ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лектор: Артем Павлович Ковалевский

1. Дискретная вероятностная модель.

Предмет теории вероятностей. Определение дискретной вероятностной модели. Классическое определение вероятности. События, операции над ними. Примеры.

2. Элементы комбинаторики.

Выборки с возвращением и без возвращения. Гипергеометрическая формула.

3. Общая вероятностная модель.

Мера и вероятностная мера. Свойства вероятности: дополнения, включения, объединения. Геометрическая вероятностная модель. Задача о встрече.

4. Условная вероятность и независимые события.

Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события. Независимость дополнений.

5. Независимые испытания.

Схема Бернулли. Формула Бернулли. Время ожидания в схеме Бернулли.

6. Дискретные случайные величины.

Ряд (таблица) распределения. Свойства таблицы распределения. Основные семейства дискретных распределений: вырожденное, бернуллиевское, биномиальное, геометрическое, пуассоновское.

7. Случайные величины.

Определение случайной величины и функции распределения. Свойства функции распределения (без доказательства). Функция распределения дискретной случайной величины. Определение абсолютно непрерывного распределения. Свойства плотности распределения. Связь функции распределения и плотности распределения. Понятие смеси распределений.

8. Основные семейства абсолютно непрерывных распределений.

Равномерное, показательное, стандартное нормальное распределение, стандартное распределение Коши. Линейное преобразование случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Нормальное распределение.

9. Независимые случайные величины.

Определение независимости случайных величин. Случайные векторы и многомерные функции распределения. Независимость функций от независимых случайных величин. Формула свертки в целочисленном и в абсолютно непрерывном случае.

10. Математическое ожидание.

Определение в дискретном случае, пример. Математическое ожидание функции от дискретной случайной величины. Определение в абсолютно непрерывном случае. Пример отсутствия математического ожидания. Математическое ожидание функции от случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Свойства математического ожидания (доказательство в целочисленном случае). Примеры.

11. Моменты и дисперсия.

Теорема о существовании моментов. Дисперсия и среднеквадратическое (стандартное) отклонение случайной величины. Их свойства. Примеры.

12. Сходимость случайных величин и распределений.

Сходимость по распределению. Сходимость по вероятности. Сходимость с вероятностью единица, ее свойства. Закон больших чисел.

13. Центральная предельная теорема.

Формулировка центральной предельной теоремы. Теорема Муавра—Лапласа. Примеры применения.

14. Теорема Пуассона.

Лемма об асимптотике числа сочетаний. Приближение Пуассона для биномиального распределения. Пример применения.

План семинаров

1-й семинар: Классическая вероятностная модель. Комбинаторика.

2-й семинар: Геометрическая вероятностная модель. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3-й семинар: Независимые события. Схема Бернулли.

4-й семинар: Распределения случайных величин.

5-й семинар: Преобразования случайных величин.

6-й семинар: Математическое ожидание и дисперсия.

7-й семинар: Моменты. Сходимость случайных величин. Закон больших чисел.

8-й семинар: Центральная предельная теорема и теорема Пуассона.

Семинар № 1: Классическая вероятностная модель. Комбинаторика.

1.1. Буквы, составляющие фамилию студента, написали на карточках, затем карточки перетасовали и стали выкладывать в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что в результате получится фамилия студента? В качестве фамилии студента выбрать свою фамилию.

1.2. n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность того, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?

1.3. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k-м извлечении.

1.4. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекаются 6 карт. Какова вероятность того, что:

а) среди них окажется туз пик;

б) среди них окажется ровно один туз;

в) среди них окажутся ровно две бубновые карты;

г) среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?

1.5. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

1.6. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что:

а) все выйдут на четвертом этаже;

б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже;

в) все пятеро выйдут на разных этажах?

1.7. Найти вероятность того, что в наугад выбранном трехзначном автомобильном номере:

а) все цифры одинаковы;

б) все цифры различны;

в) только две одинаковые цифры.

1.8. В лотерейном билете 20 полей, причем на 10 из них (выбранных наугад) под защитным слоем скрыты буквы слова «автомобиль». Участник лотереи наугад выбирает свои 10 полей из 20 и открывает их (стирает защитный слой). Какова вероятность того, что он найдет на них все буквы слова «автомобиль»? Какова вероятность того, что ему удастся это сделать, открыв ровно 11 полей?

1.9. Однократно бросается игральная кость. Найти вероятность того, что:

а) выпадет число 3;

б) выпадет число, отличное от трех;

в) выпадет число, не меньшее трех.

1.10. Однократно бросается пара игральных костей. Найти вероятность того, что:

а) сумма выпавших очков окажется равна трем;

б) выпадут одинаковые грани;

в) сумма выпавших очков окажется не меньше шести.

1.11. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

1.12. Найти вероятность того, что в наугад выбранном четырехзначном автомобильном номере:

а) все цифры одинаковы;

б) все цифры различны;

в) ровно три одинаковые цифры;

г) только две одинаковые цифры;

д) две пары одинаковых цифр.

1.13. На шахматную доску из 64 клеток ставятся наудачу две ладьи разного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

1.14. Недобросовестный казначей заменил 3 из 50 золотых монет в казне на фальшивые. Султан взвешивает 3 наугад выбранных монеты. Какова вероятность того, что казначей будет уличен?

1.15. Группа, состоящая из $2n$ девушек и $2n$ юношей, делится произвольным образом на две равные по количеству подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе окажется поровну юношей и девушек.

1.16. В ящике имеется 4 зеленых, 5 синих и 6 красных шаров. Наугад выбирается два шара. Найти вероятность того, что:

а) это будут синий и зеленый шары;

б) шары окажутся одного цвета;

в) шары окажутся различных цветов.

1.17. n различных шаров произвольным образом раскладываются по n ящикам. Какова вероятность того, что при этом ровно один ящик окажется пустым?

1.18. Из колоды, насчитывающей 52 карты, наугад извлекают 6 карт. Найти вероятность того, что:

а) все карты будут одной масти;

б) среди них будут все 4 туза;

в) среди них будут представители всех четырех мастей.

1.19. В чулане находится n пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r < n$). Какова вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные?

1.20. В купейном вагоне (9 купе по 4 места) наудачу выбрано 7 мест. Найти вероятность того, что 7 купе остались свободными.

Семинар № 2: Геометрическая вероятностная модель. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

2.1. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?

2.2. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Обозначим X; Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.

а) Доказать, что для $0 < u < 1,\ \ 0 < v < 1$ выполнено

$$P\{X < u, Y < v\} = P\{X < u\}P\{Y < v\} = uv;$$

б) найти для $0 < t < 1$ вероятности

$$1)\ P\{|X - Y| < t\}; \quad 2)\ P\{XY < t\};$$

$$3)\ P\{\max(X, Y) < t\}; \quad 4)\ P\{\min(X, Y) < t\};$$

в) найти $P\{X + Y < t\}$ для $0 < t < 2$.

2.3. На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть $X,\ Y,\ Z$ — расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность, что из отрезков с длинами X, Y и Z можно составить треугольник?

2.4. Точка брошена наудачу в прямоугольник со сторонами 1 и 2. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от точки до ближайшей стороны прямоугольника не превышает x;

б) расстояние от точки до любой стороны прямоугольника не превосходит x.

2.5. Наудачу выбирают число первых букв от 2 до m из фамилии студента (здесь m — общее число букв в фамилии) и осуществляют их случайную перестановку. Найти вероятность того, что в результате получится фамилия студента. Найти вероятность того, что выбрали две первых буквы, если известно, что фамилия студента получилась. В качестве фамилии студента выбрать свою фамилию.

