ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
(6-й семестр)
Лектор — Артем Павлович Ковалевский

I. Теория вероятностей

1. Понятие вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Задача о встрече. События, операции над ними. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

2. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Размещение частиц по ячейкам. Статистики Максвелла—Больцмана, Бозе—Эйнштейна, Ферми—Дирака. Гипергеометрическое распределение.

3. Независимые события. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Время ожидания в схеме Бернулли.

4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

5. Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы распределений: дискретный, абсолютно непрерывный, смешанный.

6. Дискретные распределения. Преобразования дискретных случайных величин. Основные семейства дискретных распределений.

7. Абсолютно непрерывные распределения. Преобразования случайных величин с абсолютно неперывным распределением. Основные семейства абсолютно непрерывных распределений.

8. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.

9. Независимые случайные величины. Критерии независимости. Функции от независимых случайных величин.

10. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры. Неравенство Маркова. Неравенство Йенсена.

11. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины. Их свойства. Примеры. Неравенство Чебышева.

12. Ковариация. Коэффициент корреляции и его свойства.

13. Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства.

14. Характеристические и производящие функции: определения и свойства. Распределение суммы независимых случайных величин, имеющих гамма-распределение.

15. Распределение Максвелла—Больцмана. Распределение скоростей и энергий молекул газа. Распределение модуля скорости. Среднеквадратическая скорость.

16. Сходимость по распределению. Теорема о непрерывном соответствии. Сходимость по распределению к константе. Закон больших чисел Хинчина. Сходимость с вероятностью единица, ее свойства. Закон больших чисел Колмогорова.

17. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра—Лапласа.

18. Теорема Пуассона.

19. Моделирование случайных величин и векторов.

II. Математическая статистика

1. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко—Кантелли. Гистограмма и полигон частот.

2. Задача оценивания неизвестных параметров. Несмещенность, состоятельность оценок. Выборочные моменты и их свойства. Выборочные асимметрия и эксцесс.

3. Метод моментов. Состоятельность оценок, полученных методом моментов.

4. Метод максимального правдоподобия.

5. Среднеквадратический подход к сравнению оценок. Несравнимые оценки. Эффективные оценки.

6. Асимптотически нормальные оценки. Теорема об асимптотической нормальности оценок методом моментов. Асимптотический подход к сравнению оценок.

7. Задача линейной регрессии. Оценивание параметров. Модели с полиномиальным и циклическим трендом.

8. Распределения, связанные с нормальным (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера).

9. Лемма Фишера. Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности.

10. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

11. Асимптотические доверительные интервалы.

12. Проверка гипотез, основные понятия. Критерии согласия Колмогорова, хи-квадрат. Построение критерия с помощью доверительного интервала.

13. Проверка гипотез в случае нескольких выборок. Критерий Колмогорова—Смирнова однородности двух выборок. Проверка гипотез о совпадении параметров двух нормальных совокупностей. Проверка гипотезы о некоррелированности компонент двумерной нормальной выборки.

План семинаров

1-й семинар: Классическая вероятностная модель. Комбинаторика.

2-й семинар: Гипергеометрическое распределение. Геометрическая вероятностная модель.

3-й семинар: Независимые события. Схема Бернулли.

4-й семинар: Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

5-й семинар: Распределения случайных величин.

6-й семинар: Преобразования случайных величин.

7-й семинар: Математическое ожидание и дисперсия.

8-й семинар: Моменты, ковариация, коэффициент корреляции. Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение.

9-й семинар: Характеристические и производящие функции. Предельные теоремы.

10-й семинар: Выборка и выборочные характеристики. Оценивание неизвестных параметров методом моментов.

11-й семинар: Оценивание неизвестных параметров методом максимального правдоподобия. Задачи линейной регрессии.

12-й семинар: Интервальное оценивание.

13-й семинар: Статистические гипотезы и критерии.

14-й семинар: Статистические критерии для двух выборок.

Задачи

1.1. Буквы, составляющие Вашу фамилию, написали на карточках, затем карточки перетасовали и стали выкладывать в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что в результате получится Ваша фамилия?

1.2. n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность того, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?

1.3. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k-м извлечении.

1.4. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекаются 6 карт. Какова вероятность того, что:

а) среди них окажется туз пик;

б) среди них окажется ровно один туз;

в) среди них окажутся ровно две бубновые карты;

г) среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?

1.5. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

1.6. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что:

а) все выйдут на четвертом этаже;

б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже;

в) все пятеро выйдут на разных этажах?

1.7. Числа $1;\ 2;\ \ldots;\ n$ расставлены случайным образом. Предполагая, что различные расположения чисел равновероятны, найти вероятность того, что числа $1,\ 2,\ 3$ расположены в порядке возрастания, но не обязательно рядом.

1.8. Найти вероятность того, что в наугад выбранном трехзначном автомобильном номере:
а) все цифры одинаковы;
б) все цифры различны;
в) только две одинаковые цифры.

1.9. Однократно бросается игральная кость. Найти вероятность того, что:
а) выпадет число 3;
б) выпадет число, отличное от трех;
в) выпадет число, не меньшее трех.

1.10. Однократно бросается пара игральных костей. Найти вероятность того, что:
а) сумма выпавших очков окажется равна трем;
б) выпадут одинаковые грани;
в) сумма выпавших очков окажется не меньше шести.

1.11. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "МАТЕМАТИКА"?

1.12. Найти вероятность того, что в наугад выбранном четырехзначном автомобильном номере:
а) все цифры одинаковы;
б) все цифры различны;
в) ровно три одинаковые цифры;
г) только две одинаковые цифры;
д) две пары одинаковых цифр.

1.13. На шахматную доску из 64 клеток ставятся наудачу две ладьи разного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

2.1. Из чисел 1, 2, ..., 49 наугад выбираются и фиксируются 6 чисел, считающиеся выигрышными. Некто, желающий выиграть, наугад называет свои 6 чисел из 49. Какова вероятность, что среди названных им чисел окажется не менее трех выигрышных?

2.2. Группа, состоящая из $3n$ юношей и 3 девушек, делится произвольным образом на три равные по количеству подгруппы. Какова вероятность, что все девушки окажутся в разных подгруппах?

