Вариант 10. 1,5 1,7 2,2 1,7 2,7 2,7
Вариант 11. 1,6 2,1 1,9 1,8 0,5 3,1
Вариант 12. 1,9 2,6 2,1 2,9 1,6 1,0
Вариант 13. 2,4 1,2 2,3 2,9 2,6 1,6
Вариант 14. 2,4 1,5 2,2 2,2 2,0 1,6
Вариант 15. 1,7 2,1 3,2 2,0 3,5 3,1

13.1. Имеется выборка объема 1 из нормального распределения $N_{a,1}$. Проверяются простые гипотезы $\mathrm{H}: \ a = 0$, $\overline{\mathrm{H}}: \ a = 1$. Используется следующий критерий (при заданной постоянной c): $H \Leftrightarrow X_1 \le c$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода как функции от c.

13.2. Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок, для проверки гипотез H: выборка из нормального распределения; $\overline{\text{H}}$: выборка из распределения Пуассона.

13.3. Крупная партия товаров может содержать долю дефектных изделий. Поставщик полагает, что эта доля составляет 3%, а покупатель — 10%. Условия поставки: если при проверке 20 случайным образом отобранных товаров обнаружено не более одного дефектного, то партия принимается на условиях поставщика, в противном случае — на условиях покупателя. Требуется определить:
1) каковы статистические гипотезы, статистика критерия, область ее значений, критическая область;
2) какое распределение имеет статистика критерия, в чем состоят ошибки первого и второго рода и каковы их вероятности.

13.4. Используя конструкции доверительного интервала, построить критерий точного уровня ε для проверки гипотезы $\text{H} : \theta = 1$, если:
а) выборка из нормального распределения с параметрами $\theta, 1$;
б) выборка из нормального распределения с параметрами $1, \theta$.

13.5. Пусть выборка из нормального распределения с параметрами $a, 1$. Для проверки гипотез $\text{H} : a = 0$ против $\overline{\text{H}} : a = 1$ используется следующий критерий: H принимается, если $X_{(n)} < 3$, и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок.

13.6. По критерию Колмогорова и по критерию хи-квадрат Пирсона проверить гипотезу о том, что выборка из равномерного распределения на отрезке [0; 2]. Оценить достигаемый уровень значимости и сделать вывод о том, принимается ли гипотеза на уровне 0,1; на уровне 0,01; на уровне 0,001.
Вариант 1. 0,2 1,3 0,2 1,9 1,5 1,5 1,1 0,5 0,3 1,8 0,5 1,3 0,9 1,9 1,9 2,0
Вариант 2. 1,3 1,5 1,8 1,1 1,4 1,6 0,7 1,4 1,5 0,4 0,1 1,6 0,1 0,9 0,4 1,5
Вариант 3. 1,7 1,5 0,8 1,4 1,3 0,3 0,7 1,2 0,4 0,6 0,6 1,9 1,8 1,3 0,7 0,2
Вариант 4. 0,6 0,5 0,0 0,5 0,5 0,1 0,4 1,1 1,2 1,0 1,8 0,1 1,2 0,0 0,0 1,4
Вариант 5. 1,9 1,3 1,5 0,7 0,0 0,5 0,4 1,6 1,1 1,7 1,9 0,6 1,9 0,8 1,2 0,7
Вариант 6. 1,0 0,9 1,0 0,6 0,0 1,4 1,4 1,2 0,2 1,4 1,7 1,4 0,2 1,9 1,8 1,4
Вариант 7. 1,6 0,6 1,9 0,6 1,2 1,8 1,2 1,1 1,4 0,3 1,5 0,8 1,1 1,4 1,9 1,2
Вариант 8. 1,2 1,3 0,6 1,8 0,1 1,5 1,0 0,5 0,2 0,8 0,6 0,9 1,3 1,9 1,6 0,5
Вариант 9. 1,7 1,1 0,3 0,2 0,5 0,5 1,6 1,4 1,5 1,3 1,6 0,6 1,8 0,8 0,8 0,3
Вариант 10. 1,4 0,7 0,1 0,6 0,5 1,3 0,3 1,6 0,2 0,8 1,1 0,1 1,3 1,1 0,7 1,8
Вариант 11. 0,3 1,8 0,9 0,3 1,9 1,5 0,9 0,0 0,9 1,2 0,4 0,9 0,5 0,6 1,3 0,1
Вариант 12. 0,9 0,9 0,9 1,0 2,0 0,9 0,3 0,3 1,0 0,1 1,5 0,7 0,4 0,5 0,3 2,0
Вариант 13. 0,8 0,7 1,8 0,3 1,0 1,4 1,4 0,9 0,2 1,9 2,0 1,4 0,6 0,7 1,6 0,9
Вариант 14. 1,1 1,2 0,6 1,7 1,1 0,9 0,4 0,0 0,8 1,7 1,8 0,1 1,2 0,6 1,3 0,6
Вариант 15. 1,9 1,7 1,8 1,8 2,0 1,7 0,1 0,1 1,0 0,7 1,8 2,0 1,4 0,0 0,6 1,2