2.6. Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому, если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n он вытащит "хороший" билет. Какова вероятность вытащить "хороший" билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

2.7. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% — вторую, 21% — третью и 8% — четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй — кровь первой и второй групп, с третьей — кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность того, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?

2.8. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Затем из второй урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

2.9. Отрезок длины l ломается в произвольной точке. Какова вероятность того, что длина наибольшего обломка превосходит $2l/3$?

2.10. Точка бросается наудачу в квадрат. Найти вероятность того, что точка попадет в круг, вписанный в этот квадрат.

2.11. Точка бросается наудачу в треугольник с вершинами в точках (0,0),(2,0) и (0,1). Найти вероятность того, что:

а) абсцисса точки окажется больше 1/2;

б) ордината точки окажется больше 1/2.

2.12. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается наудачу монета диаметра $2r < a$. Найти вероятность того, что:

а) монета попадет целиком внутрь квадрата;

б) монета пересечет ровно одну сторону квадрата;

в) монета пересечет ровно две стороны квадрата;

г) монета накроет угол.

2.13. В интервале времени $[0, T]$ в случайный момент u появляется сигнал длительности Δ. Приемник включается в случайный момент $v \in [0, T]$ на время t. Предположив, что точка (u, v) равномерно распределена на квадрате $[0, T] \times [0, T]$, найти вероятность обнаружения сигнала.

2.14. (Задача Бюффона). На плоскости начерчены паралельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена игла длины $2r < 2a$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых?

2.15. Пусть в условиях задачи 1.16 вытянули шары разного цвета. Какова вероятность того, что это синий и зеленый шары?

2.16. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин — дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.

2.17. Из колоды карт (36 листов) последовательно вынуты две карты. Найти:

а) безусловную вероятность того, что вторая карта окажется тузом (неизвестно, какая карта была вынута вначале);

б) условную вероятность того, что вторая карта будет тузом, если первоначально был вынут туз.

2.18. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших на них очков равна 8, если известно, что эта сумма есть четное число?

2.19. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 4 очка, если известно, что на второй кости выпало больше очков, чем на первой?

2.20. Известно, что при бросании 10 игральных костей выпала по крайней мере одна единица. Какова при этом вероятность того, что выпали две или более единицы?

2.21. A говорит правду в 3 случаях из 4, а B — в 4 случаях из 5. Из урны, в которой было 9 разноцветных шаров, в том числе один белый, вынули один шар. A и B посмотрели на него и оба сказали, что шар — белый. Найти вероятность того, что они сказали правду.

2.22. Изделия некоторого производства удовлетворяют стандарту с вероятностью 0,96. Предлагается упрощенная система испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что:

а) изделие будет забраковано;

б) изделие, выдержащее испытание, удовлетворяет стандарту?

2.23. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1 - \beta$. Вероятность принять здорового человека за больного равна α. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании. Вычислить эту условную вероятность при следующих числовых значениях: $1 - \beta = 0,9$, $\alpha = 0,02$, $\gamma = 0,01$.

Семинар № 3: Независимые события. Схема Бернулли.

3.1. Производят $n > 1$ независимых случайных перестановок букв фамилии студента. Найти вероятность того, что:

а) хотя бы раз получилась фамилия студента;

б) каждый раз получалась фамилия студента;

в) в последний раз получилась фамилия студента.

Сравнить вероятности, найденные в пунктах (а), (б), (в). В качестве фамилии студента подставить свою фамилию.

3.2. Пусть событие A не зависит от самого себя. Какие значения может принимать вероятность события A?

3.3. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?

3.4. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k-м бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?

3.5. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?

3.6. В шар радиуса R наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

3.7. Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m + k$ успехов, причем k успехов появятся в последних k испытаниях.

3.8. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три — в нижний сегмент, и по одной — в оставшиеся три сегмента.

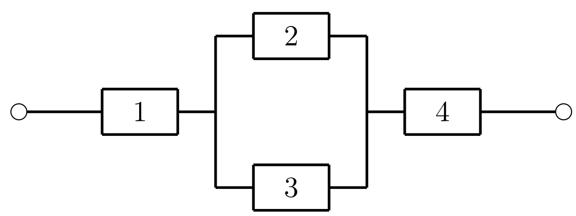
3.9. События $A_1, \ldots, A_n$ независимы, известны вероятности $p_i = P(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Найти вероятность того, что:

а) произойдет ровно одно из A_i;

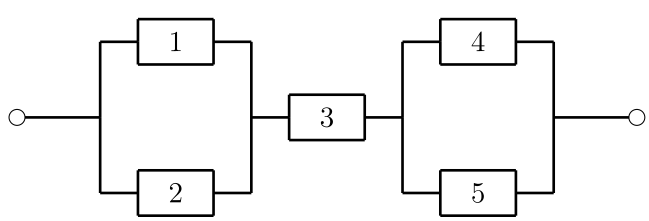
б) не произойдет ни одно из A_i;

в) произойдет хотя бы одно из A_i.

3.10. На рис. приведена схема соединения элементов, образующих электрическую цепь. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Считается известной надежность p_k элемента с номером k, то есть вероятность его безотказной работы (соответственно $q_k = 1 - p_k$ — вероятность его отказа). Вычислить надежность p всей цепи.



3.11. В условиях предыдущего примера найти надежность цепи, изображенной на схеме



3.12. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем делается это с вероятностями 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема каждой переданной буквы за две другие равны 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

3.13. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?

3.14. Шахматисты A и B решили сыграть между собой матч. Известно, что A выигрывает каждую партию у B с вероятностью $2/3$, и с вероятностью $1/3$ проигрывает. В связи с этим для победы в матче игроку A нужно набрать 4 очка, а игроку B для победы достаточно набрать 2 очка (за выигрыш в партии дается очко, за проигрыш — 0 очков, ничьих нет). Равны ли шансы на успех?

3.15. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех в серии последовательных испытаний Бернулли произойдет на l-м испытании.

3.16. Некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, где $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, а число λ положительно. Вероятность развития потомка из яйца равна p. Какова вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков?

3.17. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно одну за другой n торпед. Каждая торпеда независимо от других попадает в корабль с вероятностью p и, при попадании, — с одинаковой вероятностью в любой из k отсеков, на которые разделена подводная часть корабля. Торпеда, попавшая в отсек, приводит к его затоплению водой. Корабль идет ко дну, если водой заполнено не менее двух отсеков. С какой вероятностью корабль будет затоплен?

3.18. На отрезок [0, 10] наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в [0, 2], одна — в [2, 3] и две — в [3, 10].

Семинар № 4: Распределения случайных величин.

4.1. У человека 5 ключей, из которых только один открывает дверь. Ключи испытываются в случайном порядке. Обозначим через X число попыток, потребовавшихся для отыскания нужного ключа. Найти ряд распределения и построить график функции распределения случайной величины X, если:

а) каждый раз выбирается наудачу один из 5 ключей;

б) испытанный ключ откладывается в сторону и в дальнейших испытаниях не участвует.

4.2. Выразить через функцию распределения случайной величины X вероятности следующих событий: $\mathbf{P}\{a < X < b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X < b\}$, $\mathbf{P}\{a < X \le b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X \le b\}$.

4.3. Могут ли функции

(а) $f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, (б) $f(y) = e^{-y}$, (в) $f(y) = \cos y$, (г) $f(y) \equiv 1$

быть плотностями распределения?

4.4. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(y) = \begin{cases} Cy^2, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти C и функцию распределения случайной величины X.

4.5. Вычислить функцию гамма-распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ в случае, когда $\lambda = n$ — целое число.