2.3. n студентов произвольным образом расходятся по k аудиториям. Какова вероятность, что в первой аудитории окажется n_1 студентов, во второй — n_2 студентов, ..., в k-й аудитории — n_k студентов, $n_1 + \ldots + n_k = n$?

2.4. В купейный вагон (9 купе по 4 места) продано №+4 билетов. Найти вероятность того, что занятыми оказались ровно пять купе (**через № обозначен номер студента по списку группы**).

2.5. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?

2.6. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Обозначим X; Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.

а) Доказать, что для $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ выполнено

$$P\{X < u, Y < v\} = P\{X < u\}P\{Y < v\} = uv;$$

б) найти для $0 < t < 1$ вероятности

$$1)\ P\{|X - Y| < t\}; \quad 2)\ P\{XY < t\};$$

$$3)\ P\{\max(X, Y) < t\}; \quad 4)\ P\{\min(X, Y) < t\};$$

в) найти $P\{X + Y < t\}$ для $0 < t < 2$.

2.7. На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть X, Y, Z — расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность, что из отрезков с длинами X, Y и Z можно составить треугольник?

2.8. На отрезок единичной длины произвольным образом брошены две точки, которые делят отрезок на три части. Какова вероятность, что из этих частей можно составить треугольник?

2.9. Недобросовестный казначей заменил 3 из 50 золотых монет в казне на фальшивые. Султан взвешивает 3 наугад выбранных монеты. Какова вероятность того, что казначей будет уличен?

2.10. Группа, состоящая из $2n$ девушек и $2n$ юношей, делится произвольным образом на две равные по количеству подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе окажется поровну юношей и девушек.

2.11 В ящике имеется 4 зеленых, 5 синих и 6 красных шаров. Наугад выбирается два шара. Какова вероятность того, что

а) это будут синий и зеленый шары;

б) шары окажутся одного цвета;

в) шары окажутся различных цветов.

2.12. n различных шаров произвольным образом раскладываются по n ящикам. Какова вероятность, что при этом ровно один ящик окажется пустым?

2.13. Из колоды, насчитывающей 52 карты, наугад извлекают 6 карт. Какова вероятность, что среди них будут представители всех четырех мастей?

2.14. Отрезок длины l ломается в произвольной точке. Какова вероятность, что длина наибольшего обломка превосходит $2l/3$?

2.15. Точка бросается наудачу в квадрат. Найти вероятность того, что точка попадет в круг, вписанный в этот квадрат.

2.16. Точка бросается наудачу в треугольник с вершинами в точках (0,0),(2,0) и (0,1). Найти вероятность того, что

а) абсцисса точки окажется больше 1/2;

б) ордината точки окажется больше 1/2.

3.1. Производят 3 независимых случайных перестановки букв Вашей фамилии. Найти вероятность того, что:

а) хотя бы раз получилась Ваша фамилия;

б) каждый раз получалась Ваша фамилия;

в) в последний раз получилась Ваша фамилия.

Сравнить вероятности, найденные в пунктах (а), (б), (в).

3.2. Пусть событие A не зависит от самого себя. Доказать, что тогда $P(A)$ равна 0 или 1.

3.3. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?

3.4. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k-м бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?

3.5. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?

3.6. В шар радиуса R наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

3.7. Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m + l$ успехов, причем l успехов появятся в последних l испытаниях.

3.8. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три — в нижний сегмент, и по одной — в оставшиеся три сегмента.

3.9. События $A_1;\ \ldots;\ A_n$ независимы, известны вероятности $p_i = P(A_i);\ \ i = 1;\ \ldots;\ n$. Найти вероятность того, что:

а) произойдет ровно одно из A_i;

б) не произойдет ни одно из A_i;

в) произойдет хотя бы одно из A_i.

3.10. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?

3.11. Шахматисты A и B решили сыграть между собой матч. Известно, что A выигрывает каждую партию у B с вероятностью $2/3$, и с вероятностью $1/3$ проигрывает. В связи с этим для победы в матче игроку A нужно набрать 4 очка, а игроку B для победы достаточно набрать 2 очка (за выигрыш в партии дается очко, за проигрыш — 0 очков, ничьих нет). Равны ли шансы на успех?

3.12. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех в серии последовательных испытаний Бернулли произойдет на l-м испытании.

3.13. На отрезок [0,10] наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в [0,2], одна — в [2,3] и две — в [3,10].

4.1. Наудачу выбирают число первых букв от 2 до m из Вашей фамилии (здесь m — общее число букв в фамилии) и осуществляют их случайную перестановку. Найти вероятность того, что в результате получится Ваша фамилия. Найти вероятность того, что выбрали две первых буквы, если известно, что Ваша фамилия получилась.

4.2. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Известно, что две пули из трех попали в цель. Какова вероятность того, что промахнулся C?

4.3. Чтобы найти нужную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в фондах эта книга или нет, и если книга есть в фондах, то с вероятностью 0,5 она не занята другим читателем. Какова вероятность того, что студент найдет книгу, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

4.4. Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому, если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n он вытащит «хороший» билет. Какова вероятность вытащить «хороший» билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

4.5. Допустим, что вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, а вероятность поражения цели при k попаданиях равна $1 - q^k$. Какова вероятность того, что цель поражена, если было произведено n выстрелов?

4.6. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 3%, и третьего — 1%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 20% телевизоров с первого завода, 30% — со второго и 50% — с третьего?

4.7. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% — вторую, 21% — третью и 8% — четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй — кровь первой и второй групп, с третьей — кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность того, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?

4.8. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем делается это с вероятностями 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема каждой переданной буквы за две другие равны 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

4.9. Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин — дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.

4.10. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Затем из второй урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

4.11. Некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, где $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, а число λ положительно. Вероятность развития потомка из яйца равна p. Какова вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков?

4.12. В условиях предыдущей задачи у насекомого развилось 10 потомков. Какова вероятность того, что при этом было отложено 20 яиц?

5.1. Построить график функции распределения числа испытаний Бернулли, производимых до появления первого успеха включительно.

5.2. Выразить через функцию распределения случайной величины X вероятности следующих событий: $\mathbf{P}\{a < X < b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X < b\}$, $\mathbf{P}\{a < X \le b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X \le b\}$.

5.3. Могут ли функции

(а) $f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, (б) $f(y) = e^{-y}$, (в) $f(y) = \cos y$, (г) $f(y) \equiv 1$

быть плотностями распределения?