13.7. Вычислить значение статистики Колмогорова по реализации выборки (1,1; 0,4; 0,2; 3,2), если основная гипотеза состоит в том, что распределение элементов выборки — равномерное на [0, 4].

13.8. Вычислить достигнутый уровень значимости критерия Колмогорова, если объем выборки равен 100, а $\sup_{-\infty<t<\infty} |F_n^*(t) - F_0(t)| = 0,2$.

13.9. В экспериментах с селекцией гороха Мендель наблюдал частоты различных видов семян, полученных при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей по теории наследственности приведены в следующей таблице:

Семена	Частота	Вероятность
Круглые и желтые	315	9/16
Морщинистые и желтые	101	3/16
Круглые и зеленые	108	3/16
Морщинистые и зеленые	32	1/16
Σ	n=556	1

Следует проверить гипотезу H о согласовании частотных данных с теоретическими вероятностями (на уровне значимости 0,1) и найти достигнутый уровень значимости.

13.10. При 4040 бросаниях монеты Бюффон получил $\nu_1 = 2048$ выпадений герба и $\nu_2 = n - \nu_1 = 1992$ выпадений решетки. Согласуется ли это с гипотезой о том, что монета правильная, при уровне значимости 0,1? С каким предельным уровнем значимости может быть принята эта гипотеза?

13.11. При $n = 4000$ независимых испытаний события $A1$, $A2$, $A3$, составляющие полную группу, осуществились соответственно 1905, 1015 и 1080 раз. Проверить, согласуются ли эти данные при уровне значимости 0,05 с гипотезой H: $p_1 = 1/2$, $p_2 = p_3 = 1/4$, где $p_j = \mathbf{P}(A_j)$. Найти достигнутый уровень значимости.

13.12. За два года обучения студенты групп A, B и C получили 18, 39 и 33 двойки соответственно. На каком уровне значимости принимается гипотеза о том, что получение двойки в каждой из групп одинаково вероятно? Предполагается, что число студентов во всех группах совпадает в каждый момент времени.

13.13. В таблице приведены числа m_i участков равной площади 0,25 км^2 южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по i попаданий самолетов-снарядов во время второй мировой войны. Проверить согласие опытных данных с законом распределения Пуассона, приняв за уровень значимости 0,05:

i	0	1	2	3	4	7	Итого
m_i	229	211	93	35	7	1	$\Sigma m_i = 576$

Список литературы

1. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. — СПб., 1999. — 223 с.

2. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач и упражнений по математической статистике. — Новосибирск, 2001. — 120 с.

3. *Лотов В.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Новосибирск: НГУ, 2006. — 128 с.

4. *Свешников А.А. и др.* Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. — М., 1970. — 656 с.

5. *Чернова Н.И.* Математическая статистика. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 148 с.

Источники Интернет

1. *Лотов В.И.* Лекции по теории вероятностей и математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/lotov/tv&ms_ff.pdf

2. *Коршунов Д.А., Фосс С.Г.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseProbability2.pdf

3. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач и упражнений по математической статистике.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseStatistics2.pdf

4. *Чернова Н.И.* Лекции по теории вероятностей.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/tv/index.html

5. *Чернова Н.И.* Лекции по математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/ms.html

Программу составил доцент А. П. Ковалевский