4.6. На отрезок длины l произвольным образом бросают две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.

4.7. Случайная величина X имеет нормальное распределение, причем $\mathbf{P}\{X > 3\} = 0,5$, $\mathbf{P}\{X > 6,28\} = 0,05$. Записать формулу плотности распределения и построить ее график. Использовать значение $\Phi(1,64) \approx 0,95$.

4.8. В круг радиуса R наугад бросают точку. Найти функцию распределения и плотность распределения расстояния этой точки до центра круга.

4.9. Игрок выигрывает очко, если при подбрасывании монеты выпадает герб, и проигрывает очко в противном случае. Построить график функции распределения суммарного выигрыша игрока после двух бросаний монеты.

4.10. Построить график функции распределения числа испытаний Бернулли, производимых до появления первого успеха включительно.

4.11. Какова вероятность того, что значение случайной величины окажется целым, если известно, что она имеет нормальное распределение?

4.12. Можно ли подобрать постоянную c так, чтобы функция $f(t) = ct^{-4}$ была плотностью распределения на множестве:

а) $[1, \infty]$; в) [-2,-1];

б) $[0, \infty]$; г) [-3,0].

4.13. В шар радиуса R наудачу брошена точка. Построить графики функции распределения и плотности распределения расстояния от точки до центра шара.

4.14. На окружность радиуса R с центром в начале координат наудачу брошена точка. Найти функцию и плотность распределения абсциссы точки попадания.

4.15. n точек независимо друг от друга бросаются на отрезок $[0;\ a]$. Найти функции распределения и плотности распределения случайных величин:

а) Y_1 (крайняя слева точка);

б) Y_n (крайняя справа точка);

в) Y_k (k-я по счету слева точка, $k = 1, \dots, n$).

Семинар № 5: Преобразования случайных величин.

5.1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\ \pi]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \sin X$.

5.2. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \operatorname{tg} X$.

5.3. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(t) = \begin{cases} \theta t^{\theta-1}, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = -\ln X$.

5.4. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0,1]. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

5.5. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин (а) $Y_1 = X^2$, (б) $Y_2 = \sin X$.

5.6. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины $\max(0,\ X)$. Найти функции распределения ее дискретной и абсолютно непрерывной компонент.

5.7. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbf{P}\{X = y_k\} = \mathbf{P}\{Y = y_k\} = p_k,\ \ k \geq 1$. Найти $\mathbf{P}\{X = Y\}$.

5.8. X и Y независимы, причем $\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = 1/2$, а $\mathbf{P}\{Y < t\} = t,\ \ 0 < t < 1$. Найти функции распределения случайных величин $X + Y$ и XY.

5.9. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

a_i	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = a_i)$	0,1	0,3	0,6

Построить ряды распределения следующих случайных величин:

а) $2X + 5$; г) 2^X;

б) $X^2 + 1$; д) $min(X, 1)$;

в) $|X|$; е) $1/(1 - 3X)$.

5.10. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\ 1]$. Найти функции распределения и плотности случайных величин: а) $Y_1 = 2X + 1$; б) $Y_2 = X^{-1}$.

5.11. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин:

а) $Y_1 = [X]$ (целая часть X);

б) $Y_2 = X - [X]$;

в) $Y_3 = X^2$;

г) $Y_4 = \alpha^{-1} \ln X$;

д) $Y_5 = \sqrt{X}$.

5.12. Случайная величина X имеет стандартное распределение Коши. Найти функцию и плотность распределения случайной величины $Y = \operatorname{tg} X$.

5.13. Равнобедренный треугольник образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении в $\mathbf{R}^2$. Найти функцию распределения длины третьей стороны.

5.14. На отрезок оси ординат между точками (0,0) и (0,R) наудачу брошена точка. Через точку попадания проведена хорда окружности $x^2 + y^2 = R^2$, перпендикулярная оси ординат. Найти распределение длины этой хорды.

5.15. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на $[0;\ 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\max(X,\ 2Y)$.

Семинар № 6: Математическое ожидание и дисперсия.

6.1. Найти математические ожидания, дисперсии и стандартные отклонения случайных величин, введенных в задаче 4.1(а,б).

6.2. Найти математические ожидания, дисперсии и стандартные отклонения случайных величин, введенных в задачах (а) 4.6; (б) 4.8.

6.3. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин с плотностями распределения, определенными формулами (а) 4.3(а); (б) 4.4.

6.4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y в задаче 5.1.

6.5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X - Y$ в задаче 5.4.

6.6. Доказать, что $\mathbf{E}X = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\,(X \geq k)$, если известно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\,(X = k) = 1$.

6.7. Случайные величины X и Y независимы, X имеет стандартное нормальное распределение, а Y — равномерное распределение на $[1;\ 4]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - 4Y$.

6.8. Случайная величина имеет распределение Рэлея, если ее плотность распределения равна

$$f(y) = \begin{cases} Aye^{-y^2/(2\sigma^2)} & \text{при } y \geq 0; \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию.

6.9. Случайные величины X и Y независимы, X имеет стандартное нормальное распределение, Y имеет распределение Бернулли с параметром $1/3$. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин: а) $2X + 3Y$; б) $X - 9Y - 1$.

6.10. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей:
а) распределение Пуассона;
б) геометрическое распределение;
в) равномерное распределение на отрезке $[a;\ b]$;
г) показательное распределение с параметром α;
д) гамма-распределение.

6.11. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

a_i	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(X = a_i)$	$1/5$	$1/10$	$3/10$	$2/5$

Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин:
а) X; б) X^2; в)$|X|$; г) 2^X.

6.12. Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, последовательно вынимают шары, причем операция извлечения продолжается до появления белого шара. Составить ряд распределения числа извлеченных черных шаров и вычислить математическое ожидание и дисперсию, если известно, что: а) вынутые шары в урну не возвращаются; б) вынутые шары возвращаются в урну.

6.13. Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке $[a;\ b]$, найти среднее значение и дисперсию площади круга.

6.14. Вычислить математические ожидания, дисперсии и стандартные отклонения случайных величин, введенных в задачах 4.9, 4.10, 4.13, 4.14.

6.15. Вычислить математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины Y из задачи 5.1.

6.16. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин Y_1 и Y_n, введенных в задаче 4.15.

6.17. Пусть случайная величина X принимает только целочисленные значения: $\sum_k \mathbf{P}(X = k) = 1$. Функция $\varphi(z) = \sum_k z^k \mathbf{P}(X = k)$ называется производящей. Выразить $\mathbf{E}X$ и $\mathbf{D}X$ через производные производящей функции.

Семинар № 7: Моменты. Сходимость случайных величин. Закон больших чисел.

7.1. Найти $\mathbf{E}X^{2009}$, если X имеет стандартное нормальное распределение.

7.2. Вычислить момент k-го порядка для случайной величины, имеющей равномерное распределение.

7.3. Случайная величина X принимает натуральные значения с вероятностями

$$\mathbf{P}\,(X = k) = Ck^{-10}, \qquad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Как найти C? Какого порядка моменты существуют у этой случайной величины X?

7.4. Случайная величина принимает только два значения, причем все ее моменты нечетного порядка равны нулю, а все моменты четного порядка равны 1. Найти ряд распределения этой случайной величины.

7.5. Случайные величины Y_i независимы и имеют стандартное распределение Коши, $X_i = |Y_i|$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Сходится ли последовательность S_n/n к константе при $n \to \infty$?

7.6. Решить задачу 7.5 для $X_i = \min(|Y_i|;\ 1)$.

7.7. Найти предел с вероятностью 1 последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{X_1+\ldots+X_n}$, если $X_1,\ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α.