5.4. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(y) = \begin{cases} Cy^2, & y \in [0, 1], \\ 0, & y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Найти C и функцию распределения случайной величины X.

5.5. Вычислить функцию гамма-распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ в случае, когда $\lambda = n$ — целое число.

5.6. На отрезок длины l произвольным образом бросают две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.

5.7. Точку бросают наудачу в треугольник с вершинами, координаты которых равны (0; 0), (8; 0), (21 – 2№; 17 – 2№). Здесь №— номер студента по списку группы. Найти функции распределения и плотности декартовых координат точки.

5.8. В круг радиуса R наугад бросают точку. Найти:

(а) функцию распределения и плотность распределения расстояния этой точки до центра круга;

(б) совместную функцию распределения полярных координат точки.

5.9. Игрок выигрывает очко, если при подбрасывании монеты выпадает герб, и проигрывает очко в противном случае. Построить график функции распределения суммарного выигрыша игрока после двух бросаний монеты.

5.10. Дискретное совместное распределение случайного вектора $(X,\ Y)$ задается таблицей:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0,2	0,1	0,0
1	0,4	0,0	0,3

Найти (а) одномерные распределения X и Y; (б) закон распределения $X+Y$; (в) закон распределения $Z=Y^2$.

5.11. Какова вероятность того, что значение случайной величины окажется целым, если известно, что она имеет нормальное распределение?

5.12. n точек независимо друг от друга бросаются на отрезок $[0;\ a]$. Найти функции распределения и плотности распределения случайных величин (а) Y_1 (крайняя слева точка), (б) Y_n (крайняя справа точка), (в) Y_k (k-я по счету слева точка, $k=1,...,n$).

6.1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\ \pi]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y=\sin X$.

6.2. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y=\operatorname{tg} X$.

6.3. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(t)=\begin{cases}\theta t^{\theta-1}, & t\in[0,1],\\ 0, & t\notin[0,1].\end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y=-\ln X$.

6.4. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0,1]. Найти плотность распределения случайной величины $X-Y$.

6.5. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин (а) $Y_1=X^2$, (в) $Y_2=\sin X$.

6.6. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины $\max(0,\ X)$. Найти дискретную и абсолютно непрерывную компоненты полученной функции распределения.

6.7. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbf{P}\{X=y_k\}=\mathbf{P}\{Y=y_k\}=p_k,\ k\geq 1$. Найти $\mathbf{P}\{X=Y\}$.

6.8. X и Y независимы, причем $\mathbf{P}\{X=0\}=\mathbf{P}\{X=1\}=1/2$, а $\mathbf{P}\{Y<t\}=t,\ 0<t<1$. Найти функции распределения случайных величин $X+Y$ и XY.

6.9. Случайная величина X имеет равномерное распределение на [0; 1]. Найти функции распределения и плотности случайных величин (а) $Y_1=2X+1$, (б) $Y_2=X^{-1}$.

6.10. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин (а) $Y_1=[X]$ (целая часть X), (б) $Y_2=X-[X]$, (в) $Y_3=X^2$, (г) $Y_4=\alpha^{-1}\ln X$, (д) $Y_5=\sqrt{X}$.

6.11. Случайная величина X имеет стандартное распределение Коши. Найти функцию и плотность распределения случайной величины $Y=\operatorname{tg} X$.

6.12. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие показательные распределения. Найти $\mathbf{P}\{X=2Y\}$.

6.13. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0,1]. Найти плотность распределения случайной величины $\max(X;\ 2Y)$.

7.1. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин, введенных в задачах (а) 5.1; (б) 5.6; (в) 5.8(а).

7.2. Найти математические ожидания и дисперсии декартовых координат точки в задаче 5.7.

7.3. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин с плотностями распределения, определенными формулами (а) 5.3 (а); (б) 5.4.

7.4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y в задаче 6.1.

7.5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X-Y$ в задаче 6.4.

7.6. Доказать, что $\mathbf{E}X = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\ (X \geq k)$, если известно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\ (X = k) = 1$.

7.7. Случайные величины X и Y независимы, X имеет стандартное нормальное распределение, Y имеет распределение Бернулли с параметром $1/3$. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин (а) $2X + 3Y$; (б) $X - 9Y - 1$.

7.8. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей:
(а) распределение Пуассона;
(б) геометрическое распределение;
(в) равномерное распределение на отрезке $[a;\ b]$;
(г) показательное распределение с параметром α;
(д) гамма-распределение.

7.9. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин Y_1 и Y_n, введенных в задаче 5.12.

8.1. Найти $\mathbf{E}X^{2013}$, если X имеет стандартное нормальное распределение.

8.2. Вычислить момент k-го порядка для случайной величины, имеющей:
(а) равномерное распределение,
(б) гамма-распределение.

8.3. Случайная величина X принимает натуральные значения с вероятностями $\mathbf{P}\,(X = k) = Ck^{-10}, \quad k = 1, 2, \ldots$. Как найти C? Какого порядка моменты существуют у этой случайной величины X?

8.4. Найти коэффициент корреляции $\rho\ (X, X + Y)$, где X и Y независимы, одинаково распределены и имеют конечную ненулевую дисперсию.

8.5. Найти коэффициент корреляции между координатами точки из задачи 5.7.

8.6. Точка произвольным образом бросается в круг единичного радиуса. Найти коэффициент корреляции между ее декартовыми координатами.

8.7. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти, для каких значений параметра β существует математическое ожидание случайной величины $Y = e^{\beta X}$.

8.8. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(t) = 3t^{-2}$ при $t \geq 1$. Тогда $\mathbf{E}X^{-1} = \int_1^\infty 3t^{-3}dt = 3/2$, $\mathbf{E}X^{-2} = \int_1^\infty 3t^{-4}dt = 1$, $\mathbf{D}X^{-1} = 1 - (3/2)^2 < 0$. Но известно, что дисперсия отрицательной не бывает. Объяснить противоречие.

8.9. Вычислить коэффициент корреляции $\rho\,(X, Y)$ в условиях задачи 5.10.

8.10. Найти коэффициент корреляции $\rho\ (X, X^2)$, где X имеет:
(а) стандартное нормальное распределение;
(б) показательное распределение.

8.11. Записать плотность двумерного нормального распределения вектора $\vec{Z}$ и найти преобразование, переводящее случайный вектор $\vec{Z} = (Z_1,\ Z_2)^T$ с нулевым вектором математического ожидания в случайный вектор $\vec{X} = (X_1,\ X_2)^T$ с двумерным стандартным нормальным распределением, если ковариационная матрица вектора $\vec{Z}$ равна $\begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 18 & 45 \end{pmatrix}$.

9.1. Найти характеристическую и производящую функции случайной величины, принимающей значения 0, 1 и 2 с равными вероятностями.

9.2. Найти константу C такую, что $X_1^2 + X_2^2$ совпадает по распределению со случайной величиной CY, где $(X_1,\ X_2)$ — вектор с двумерным стандартным нормальным распределением, а Y имеет показательное распределение с параметром № (здесь № — номер студента по списку группы).

9.3. 120 раз подбрасывается игральная кость. Вычислить приближенно вероятность каждого из двух событий:

Вариант 1. Выпало не менее 10 единиц; выпало не менее 60 четных чисел.

Вариант 2. Выпало не менее 10 шестерок; сумма выпавших чисел меньше 300.

Вариант 3. В сумме выпало не менее 400 очков; сумма выпавших четных чисел не менее 250.

Вариант 4. Выпало менее 20 единиц; выпало не менее 20 двоек.

Вариант 5. Сумма выпавших чисел не меньше 320; тройка выпала не менее 10 раз.

Вариант 6. Пятерка и шестерка выпали всего не менее 20 раз; единица и двойка выпали менее 30 раз.

Вариант 7. Выпало не менее 70 нечетных чисел; выпало не менее 20 пятерок.

Вариант 8. Выпало менее 15 двоек; выпало не менее 60 нечетных чисел.

Вариант 9. Выпало не менее 10 единиц; сумма выпавших чисел не меньше 400.

Вариант 10. В сумме выпало менее 300 очков; сумма выпавших нечетных чисел менее 200.

Вариант 11. Выпало не менее 15 шестерок; выпало менее 20 единиц.

Вариант 12. Сумма выпавших чисел меньше 250; четверка выпала не менее 15 раз.

Вариант 13. Пятерка и шестерка выпали всего менее 20 раз; единица и двойка выпали не менее 25 раз.

Вариант 14. выпало не менее 65 четных чисел; выпало менее 20 шестерок.

Вариант 15. Выпало не менее 15 единиц; выпало не менее 70 четных чисел.

9.4. Случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы и одинаково распределены по закону Пуассона с параметром λ. К чему сходится с вероятностью единица последовательность

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)^2 \quad ?$$

9.5. Найти характеристическую и производящую функции:
1) бернуллиевского распределения;
2) биномиального распределения;
3) пуассоновского распределения.

9.6. Пусть X — неотрицательная целочисленная случайная величина. Выразить $\mathbf{E}X$ и $\mathbf{D}X$ через производные производящей функции.

9.7. Найти характеристическую функцию:
1) показательного распределения;
2) гамма-распределения;
3) квадрата стандартной нормальной случайной величины;
4) суммы квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин.

9.8. По характеристическим функциям восстановить распределения: $\cos t$, $(1 - 4it)^{-1}$, $\exp(2it - 2t^2)$.

9.9. Игрок в каждой игре (независимо от результатов других игр) выигрывает 80 рублей с вероятностью 0,1, проигрывает 20 рублей с вероятностью 0,9. Найти, к какой величине сходится средний выигрыш за n игр при $n \to \infty$.

9.10. Пусть $X_1,\ X_2,\ \dots$ — случайные числа, то есть независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке от 0 до 1. Найти пределы п. н. следующих выражений при $n \to \infty$:

$$\text{а) } \frac{{X_1}^2 + \ldots + {X_n}^2}{n}; \qquad \text{в) } \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+X_1} + \ldots + \frac{1}{1+X_n}\right);$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{{X_1}^2 + \ldots + {X_n}^2}}{n}; \qquad \text{г) } \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)\right).$$

9.11. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0.2, 4 с вероятностью 0.4, 3 с вероятностью 0.3 и 2 с вероятностью 0.1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.95 лежит средний балл.

9.12. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

Урожай в кг	0	1	1.5	2	2.5
Вероятность	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

На участке высажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0.95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0.975 урожай был не менее тонны?

9.13. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

9.14. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

9.15. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0.006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 1200 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного родственникам выплачивается 100000 рублей. Какова вероятность того, что:

(а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

(б) его доход превысит 6000000 рублей?

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0.95 доход был не менее 4000000 рублей?

9.16. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее 100 исправных?

9.17. Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7.2 \cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 5 млн. карточек. Какова вероятность, что никто не угадал все 6 номеров? Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0.9 хотя бы один угадал 6 номеров?

10.1. По данной реализации выборки $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$:

а) построить графики эмпирической функции распределения, гистограммы и полигона частот (число промежутков выбрать в соответствии с формулой Стеджеса);

б) вычислить выборочные среднее, дисперсию, асимметрию и эксцесс.

Вариант 1. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 2. (0; 7; 1; 0; -1; 6; -1; 2; 3; 4)
Вариант 3. (8; 2; 3; 3; 1; 5; 5; 2)
Вариант 4. (-1; 4; 1; 1; -1; 0; 3; 2; 3)
Вариант 5. (3; -2; -4; 0; -4; 2; 1; 0; 0; 0)
Вариант 6. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 7. (1; 2; 0; 0; 4; 6; 6; 2; 3)
Вариант 8. (3; -4; 1; 2; 2; -6; 5; 3; -4)
Вариант 9. (-2; 2; 4; -2; 7; -3; 0; 2; 0; -1)
Вариант 10. (-1; 3; 1; 0; -3; 8; -3; 2)
Вариант 11. (0; 0; 0; 0; 1; 5; 4; 2; 1; 3)
Вариант 12. (1; -2; 0; 0; -4; 6; -6; -2; 3)
Вариант 13. (1; 2; 8; 8; 4; 1; 1; 2; 3)
Вариант 14. (5; -2; -3; 0; 4; 0; 5; 2)
Вариант 15. (4; 0; 4; 0; 2; 2; 2)

10.2. Найти оценки параметра по первому и второму моменту.