7.8. Найти предел с вероятностью 1 последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)^2$, если $X_1,\ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0;\ b]$.

7.9. Вычислить третий момент случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметрами 2, 1/2.

7.10. Придумать пример двухточечного распределения случайной величины X такого, чтобы $\mathbf{E}X^2 > 1$ и $\mathbf{E}X^{-2} > 1$.

7.11. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти, для каких значений параметра β существует математическое ожидание случайной величины $Y = e^{\beta X}$.

7.12. Вычислить момент k-го порядка для случайной величины, имеющей показательное распределение.

7.13. Вычислить моменты четных положительных порядков для случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение. Доказать, что моменты нечетных положительных порядков равны 0.

7.14. Решая задачу, студент обнаружил, что случайная величина X имеет плотность распределения $f(t) = 3t^{-2}$ при $t \geq 1$. При дальнейшем вычислении моментов по формулам

$$\mathbf{E}X^{-1} = \int_1^\infty 3t^{-3}dt = 3/2, \quad \mathbf{E}X^{-2} = \int_1^\infty 3t^{-4}dt = 1$$

получилось, что $\mathbf{D}X^{-1} = 1 - (3/2)^2 < 0$. Найти ошибку в рассуждениях, поскольку дисперсия отрицательной быть не может.

7.15. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены по закону Пуассона с параметром λ. К чему сходится с вероятностью единица последовательность

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)^2 \quad ?$$

7.16. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и имеют плотность распределения, приведенную в задаче 6.8. Обозначим $Y_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$, $Z_n = (X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n$, Найти предел (в смысле сходимости с вероятностью 1) отношения Y_n^2/Z_n.

Семинар № 8: Центральная предельная теорема и теорема Пуассона.

8.1. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна $0,05 \cdot$№ (здесь № — номер студента по списку группы). Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя (а) не менее 5№ конденсаторов; (б) менее 5№+8 конденсаторов.

8.2. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0.2, 4 с вероятностью 0.4, 3 с вероятностью 0.3 и 2 с вероятностью 0.1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.95 лежит средний балл.

8.3. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

Урожай в кг	0	1	1.5	2	2.5
Вероятность	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

На участке высажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0.95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0.975 урожай был не менее тонны?

8.4. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

8.5. Пусть $X_1, X_2, ...$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 < \infty$. Известно, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{n}} \geq 1\right) \to \frac{1}{3}$$

при $n \to \infty$. Найти $\mathbf{D}X_1$.

8.6. Найти, к какой функции сходится $\mathbf{P}\{\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} < t\}$ при $n \to \infty$, если S_n имеет биномиальное распределение с параметрами n, p.

8.7. Найти вероятность того, что при 720 подбрасываниях игральной кости цифра «6» выпала более 92 раз.

8.8. Найти вероятность того, что при 100 подбрасываниях 10 симметричных монет не менее 2 раз на всех 10 монетах выпал герб.

8.9. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

8.10. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 1200 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного родственникам выплачивается 100000 рублей. Какова вероятность того, что:

а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

б) его доход превысит 6000000 рублей?

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0,95 доход был не менее 4000000 рублей?

8.11. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не менее 100 исправных?

8.12. Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7,2 \cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 5 млн. карточек. Какова вероятность, что никто не угадал все 6 номеров? Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хотя бы один угадал 6 номеров?

8.13. Сколько изюма в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность наличия в булке хотя бы одной изюминки была не менее 0,99?

8.14. Каждое из 10^4 складываемых чисел было округлено с точностью до 10^{-3}. Предполагая, что ошибки, возникшие от округления чисел, взаимно независимы и равномерно распределены на $[-0,5 \cdot 10^{-3},\ 0,5 \cdot 10^{-3}]$, найти пределы, в которых с вероятностью большей 0,99 будет лежать суммарная ошибка.

8.15. Интервалы времени между моментами прихода вызовов независимы и распределены показательно с параметром $\alpha = 5$ мин$^{-1}$ то есть в среднем в минуту приходит 5 вызовов. Найти вероятность того, что сумма 100 интервалов времени превысит 16 минут, 24 минуты.

8.16. На улице стоит человек и продает газеты. Каждый из проходящих мимо людей покупает число газет, распределенное по закону Пуассона с параметром 1/4. Найти вероятность того, что за время продажи 33 газет мимо прошло более 100 людей.

Правила приема заданий, проведения контрольных работ и выставления дифференцированного зачета по «Введению в теорию вероятностей»

Важной формой самостоятельной работы студентов являются индивидуальные задания.

1. Задания предназначены для стимулирования студентов к систематической самостоятельной работе в течение всего семестра.
2. Текст заданий и правила их сдачи сообщаются студентам в начале семестра.
3. По результатам работы на семинаре и сдачи заданий преподаватель, ведущий семинары, выставляет студенту оценку от 0 до 5 баллов.
4. За каждую из двух контрольных работ студент получает от 0 до 6 баллов.
5. При наличии положительных (более 2,5 баллов) оценок за обе контрольные работы и самостоятельную работу студент получает дифференцированный зачет с оценкой, вычисляемой как среднее арифметическое из этих трех оценок.

6. При отсутствии положительной оценки за контрольную работу студент должен переписать эту контрольную работу, а при получении неудовлетворительной (ниже «3») оценки за самостоятельную работу — сдать необходимое число задач преподавателю, проводящему семинары.

Индивидуальные задания

В индивидуальных заданиях номер варианта — это номер студента по списку группы. В каждом варианте первая цифра — номер занятия, вторая цифра — номер задачи.

Вариант 1

1.1. Из чисел от 1 до 100 наугад выбраны два разных числа. События A и B соответственно означают, что выбрано хотя бы одно нечетное число и хотя бы одно четное число. Что означают события AB и $A \cup B$?

1.2. Из корзины с пятью красными яблоками и четырьмя зелеными берутся (без возвращения) наудачу три яблока. С какой вероятностью среди этих трех яблок: а) ровно два зеленых, б) хотя бы одно красное?

2.1. Молодой человек договорился встретиться с девушкой между 9 и 10 часами и обещал ждать её до 10 часов. Девушка обещала ждать его 10 минут, если придет раньше. Найти вероятность того, что они встретятся. Предполагается, что моменты их прихода равновероятны в течение часа.

2.2. В тире имеется 6 одинаковых на вид ружей. Вероятность попадания в мишень для двух из них по 0,9, для трех по 0,8 и для одного 0,3. Какова вероятность того, что стрелок попадет в мишень, если он выбирает ружье наудачу? Какова вероятность того, что было выбрано ружье, для которого вероятность попадания 0,3, при условии, что стрелок попал в мишень?

3.1. При передаче текста в среднем 10 % букв искажается и принимается неверно. Передано слово из 6 букв. Какова вероятность того, что все буквы слова будут приняты правильно? Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 3 раза больше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 4 испытаниях будет k успехов.

4.1. Вероятность попадания в мишень равна 0,6 при каждом выстреле. Стрельба ведется одиночными выстрелами до первого попадания, пока не будет израсходован боезапас. Найти ряд распределения числа произведенных выстрелов, если боезапас составляет 3 единицы. Построить график функции распределения.

4.2. Случайная величина X имеет треугольное распределение. Плотность распределения равна

$$f(t) = \begin{cases} At & \text{при } 0 \le t \le \theta; \\ 0 & \text{при } t \notin [0,\ \theta]. \end{cases}$$

Найти коэффициент A. Найти вероятность того, что $X > \theta/2$. Начертить графики плотности распределения и функции распределения.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 3/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X^3$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти k-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta^2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Участник лотереи бросает игральную кость 20 раз. Участник получает ценный приз, если сумма очков больше 90. Оценить вероятность получения ценного приза.