Вариант 1. Случайные величины принимают значения 0, 1, 2 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = (1-p)^2,\ \mathbf{P}\{X = 1\} = 2p(1-p),\ \mathbf{P}\{X = 2\} = p^2.$$

Вариант 2. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 3. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta} e^{-x^3/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 4. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 5. Случайные величины принимают значения 1, 2, 3 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = p^2,\ \mathbf{P}\{X = 2\} = 2p(1-p),\ \mathbf{P}\{X = 3\} = (1-p)^2.$$

Вариант 6. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta} e^{-x\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 7. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-(\theta+1)/\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Вариант 8. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1) x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Вариант 9. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 10. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 11. Случайные величины принимают значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = (1-p)^3,\ \mathbf{P}\{X = 1\} = 3p(1-p)^2,$$
$$\mathbf{P}\{X = 2\} = 3p^2(1-p),\ \mathbf{P}\{X = 3\} = p^3.$$

Вариант 12. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 13. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{\theta} e^{-x^4/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 14. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} e^{-2x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Вариант 15. Случайные величины принимают значения 2, 3, 4 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X=2\}=p^2,\ \mathbf{P}\{X=3\}=2p(1-p),\ \mathbf{P}\{X=4\}=(1-p)^2.$$

10.3. По данной реализации выборки $\vec{x}=$(0; 0; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1):

а) построить график реализации эмпирической функции распределения;

б) вычислить реализации выборочного среднего и выборочной дисперсии.

10.4. По реализации выборки 1; 0; 1; 1; 0; 1; 0; 0; 0; 1 вычислить реализации выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочного среднеквадратического отклонения, несмещенной выборочной дисперсии, выборочных асимметрии и эксцесса.

10.5. Пусть выборка из нормального распределения с параметрами a, σ^2. Вычислить $\mathbf{E}\overline{X}$, $\mathbf{D}\overline{X}$. Какое распределение имеет случайная величина $\overline{X}$?

10.6. Пассажир маршрутного такси измерил 8 раз время ожидания такси и получил следующие результаты (в минутах): 8; 4; 5; 4; 2; 15; 1; 6. У него есть две гипотезы относительно графика движения такси: либо график движения соблюдается, и время ожидания имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\ \theta]$, либо график движения не соблюдается, и время ожидания имеет показательное распределение с параметром λ.

а) Вычислить реализации оценок параметров θ и λ, использовав оценки $\widetilde{\theta}_2=(n+1)X_{(n)}/n$ и $\widetilde{\lambda}_2=\frac{n-1}{n\overline{X}}$.

б) Построить на одном графике реализацию эмпирической функции распределения и теоретические функции распределения равномерного и показательного законов, в которые вместо неизвестных параметров подставлены реализации их оценок.

в) Построить на одном графике реализацию гистограммы и теоретические плотности распределения равномерного и показательного законов, в которые вместо неизвестных параметров подставлены реализации их оценок.

г) На основании проведенного исследования сделать вывод о том, какая из гипотез выглядит более соответствующей экспериментальным данным.

10.7. По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из бернуллиевского распределения B_p с неизвестным параметром $p\in(0;\ 1)$ построить оценки параметра p:

а) по первому моменту;

б) по второму моменту;

в) по произвольному k-му моменту.

Можно ли отдать предпочтение какой-либо из построенных оценок? Исследовать их состоятельность и несмещенность.

10.8. По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из биномиального распределения $B_{m,p}$ построить оценки методом моментов:

а) параметра p по первому и по второму моменту при известном $m>0$;

б) параметров p и m.

Исследовать состоятельность построенных оценок.

10.9. Используя метод моментов, построить бесконечную последовательность различных оценок параметра θ равномерного распределения на отрезке $[0;\ \theta]$. Будут ли полученные оценки состоятельными?

10.10. С помощью метода моментов построить оценку параметра $\theta>0$, если распределение выборки имеет плотность:

а) $\theta t^{\theta-1}$ при $t\in[0;\ 1]$; б) $2t/\theta^2$ при $t\in[0;\ \theta]$.

Исследовать полученные оценки на состоятельность.

10.11. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t)=\begin{cases} 3t^2\theta^{-3}, & t\in[0;\ \theta];\\ 0, & t\notin[0;\ \theta].\end{cases}$$

Найти оценку параметра $\theta > 0$ методом моментов, исследовать ее на несмещенность и состоятельность.

10.12. Методом моментов найти оценку параметра $\alpha > 0$ по выборке из показательного распределения с плотностью $f_\alpha(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $t > 0$. Будет ли оценка несмещенной и состоятельной?

10.13. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод моментов, построить оценки:

а) неизвестного математического ожидания α;

б) неизвестной дисперсии σ^2, если α известно;

в) неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

11.1. В задаче 10.2 найти оценку максимального правдоподобия и исследовать ее состоятельность.

11.2. Для данной реализации $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ рассмотреть трендовые трехпараметрические модели:

а) модель с синусоидальным трендом

$$Y_j = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi j}{n} + b_1 \sin \frac{2\pi j}{n} + \varepsilon_j;$$

б) модель с квадратическим трендом

$$Y_j = a + bj + cj^2 + \varepsilon_j.$$

Оценки параметров найти по методу наименьших квадратов.

Для каждой из моделей вычислить долю объясненной дисперсии.

Выбрать ту модель, для которой доля объясненной дисперсии является наибольшей. Построить график выбранной линии регрессии.

Вариант 1. -1,8 -6,4 -13,3 -22,2

Вариант 2. 0,6 3,1 3,6 1,6

Вариант 3. 4,8 3,1 0,1 -4,6

Вариант 4. -2,0 0,0 2,8 2,5

Вариант 5. 1,8 -2,6 -9,7 -19,2

Вариант 6. 5,5 0,5 -0,7 2,6

Вариант 7. -1,5 0,1 4,3 10,1

Вариант 8. -3,1 -0,7 2,7 1,7

Вариант 9. -0,4 -4,8 -11,6 -21,2

Вариант 10. 1,6 4,2 5,4 3,0

Вариант 11. 3,9 3,3 -0,1 -5,1

Вариант 12. -3,0 0,0 2,0 2,2

Вариант 13. 2,4 -2,6 -10,0 -19,0

Вариант 14. 5,3 0,2 -0,9 3,3

Вариант 15. 2,2 0,2 3,7 10,5

11.3. По выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ из бернуллиевского распределения B_p с неизвестным параметром $p \in (0;\ 1)$ построить оценку параметра p методом максимального правдоподобия. (Указание: показать, что вероятность попадания в точку t для элементов выборки равна $f(t,\ p) = p^t(1-p)^{1-t}$, где t может принимать только два значения — 0 и 1). Исследовать состоятельность и несмещенность полученной оценки.

11.4. По выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ из биномиального распределения $B_{m,p}$ построить оценку максимального правдоподобия параметра p при известном $m > 0$. Исследовать состоятельность и несмещенность оценки.

11.5. По выборке из показательного распределения E_α построить оценку максимального правдоподобия параметра $\alpha > 0$. Исследовать состоятельность оценки.

11.6. Построить оценку максимального правдоподобия по выборке из распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t \geq 1; \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Доказать состоятельность полученной оценки.

11.7. Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} e^{\theta-t}, & t \geq \theta; \\ 0, & t < \theta. \end{cases}$$

Найти оценку для θ:

а) методом моментов;

б) методом максимального правдоподобия.

Будут ли полученные оценки состоятельными? Вычислить смещения оценок и получить исправленные несмещенные оценки.

11.8. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод максимального правдоподобия, построить оценки:

а) неизвестного математического ожидания α;

б) неизвестной дисперсии σ^2, если α известно;

в) неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

11.9. Пусть $Y_i = x_i + \theta + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь x_i, $\theta \in \mathbf{R}$. Найти оценку для θ по методу наименьших квадратов. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.10. Пусть $Y_i = \theta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь x_i, $\theta \in \mathbf{R}$. Выяснить, для каких значений x_i выполнены предположения теоремы Гаусса—Маркова. Найти оценку для θ по методу наименьших квадратов. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.11. Концентрация лекарства $Y > 0$ в крови пациента обратно пропорциональна массе тела $x > 0$. Найти оценку коэффициента пропорциональности для следующих моделей:

1) $Y_i = \theta/x_i + \varepsilon_i$;

2) $\ln Y_i = \ln(\theta/x_i) + \varepsilon_i$;

$i = 1, \ldots, n$. Найти оценку параметра θ в каждой модели. Найти дисперсию оценки в первой модели и дисперсию логарифма оценки во второй модели.

11.12. Для регрессионной модели $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, найти оценки параметров a, b по методу наименьших квадратов. Найти ковариационную матрицу оценок. Найти оценку дисперсии регрессионных ошибок σ^2.

11.13. По реализации двумерной выборки $x_1 = 1$, $Y_1 = 0$, $x_2 = 2$, $Y_2 = 2,5$, $x_3 = 3$, $Y_3 = 0,5$, найти реализации оценок параметров модели из предыдущей задачи. Вычислить реализацию коэффициента детерминации.

12.1. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти точечные оценки и доверительные интервалы уровня 0,95 для математического ожидания и дисперсии. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому отклонению, и график оценки плотности распределения.

Вариант 1. 2,3 1,7 2,7 2,0 2,0 1,6

Вариант 2. 1,6 1,9 2,8 2,2 2,2 1,9

Вариант 3. 2,3 2,8 2,7 2,7 2,2 0,8

Вариант 4. 2,0 1,5 2,2 2,1 2,0 2,0

Вариант 5. 2,9 2,3 2,3 1,5 2,1 2,0

Вариант 6. 2,0 1,8 0,9 1,9 1,4 2,0

Вариант 7. 1,9 1,6 2,1 0,7 1,4 2,2

Вариант 8. 3,0 0,4 2,2 0,2 2,6 1,7

Вариант 9. 2,1 1,5 1,8 2,0 1,8 1,4
Вариант 10. 1,5 1,7 2,2 1,7 2,7 2,7
Вариант 11. 1,6 2,1 1,9 1,8 0,5 3,1
Вариант 12. 1,9 2,6 2,1 2,9 1,6 1,0
Вариант 13. 2,4 1,2 2,3 2,9 2,6 1,6
Вариант 14. 2,4 1,5 2,2 2,2 2,0 1,6
Вариант 15. 1,7 2,1 3,2 2,0 3,5 3,1

12.2. Пусть элементы выборки $\vec{X}$ имеют плотность распределения

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1 + (t - \theta)^2)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Здесь θ — неизвестный параметр, $\theta \in \mathbf{R}$. Построить точный доверительный интервал для параметра θ по одному наблюдению ($n = 1$).

12.3. По выборке из распределения Бернулли с параметром p, $0 < p < 1$, построить асимптотический доверительный интервал для параметра p.

12.4. Дана выборка из геометрического распределения с параметром p, $0 < p < 1$. Построить асимптотический доверительный интервал для параметра p.

12.5. По выборке из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$ построить асимптотический доверительный интервал для параметра λ.

12.6. Дана выборка из распределения с плотностью $e^{-|t-a|}/2$, $a \in \mathbf{R}$. Построить асимптотический доверительный интервал для параметра a.

12.7. Известно, что измерения величины a независимы, имеют нормальное распределение с математическим ожиданием a (то есть отсутствует систематическая погрешность) и стандартным отклонением 10 мм. Результаты 4 измерений дали среднее значение 512 мм. Найти доверительный интервал для параметра a уровня 0,95; уровня 0,998.

12.8. Известно, что измерения величины a независимы, имеют нормальное распределение с математическим ожиданием a (то есть отсутствует систематическая погрешность) и стандартным отклонением σ. Результаты 100 измерений эталонной длины 1 м дали выборочное среднее 1,01 м и выборочный второй момент 1,04 м^2. Найти доверительный интервал для стандартного отклонения уровня 0,9; уровня 0,99.

12.9. По выборке объема 25 из нормального распределения подсчитаны выборочное среднее 2,1 и выборочный второй момент 4,42. Построить точные доверительные интервалы уровня 0,95 для параметров нормального распределения.