8.2. В условиях задачи 8.1 оценить вероятность того, что четное число очков выпадет не менее 15 раз.

Вариант 2

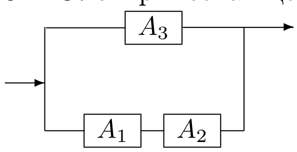
1.1. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A — выбранное число делится на 5; событие B — данное число оканчивается нулем. Что означают события $A \setminus B$ и $A\overline{B}$?

1.2. Бросают 3 игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпадет разное число очков?

2.1. В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу брошена точка. Пусть (X,Y) — ее координаты. Найти $\mathbf{P}(\max\{X+3Y, Y\} \le 1/2)$.

2.2. Одинаковые детали поступают на сборку с трех автоматов. Первый автомат дает 20 %, второй 30 %, третий 50 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 2,5 %, второго — 2 %, третьего — 2,5 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на первом автомате.

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя каждого элемента A_k равна 0,02. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 4 раза больше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 3 испытаниях будет k успехов.

4.1. По мишени одновременно стреляют два стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,6 и 0,8. Найти ряд распределения числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

4.2. Распределение Парето приближенно описывает распределение доходов физических лиц. Плотность распределения равна

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{t^\alpha} & \text{при } t \ge \theta; \\ 0 & \text{при } t < \theta. \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 2$, $\theta > 0$ — параметры распределения, A — нормирующая константа. Найти константу A и функцию распределения.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X+1)^2$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = -2X$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2. Вычислить значение параметра α, при котором математическое ожидание превосходит значение параметра θ в 3 раза.

7.1. Выяснить, при каких значениях параметра α существует k-й момент случайной величины из задачи 4.2, и найти его.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Время ожидания поезда метро за одну поездку имеет равномерное распределение на отрезке от 0 до 5 минут. Оценить вероятность того, что суммарное время ожидания за 30 поездок окажется меньше 1,5 часов.

8.2. Время ожидания поезда метро за одну поездку имеет равномерное распределение на отрезке от 0 до 5 минут. Оценить вероятность того, что за 60 поездок будет более 10 случаев, когда время ожидания составит менее минуты.

Вариант 3

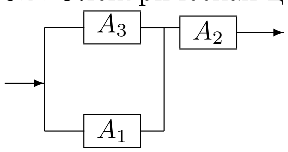
1.1. Игральная кость подбрасывается два раза подряд. Описать пространство элементарных исходов Ω. Описать событие A, состоящее в том, что хотя бы один раз выпала единица, событие B, состоящее в том, что сумма очков, выпавших при первом и втором подбрасывании, нечетна.

1.2. В шахматном турнире участвуют 10 человек, которые разбиваются на пары по жребию. Какова вероятность того, что два самых сильных шахматиста попадут в одну пару?

2.1. На отрезок $[1,\ 3]$ наудачу брошена точка. С какой вероятностью она окажется ближе к точке π, чем к точке e?

2.2. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат дает 80 %, а второй 20 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 1 %, а второго — 4 %. Деталь, изготовленная автоматом, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом автомате?

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_k равна 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь не будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 2 раза меньше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 3 испытаниях будет k успехов.

4.1. Вероятность отказа сервера при каждом из независимых подключений с помощью модема равна 0,3. Попытки подключения производятся до установления связи. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных попыток подключения, если число попыток ограничено четырьмя. Построить график функции распределения.

4.2. Закон Рэлея с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-x^2/2} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

в ряде случаев описывает распределение срока службы электронной аппаратуры. Найти коэффициент A и функцию распределения.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X+1)^{-1}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X^2$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти k-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1^3 + \ldots + X_n^3)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta} e^{-x^3/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Количество воды, расходуемое жителями одной квартиры в сутки, имеет показательное распределение со средним значением 100 литров. Найти, какого количества воды достаточно с вероятностью 0,98 для удовлетворения потребностей жильцов 25 квартир.

8.2. Вероятность того, что жильцы квартиры закажут доставку пиццы, равна 0,001. Какова вероятность того, что из 200 квартир пиццу закажут более чем в одной?

Вариант 4

1.1. Пусть A, B, C — произвольные события. Найти выражение для события, состоящего в том, что из A, B и C произошло хотя бы два события.

1.2. Шесть книг на полке расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом (в любом порядке).

2.1. Два лица A и B имеют одинаковую вероятность прийти к указанному месту в любой момент времени между 12 и 13 часами. Лицо A ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит; лицо B ждет другого в течение 20 минут. Найти вероятность того, что A и B встретятся.

2.2. Студент выучил к экзамену только 20 вопросов из 30. Для сдачи экзамена достаточно ответить на два из трех разных вопросов. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан? Какова вероятность того, что студент ответил на все три вопроса, если известно, что он сдал экзамен?

3.1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли равна вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 5 испытаниях будет k успехов.

4.1. Пользователь компьютера забыл пароль и перебирает наудачу 4 возможных. После трех неудачных попыток компьютер блокируется. Найти ряд распределения числа попыток. Построить график функции распределения.

4.2. Случайная величина X — координата точки, брошенной наудачу на множество $[1,\ 2]\cup[3,\ 4]$. Найти плотность распределения и функцию распределения. Построить их на графике.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = X^2$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = 1/X$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти четные моменты случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Участник лотереи бросает 12 шаров, каждый из которых может попасть в лузы с номерами от 1 до 6. Участник получает ценный приз, если сумма очков меньше 24. Оценить вероятность получения ценного приза.

8.2. В условиях предыдущей задачи оценить вероятность того, что при 120 бросаниях не менее 12 раз выпадет «1».

Вариант 5

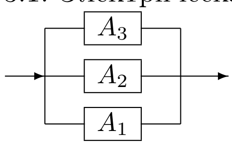
1.1. Рабочий изготовил три детали. Пусть событие A_i состоит в том, что i-ая изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что ровно одна деталь имеет дефект.

1.2. Один школьник, желая подшутить над своими товарищами, собрал в гардеробе все пальто, а потом развесил их в случайном порядке. Найти вероятность того, что каждое пальто снова попало на прежнее место, если в гардеробе шесть крючков и на них висело шесть пальто.

2.1. На отрезке AB наудачу выбираются две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется ближе к точке N, чем к точке A?

2.2. Прибор состоит из двух независимо работающих блоков, вероятности отказа которых за смену равны соответственно 0,05 и 0,08. Вероятность выхода из строя прибора при отказе одного из блоков равна 0,8; при отказе обоих блоков — 1. Определить вероятность выхода прибора из строя за смену. Найти вероятность того, что отказали оба блока, если известно, что прибор вышел из строя.

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_1 равна 0,1, остальных элементов A_k — по 0,2. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 9 раз больше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 3 испытаниях будет k успехов.

4.1. При игре с автоматом на барабане выпадают наудачу номера от 000 до 999. Если выпадают две одинаковых цифры, игрок получает 10 рублей, если три одинаковых — 100 рублей. В остальных случаях не получает ничего. Найти ряд распределения величины выигрыша. Построить график функции распределения.

4.2. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(t) = Ae^{-2|t|}$ (распределение Лапласа). Найти коэффициент A. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, большее 1.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = 20-2X$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = 1/X$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти $2k$-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Количество десятикопеечных монет, необходимое для выдачи каждой сдачи в кассе, принимает значения от 0 до 4 с равными вероятностями. Найти, сколько должно быть десятикопеечных монет в кассе, чтобы с вероятностью 0,9 их хватило на 2500 выдач сдачи.

8.2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что более 450 раз выдали по 4 десятикопеечных монеты.

Вариант 6

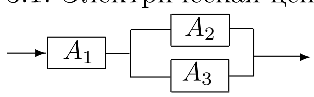
1.1. Из колоды карт в 52 листа наудачу вынимаются две карты (без возвращения). Описать пространство элементарных исходов, а также событие, состоящее в том, что среди этих карт окажется ровно один туз.

1.2. В бригаде 3 рабочих. Какова вероятность того, что по крайней мере двое из них родились в один и тот же день недели? Считать, что вероятности родиться в каждый из дней одинаковы.

2.1. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина каждой из трех получившихся частей не превосходит 3/4.

2.2. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 3:2. Из-за помех искажается в среднем 25 % сигналов «точка» и 20 % сигналов «тире», причем «точка» искажается в «тире», а «тире» в «точку». Найти вероятность искажения сигнала. Определить вероятность того, что передавали «тире», если известно, что приняли «точку».

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_2 равна 0,01, остальных элементов A_k — по 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 1,5 раза меньше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 4 испытаниях будет k успехов.

4.1. Два игрока играют в шахматы на деньги. Известно, что в среднем из 4 партий одну выигрывает первый игрок, одна заканчивается вничью, и две выигрывает второй игрок. В случае проигрыша первый игрок платит второму 5 рублей, а в случае выигрыша получает от второго 10 рублей. Найти ряд распределения суммы выигрыша в одной партии (отрицательный выигрыш — это проигрыш, взятый со знаком «минус»). Построить график функции распределения.

4.2. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2} & \text{при } t \in [a;\ \infty); \\ 0 & \text{при } t < a \end{cases}$$

Найти нормирующую константу A. Построить график плотности распределения при $a = 1$.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = 2^{-X/10}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = 2(a - X)$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти $(2k+1)$-й момент случайной величины из задачи 4.2 при $a = 0$.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1^3 + \ldots + X_n^3)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta} e^{-x\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Суммарное время работы машины складывается из 10 000 интервалов времени, каждый из которых измеряется со стандартным отклонением в 1 минуту. Найти вероятность того, что фактическое время работы отличается от измеренного больше, чем на 1 час.

8.2. При включении лампы она перегорает с вероятностью 0,001. Найти вероятность того, что 5 ламп хватит на 2000 включений.

Вариант 7

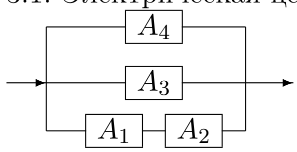
1.1. Две игральные кости бросаются 1 раз. Описать пространство элементарных исходов. Пусть событие A означает, что на первой кости выпало четное число, а на второй больше очков, чем на первой, а событие B — на второй выпало 4 очка. Описать события AB и $A\overline{B}$.

1.2. Бросают 5 монет. Какова вероятность того, что на них выпадут и орлы и решки?

2.1. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина максимальной части из трех получившихся частей не превосходит 4/5.

2.2. Одинаковые детали поступают на сборку с трех заводов. Первый завод дает 10 %, второй 40 %, третий 50 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого завода составляет 2 %, второго — 3 %, третьего — 4 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на первом заводе.

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя каждого элемента A_k равна 0,2. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 7 раз больше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 3 испытаниях будет k успехов.

4.1. Для трех саженцев вероятности успешно вынести пересадку равны 0,5, 0,6 и 0,8. Найти ряд распределения числа вынесших пересадку саженцев. Построить график функции распределения.

4.2. Распределение Парето приближенно описывает распределение доходов физических лиц. Плотность распределения равна

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{t^{\alpha+1}} & \text{при } t \geq \theta; \\ 0 & \text{при } t < \theta. \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 1$, $\theta > 0$ — параметры распределения, A — нормирующая константа. Найти константу A и функцию распределения.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 1/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = 1/X$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти, при каких значениях параметра α существуют математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2. Вычислить их. Вычислить значение параметра α, при котором математическое ожидание превосходит значение параметра θ в 10 раз.

7.1. Найти, при каких значениях параметра α существует k-й момент случайной величины из задачи 4.2, и вычислить его.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-(\theta+1)/\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Время ожидания троллейбуса за одну поездку имеет равномерное распределение на отрезке от 0 до 15 минут. Оценить вероятность того, что суммарное время ожидания за 10 поездок окажется меньше 1,5 часов.

8.2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что время ожидания хотя бы раз окажется меньше 30 секунд.

Вариант 8

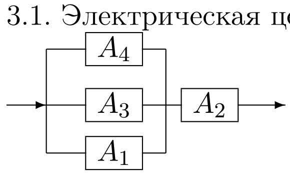
1.1. Брошены три монеты. Описать события $A = \{$выпало не больше двух гербов и по крайней мере одна решка$\}$ и $B = \{$выпало не менее одного герба и хотя бы одна решка$\}$. Описать также события AB, $A\overline{B}$.

1.2. В шахматном турнире участвуют 16 человек, которые разбиваются на пары по жребию и играют по олимпийской системе (проигравший выбывает из игры, ничьих нет). Какова вероятность того, что второй по силе шахматист не попадет в финал?

2.1. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что сумма длин первых двух частей не превосходит длины последней части.

2.2. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый автомат дает 50 %, а второй 30 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 1 %, второго — 2 %, а третьего — 4 %. Деталь, изготовленная автоматом, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом автомате?

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_k равна 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь не будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли равна вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 6 испытаниях будет k успехов.

4.1. Вероятность отказа сервера при каждом из независимых подключений с помощью модема равна 0,2. Попытки подключения производятся до установления связи. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных попыток подключения, если число попыток ограничено пятью. Построить график функции распределения.

4.2. Закон Эрланга с плотностью распределения

$$f(t) = \begin{cases} At^2e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

описывает распределение времени прибытия двух вызовов в пуассоновском потоке. Найти коэффициент A. Построить график плотности распределения.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 1/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X^3$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти k-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Количество воды, расходуемое жителями одной квартиры в сутки, имеет показательное распределение со средним значением 200 литров. Найти, с какой вероятностью для удовлетворения потребностей жильцов 50 квартир будет достаточно 12 000 литров воды.

8.2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что хотя бы в одной квартире потребление воды превысит 1000 литров.

Вариант 9

1.1. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Описать событие, означающее, что расстояние от A до каждой стороны прямоугольника не превосходит $1/2$.

1.2. На полке в случайном порядке расставлены 8 книг, в том числе двухтомник Мандельштама. Найти вероятность того, что один из томов Мандельштама окажется у правого края полки, а другой — у левого.

2.1. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что сумма длин последних двух частей не превосходит длины первой части.

2.2. Студент выучил к экзамену только 30 вопросов из 40. Для сдачи экзамена достаточно ответить на два из четырех разных вопросов. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан? Какова вероятность того, что студент ответил на все четыре вопроса, если известно, что он сдал экзамен?

3.1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,9. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что будет сделано более трех выстрелов.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 3 раза меньше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 4 испытаниях будет k успехов.

4.1. Пользователь компьютера забыл пароль и перебирает наудачу 6 возможных. После трех неудачных попыток компьютер блокируется. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток. Построить график функции распределения.

4.2. Время достижения стандартным броуновским движением уровня a имеет плотность распределения

$$f(t) = \begin{cases} At^{-3/2}e^{-a^2/(2t)} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Найти нормирующую константу A.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 1/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X^3$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Доказать, что математическое ожидание времени достижения не существует в задаче 4.2. (Сделать замену $a/\sqrt{t} = y$).