13.1. По критерию Колмогорова и по критерию хи-квадрат Пирсона проверить гипотезу о том, что выборка из равномерного распределения на отрезке [0; 2]. Оценить достигаемый уровень значимости и сделать вывод о том, принимается ли гипотеза на уровне 0,1; на уровне 0,01; на уровне 0,001.
Вариант 1. 0,2 1,3 0,2 1,9 1,5 1,5 1,1 0,5 0,3 1,8 0,5 1,3 0,9 1,9 1,9 2,0
Вариант 2. 1,3 1,5 1,8 1,1 1,4 1,6 0,7 1,4 1,5 0,4 0,1 1,6 0,1 0,9 0,4 1,5
Вариант 3. 1,7 1,5 0,8 1,4 1,3 0,3 0,7 1,2 0,4 0,6 0,6 1,9 1,8 1,3 0,7 0,2
Вариант 4. 0,6 0,5 0,0 0,5 0,5 0,1 0,4 1,1 1,2 1,0 1,8 0,1 1,2 0,0 0,0 1,4
Вариант 5. 1,9 1,3 1,5 0,7 0,0 0,5 0,4 1,6 1,1 1,7 1,9 0,6 1,9 0,8 1,2 0,7
Вариант 6. 1,0 0,9 1,0 0,6 0,0 1,4 1,4 1,2 0,2 1,4 1,7 1,4 0,2 1,9 1,8 1,4
Вариант 7. 1,6 0,6 1,9 0,6 1,2 1,8 1,2 1,1 1,4 0,3 1,5 0,8 1,1 1,4 1,9 1,2
Вариант 8. 1,2 1,3 0,6 1,8 0,1 1,5 1,0 0,5 0,2 0,8 0,6 0,9 1,3 1,9 1,6 0,5
Вариант 9. 1,7 1,1 0,3 0,2 0,5 0,5 1,6 1,4 1,5 1,3 1,6 0,6 1,8 0,8 0,8 0,3
Вариант 10. 1,4 0,7 0,1 0,6 0,5 1,3 0,3 1,6 0,2 0,8 1,1 0,1 1,3 1,1 0,7 1,8
Вариант 11. 0,3 1,8 0,9 0,3 1,9 1,5 0,9 0,0 0,9 1,2 0,4 0,9 0,5 0,6 1,3 0,1
Вариант 12. 0,9 0,9 0,9 1,0 2,0 0,9 0,3 0,3 1,0 0,1 1,5 0,7 0,4 0,5 0,3 2,0
Вариант 13. 0,8 0,7 1,8 0,3 1,0 1,4 1,4 0,9 0,2 1,9 2,0 1,4 0,6 0,7 1,6 0,9

Вариант 14. 1,1 1,2 0,6 1,7 1,1 0,9 0,4 0,0 0,8 1,7 1,8 0,1 1,2 0,6 1,3 0,6
Вариант 15. 1,9 1,7 1,8 1,8 2,0 1,7 0,1 0,1 1,0 0,7 1,8 2,0 1,4 0,0 0,6 1,2

13.2. Крупная партия товаров может содержать долю дефектных изделий. Поставщик полагает, что эта доля составляет 3%, а покупатель — 10%. Условия поставки: если при проверке 20 случайным образом отобранных товаров обнаружено не более одного дефектного, то партия принимается на условиях поставщика, в противном случае — на условиях покупателя. Требуется определить:
1) каковы статистические гипотезы, статистика критерия, область ее значений, критическая область;
2) какое распределение имеет статистика критерия, в чем состоят ошибки первого и второго рода и каковы их вероятности.

13.3. Имеется выборка объема 1 из нормального распределения $\Phi_{a,1}$. Проверяются простые гипотезы $H_0 : \ a = 0, \ \ H_1 : \ a = 1$. Используется следующий критерий (при заданной постоянной c):

$$H_0 \Leftrightarrow X_1 \leq c.$$

Вычислить, в зависимости от c, вероятности ошибок первого и второго рода.

13.4. Используя конструкции доверительного интервала, построить критерий точного уровня ε для проверки гипотезы $\mathrm{H} : \theta = 1$, если:
а) выборка из нормального распределения с параметрами $\theta, 1$;
б) выборка из нормального распределения с параметрами $1, \theta$.

13.5. Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок, для проверки гипотез H_0: выборка из нормального распределения; H_1: выборка из распределения Пуассона.

13.6. Пусть выборка из нормального распределения с параметрами $a, 1$. Для проверки гипотез $\mathrm{H}_0 : a = 0$ против $\mathrm{H}_1 : a = 1$ используется следующий критерий: H_0 принимается, если $X_{(n)} \ < \ 3$, и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок.

13.7. Вычислить значение статистики Колмогорова по реализации выборки (1,1; 0,4; 0,2; 3,2), если основная гипотеза состоит в том, что распределение элементов выборки — равномерное на $[0, \ 4]$.

13.8. Вычислить достигнутый уровнень значимости критерия Колмогорова, если объем выборки равен 100, а $\sup_{-\infty<t<\infty} |F_n^*(t) - F_0(t)| = 0,2$.

13.9. При 4040 бросаниях монеты Бюффон получил $\nu_1 = 2048$ выпадений герба и $\nu_2 = n - \nu_1 = 1992$ выпадений решетки. Согласуется ли это с гипотезой о том, что монета правильная, при уровне значимости 0,1? С каким предельным уровнем значимости может быть принята эта гипотеза?

13.10. При $n = 4000$ независимых испытаний события $A1, \ A2, \ A3$, составляющие полную группу, осуществились соответственно 1905, 1015 и 1080 раз. Проверить, согласуются ли эти данные при уровне значимости 0,05 с гипотезой H_0: $p_1 = 1/2, \ p_2 = p_3 = 1/4$, где $p_j = \mathbf{P}(A_j)$. Найти достигнутый уровень значимости.

13.11. В экспериментах с селекцией гороха Мендель наблюдал частоты различных видов семян, полученных при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей по теории наследственности приведены в следующей таблице:

Семена	Частота	Вероятность
Круглые и желтые	315	9/16
Морщинистые и желтые	101	3/16
Круглые и зеленые	108	3/16
Морщинистые и зеленые	32	1/16
Σ	n=556	1

Следует проверить гипотезу H_0 о согласовании частотных данных с теоретическими вероятностями (на уровне значимости 0,1) и найти достигнутый уровень значимости.

13.12. В таблице приведены числа m_i участков равной площади 0,25 км^2 южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по i попаданий самолетов-снарядов во время второй мировой войны. Проверить согласие опытных данных с законом распределения Пуассона, приняв за уровень значимости $\alpha = 0,05$:

i	0	1	2	3	4	7	Итого
m_i	229	211	93	35	7	1	$\Sigma m_i = 576$

14.1. Предполагая, что $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ — независимые выборки из нормального распределения, проверить гипотезы:

а) о равенстве дисперсий против двусторонней альтернативы;

б) о равенстве математических ожиданий против двусторонней альтернативы;

в) о равенстве математических ожиданий против альтернативы, состоящей в том, что математическое ожидание выборки $\vec{X}$ больше, чем математическое ожидание выборки $\vec{Y}$ (в пунктах (б), (в) предполагается, что неизвестные дисперсии выборок равны между собой);

Предполагая, что $(\vec{X},\ \vec{Y})$ — выборка из двумерного нормального распределения, проверить гипотезу об отсутствии корреляции между $\vec{X}$ и $\vec{Y}$.

Найти достигаемый уровень значимости и сделать вывод о том, принимается ли гипотеза на уровне 0,1; на уровне 0,05; на уровне 0,02.

Вариант 1.
X 1,0 1,4 1,1 0,5 2,2
Y 2,4 2,0 2,3 1,8 1,1

Вариант 2.
X 1,6 1,9 1,3 1,6 1,3
Y 1,7 2,8 2,3 2,3 3,1

Вариант 3.
X 0,5 2,3 0,6 2,2 1,7
Y 0,5 2,1 0,1 1,9 2,0

Вариант 4.
X 1,3 1,3 0,7 0,8 1,8
Y 1,2 1,4 1,6 1,5 1,6

Вариант 5.
X 0,7 1,4 2,0 1,6 1,4
Y 2,8 3,3 2,4 3,2 2,2

Вариант 6.
X 1,4 2,0 1,9 0,9 2,4
Y 1,8 1,7 2,2 1,0 2,6

Вариант 7.
X 1,4 2,1 1,8 2,1 0,8
Y 1,8 1,2 1,4 1,2 0,8

Вариант 8.
X 1,3 1,3 1,7 0,9 1,9
Y 3,4 2,5 2,2 2,8 3,2

Вариант 9.
X 2,0 1,6 0,9 0,9 0,9
Y 1,5 1,2 0,6 0,5 0,6

Вариант 10.
X 2,2 0,3 1,6 0,7 0,9
Y 2,0 1,6 2,8 2,1 1,1

Вариант 11.
X 1,0 2,1 1,8 2,1 1,3
Y 2,0 2,0 2,5 2,3 3,0
Вариант 12.
X 0,5 1,6 2,4 0,5 2,0
Y 0,2 1,6 2,9 0,4 1,8
Вариант 13.
X 2,3 1,6 1,7 0,9 0,9
Y 0,9 1,1 1,2 1,9 1,4
Вариант 14.
X 1,0 1,8 1,1 1,6 0,8
Y 2,5 2,8 2,7 2,2 2,3
Вариант 15.
X 1,7 1,2 1,1 2,6 1,3
Y 1,2 1,2 1,3 2,5 1,3

14.2. Пусть $\vec{X}, \vec{Y}$ — независимые выборки объема 2 из непрерывного распределения. Составить таблицу распределения случайной величины $d_{2,2}(\vec{X}, \vec{Y})$.

14.3. По следующим реализациям выборок вычислить реализацию статистики $d_{n,m}$ Колмогорова—Смирнова:

$\vec{X}$ = (1,2, 0,4, -0,2, 0,9), $\vec{Y}$ = (0,2, -0,5, 1, -0,9, 0,3, 0,5).

14.4. По реализациям независимых выборок $\vec{X}, \vec{Y}$ объемов 40 и 50 вычислено значение $\sup_{t\in\mathbf{R}} |F^*_{1,n}(t) - F^*_{2,m}(t)| = 0,1$. Найти достигнутый уровень значимости гипотезы об однородности. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне 0,05.

14.5. По реализациям независимых выборок $\vec{X}, \vec{Y}$ объемов 20 и 30 из нормального распределения вычислены значения статистик $S_x^2 = 15$ и $S_y^2 = 10$. Найти реально достигнутый уровень значимости гипотезы о равенстве дисперсий против двусторонней альтернативы, а также против каждой из односторонних альтернатив.

14.6. Пусть в условиях предыдущей задачи предполагается равенство дисперсий, и известны значения $\overline{X} = 2$, $\overline{Y} = 12$. Найти реально достигнутый уровень значимости гипотезы о равенстве математических ожиданий против двусторонней альтернативы, а также против каждой из односторонних альтернатив.

14.7. Пусть $(X_1, Y_1), \ldots, (X_4, Y_4)$ — выборка объема 4 из двумерного нормального распределения. Найти, при каких значениях выборочного коэффициента корреляции гипотеза о независимости компонент отвергается на уровне 0,1 при двусторонней альтернативе. Вычислить значение выборочного коэффициента корреляции по реализации двумерной выборки (1, 2), (2, 3), (-1, 0), (0, 0).

14.8. Пусть $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{100}, Y_{100})$ — реализация выборки объема 100 из двумерного нормального распределения. Значение выборочного коэффициента корреляции $\widehat{r}_n$ равно –0,25. Найти реально достигнутый уровень значимости гипотезы о независимости компонент против двусторонней альтернативы, а также против каждой из односторонних альтернатив.

Список литературы

1. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. — СПб., 1999. — 223 с.

2. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач и упражнений по математической статистике. — Новосибирск, 2001. — 120 с.

3. *Лотов В.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Новосибирск: НГУ, 2006. — 128 с.

4. *Свешников А.А. и др.* Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. — М., 1970. — 656 с.

5. *Чернова Н.И.* Математическая статистика. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 148 с.

Источники Интернет

1. *Лотов В.И.* Лекции по теории вероятностей и математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/lotov/tv&ms_ff.pdf
2. *Коршунов Д.А., Фосс С.Г.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseProbability2.pdf
3. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач и упражнений по математической статистике.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseStatistics2.pdf
4. *Чернова Н.И.* Лекции по теории вероятностей.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/tv/index.html
5. *Чернова Н.И.* Лекции по математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/ms.html

Программу составил доцент А. П. Ковалевский