7.1. Найти $\mathbf{E}X^{-1/2}$ для случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2}e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Участник лотереи бросает 5 шаров, каждый из которых может попасть в лузы с номерами от 1 до 6. Участник получает ценный приз, если сумма очков больше 23. Оценить вероятность получения ценного приза.

8.2. В условиях предыдущей задачи оценить вероятность того, что при 60 бросаниях не менее 2 раз шар попадет в лузу с номером «3».

Вариант 10

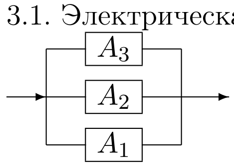
1.1. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 4 и 2. Описать событие, означающее, что расстояние от A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит 1.

1.2. Из колоды карт в 36 листов вынимаются три карты. Найти вероятность того, что среди них окажутся хотя бы две красные карты.

2.1. На отрезке AB наудачу выбираются две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется по крайней мере втрое ближе к точке N, чем к точке A?

2.2. Прибор состоит из трех независимо работающих блоков, вероятности отказа которых за смену равны соответственно 0,01, 0,05 и 0,08. Вероятность выхода из строя прибора при отказе одного из блоков равна 0,5; при отказе двух блоков — 0,8, при отказе всех трех блоков — 1. Определить вероятность выхода прибора из строя за смену. Найти вероятность того, что отказали все три блока, если известно, что прибор вышел из строя.

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_1 равна 0,1, остальных элементов A_k — по 0,04. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 1,5 раза больше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 4 испытаниях будет k успехов.

4.1. Игрок сначала бросает в автомат 10 рублей, затем либо ничего не получает, либо получает 100 рублей (с вероятностью 0,01), либо 20 рублей (с вероятностью 0,03). В случае проигрыша величина выигрыша считается отрицательным числом, равным величине проигрыша, взятой со знаком «минус». Найти ряд распределения величины выигрыша. Построить график функции распределения.

4.2. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{1 + \left(\dfrac{t}{\theta}\right)^2} & \text{при } |t| \le \theta; \\ 0 & \text{при } |t| > \theta \end{cases}$$

(усеченное распределение Коши). Найти коэффициент A. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, большее $\theta/\sqrt{3}$.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 20)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X^3$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти 4-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Количество десятикопеечных монет, необходимое для выдачи каждой сдачи в кассе, принимает значения от 0 до 4 с равными вероятностями. Найти, с какой вероятностью на 100 выдач сдачи будет достаточно 220 десятикопеечных монет .

8.2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что не менее 4 раз будет выдано по 3 десятикопеечных монеты.

Вариант 11

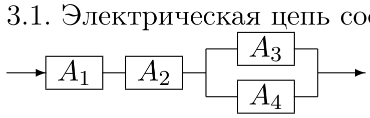
1.1. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: $A_k,\ k = 1, 2,$ — исправен k-й блок первого типа, $B_j,\ j = 1, 2, 3,$ — исправен j-й блок второго типа. Прибор исправен, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C, означающее исправность прибора, через A_k и B_j.

1.2. Бросают 4 игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на двух из них выпадет одинаковое число очков?

2.1. Стержень единичной длины AB разломан в двух наудачу выбранных точках X и Y. С какой вероятностью расстояние между этими точками не превзойдет длины отрезка BY?

2.2. Одинаковые детали поступают на сборку с трех автоматов. Первый автомат дает 25 %, второй 30 %, третий 45 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 2,5 %, второго — 2 %, третьего — 3 %. Найти вероятность поступления на сборку небракованной детали. Найти вероятность того, что оказавшаяся небракованной деталь изготовлена на первом автомате.

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя каждого элемента A_k равна 0,02. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 9 раз меньше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 3 испытаниях будет k успехов.

4.1. По мишени одновременно стреляют три стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,4, 0,7 и 0,9. Найти ряд распределения числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

4.2. Максимальный нуль стандартного броуновского движения на [0; 1] имеет координату X с функцией распределения

$$F(t) = \begin{cases} A \arcsin \sqrt{t} & \text{при } t \in [0;\ 1]; \\ 1 & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

Найти константу A. Построить графики функции распределения и плотности распределения случайной величины X.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 1/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = 1/X$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти $\mathbf{E}\sqrt{X}$ для случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти момент порядка 3/2 случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Время ожидания поезда метро за одну поездку имеет равномерное распределение на отрезке от 0 до 5 минут. Оценить число поездок, в течение которых суммарное время ожидания окажется меньше 1 часа с вероятностью 0,96.

8.2. Найти вероятность того, что не менее 2 раз из 40 поездок время ожидания оказалось больше 4,5 минут.

Вариант 12

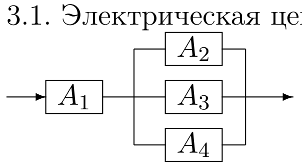
1.1. Брошены четыре монеты. Пусть событие A состоит в том, что по крайней мере на двух монетах выпал герб, а событие B — в том, что хотя бы на двух монетах выпала решка. Описать события AB, $\overline{A}B$, $\overline{AB}$.

1.2. В шахматном матче участвуют 4 пары шахматистов. Вероятность ничьей в каждой партии равна 1/4. Найти вероятность того, что в матче будет хотя бы одна ничья.

2.1. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина каждой из первых двух частей не превосходит 3/5, длина же последней части больше 1/2.

2.2. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый и второй автоматы дают по 40 %, а третий и четвертый по 10 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого и второго автомата составляет 1 %, а третьего и четвертого — 4 %. Деталь, изготовленная автоматом, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом автомате?

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_k равна 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь не будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 7 раз меньше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 3 испытаниях будет k успехов.

4.1. Вероятность отказа сервера при каждом из независимых подключений с помощью модема равна 0,2. Попытки подключения производятся до установления связи. Найти ряд распределения числа произведенных попыток подключения, если число попыток ограничено тремя. Построить график функции распределения.

4.2. Закон Эрланга с плотностью распределения

$$f(t) = \begin{cases} At^2 e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

описывает время ожидания прихода трех вызовов в пуассоновском потоке. Найти коэффициент A и функцию распределения.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 1/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X^2$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти k-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} e^{-x^2/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Количество воды, расходуемое жителями одной квартиры в сутки, имеет показательное распределение со средним значением 100 литров. Найти, какого количества воды достаточно для 100 квартир с вероятностью 0,98.

8.2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что ни в одной квартире потребление воды не будет меньше 5 литров.

Вариант 13

1.1. На отрезке $[0,\ 1]$ наудачу ставятся две точки. Построить подходящее пространство элементарных исходов Ω и описать событие A, означающее, что вторая точка ближе к правому концу отрезка $[0,\ 1]$, чем к левому, и событие B, означающее, что расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка, а также событие AB.

1.2. Трое женщин и трое мужчин садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что мужчины и женщины за столом будут чередоваться.

2.1. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. найти вероятность того, что расстояние от A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит 1/3.

2.2. Студент выучил к зачету только 10 вопросов из 30. Для получения зачета достаточно ответить на два из четырех разных вопросов. Какова вероятность того, что зачет будет получен? Какова вероятность того, что студент ответил не менее чем на три вопроса, если известно, что он получил зачет?

3.1. Вероятность установления соединения с сервером при каждой попытке равна 0,9. Найти вероятность того, что соединение будет установлено не раньше четвертой попытки.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 2 раза больше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 3 испытаниях будет k успехов.

4.1. Пользователь компьютера забыл пароль и перебирает наудачу 5 возможных. После четырех неудачных попыток компьютер блокируется. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток. Построить график функции распределения.

4.2. Случайная величина X имеет стандартное логарифмически нормальное распределение, если $X = e^Y$, где Y имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины X. Найти вероятность того, что $X > 1$.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 1/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = 1/X$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти k-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1^3 + \ldots + X_n^3)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^2} e^{-x^3/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Взвешивают груз, находящийся в 200 мешках. Погрешность измерений веса каждого из них распределена по нормальному закону с нулевым средним и стандартным отклонением 100 грамм. Найти вероятность того, что суммарная погрешность по абсолютной величине меньше 1 кг.

8.2. В условиях предыдущей задачи каждый из мешков поврежден с вероятностью 0,03. Найти вероятность того, что повреждено более 3 мешков.

Вариант 14

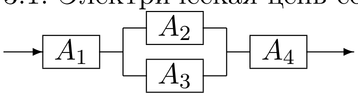
1.1. Из множества супружеских пар выбирается одна пара. Событие $A = \{$Мужу больше 25 лет$\}$, событие $B = \{$Муж старше жены$\}$, событие $C = \{$Жене больше 25 лет$\}$.
Выяснить смысл событий: ABC, $A \backslash AB$, $A\overline{B}C$.

1.2. Собрались вместе три незнакомых человека. Найти вероятность, что хотя бы у двух из них совпадают дни рождения. Предполагается, что вероятность родиться в любой из 365 дней одна и та же.

2.1. На отрезке AB наудачу выбираются две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется по крайней мере вдвое ближе к точке A, чем к точке N?

2.2. Прибор состоит из четырех независимо работающих блоков, вероятности отказа которых за смену равны соответственно 0,01, 0,02, 0,03 и 0,04. Вероятность выхода из строя прибора при отказе одного из блоков равна 0,8; при отказе более чем одного блока — 1. Определить вероятность выхода прибора из строя за смену. Найти вероятность того, что отказал один блок, если известно, что прибор вышел из строя.

3.1. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_1 равна 0,1, остальных элементов A_k — по 0,4. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 2 раза меньше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 4 испытаниях будет k успехов.

4.1. При игре с автоматом в случае выигрыша игрок получает 10 рублей. Для участия в игре игрок бросает в автомат 5 рублей. Вероятность выигрыша равна 0,2. Найти ряд распределения величины выигрыша. Построить график функции распределения. (В случае проигрыша величина выигрыша считается отрицательным числом, равным величине проигрыша, взятой со знаком «минус».)

4.2. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(t) = Ae^{-|t-a|}$ (распределение Лапласа). Найти коэффициент A. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, большее $2a$.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = 20 - 2X$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = 1/X$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти 3-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta^2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Количество десятикопеечных монет, необходимое для выдачи каждой сдачи в кассе, принимает значения от 0 до 4 с равными вероятностями. В кассе в начале рабочего дня находится 2500 десятикопеечных монет. Найти, для какого количества покупателей получение сдачи гарантировано с вероятностью 0,8.

8.2. В условиях предыдущей задачи найти, при каком количестве выдач сдачи будет с вероятностью 0,999 выдано хотя бы раз 4 десятикопеечных монеты.

Вариант 15

1.1. Брошены две игральные кости. Пусть событие A состоит в том, что выпавшая сумма очков нечетна, а событие B — в том, что хотя бы на одной из костей выпала тройка. Описать события $\overline{AB}$ и $A\overline{B}$.

1.2. Из полного набора костей домино наудачу берутся пять костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна с шестеркой.

2.1. На линейке наудачу поставлены 2 точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними окажется больше половины длины линейки?

2.2. Первое орудие 2-орудийной батареи пристреляно так, что вероятность попадания для него равна $3/11$. Для второго орудия она равна $1/5$. Батарея дала залп по цели. Найти вероятность того, что цель поражена. Найти вероятность того, что первое орудие попало в цель, если известно, что цель была поражена. Для поражения цели достаточно одного попадания.

3.1. Два стрелка поочередно стреляют по одной и той же мишени. У каждого стрелка 2 патрона. При первом попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0,3, для второго — 0,4. Найти вероятность того, что оба стрелка израсходуют весь свой боезапас.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 4 раза меньше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 3 испытаниях будет k успехов.

4.1. Вероятность приема отдельного сигнала равна 0,8. Радиосигнал передается 4 раза. Найти ряд распределения числа принятых сигналов. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что принятых сигналов будет не меньше 2, но не больше 3.

4.2. Плотность распределения равна

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2\theta^3} e^{-t/\theta} & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t \le 0. \end{cases}$$

Начертить графики плотности распределения и функции распределения.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 1/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = 1/X$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2.

7.1. Найти k-й момент случайной величины из задачи 4.2.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1 + \ldots + X_n)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} e^{-x/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Продолжительность разговора по телефону имеет показательное распределение с параметром α =2 мин$^{-1}$. Найти границы, в которых с вероятностью 0,98 находится суммарная продолжительность 200 разговоров.

8.2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что длительность хотя бы одного разговора окажется меньше 5 секунд.

Вариант 16

1.1. События: A — хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B — все приборы доброкачественные. Что означают события $A \cup B$ и AB?

1.2. В ящике лежат 3 черных и 3 белых шара. Найти вероятность того, что при последовательном случайном извлечении шаров из ящика сначала вынут все белые шары.

2.1. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина каждой из трех получившихся частей не меньше 1/6.

2.2. Запрос абонента автоматически с равными вероятностями направляется на один из двух серверов. Вероятность возниконовения сбоя в работе первого сервера равна 0,1, второго — 0,01. Какова вероятность того, что запрос будет обслужен без сбоя? Какова вероятность того, что абонент обслуживался на первом сервере, если известно, что он был обслужен без сбоя?

3.1. Вероятность изготовления некачественной детали равна 0,2. Найти вероятность того, что из 4 деталей найдется хотя бы одна качественная.

3.2. Вероятность успеха в схеме Бернулли в 2 раза больше вероятности неудачи. Для каждого целого k найти вероятность того, что в 4 испытаниях будет k успехов.

4.1. Вероятность попадания в мишень равна 0,8 при каждом выстреле. Стрельба ведется одиночными выстрелами до первого попадания, пока не будет израсходован боезапас. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов, если боезапас составляет 4 единицы. Построить график функции распределения.

4.2. Плотность распределения равна

$$f(t) = \begin{cases} (\theta-1)t^{-\theta} & \text{при } t > 1; \\ 0 & \text{при } t \le 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения. Построить графики плотности распределения и функции распределения при $\theta = 2$.

5.1. Найти таблицу распределения случайной величины $Y = (X - 1/2)^{-2}$, где X — случайная величина из задачи 4.1.

5.2. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X^3$, где X — случайная величина из задачи 4.2.

6.1. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины из задачи 4.1.

6.2. Найти, при каких значениях параметра θ существуют математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X в задаче 4.2. Вычислить их.

7.1. Найти, при каких значениях θ существует k-й момент случайной величины из задачи 4.2. Вычислить его.

7.2. Найти константу, к которой сходится с вероятностью единица последовательность $(X_1^3 + \ldots + X_n^3)/n$, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta^2} e^{-x\sqrt{x}/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Найти, для каких значений параметра θ эта сходимость имеет место.

8.1. Участник лотереи бросает игральную кость 36 раз. Участник получает ценный приз, если сумма очков больше 160. Оценить вероятность получения ценного приза.

8.2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что не менее 4 раз выпадет число «3».

Список литературы

1. *Боровков А.А.* Введение в теорию вероятностей. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 470 с.

2. *Боровков А.А.* Математическая статистика. — Новосибирск: Наука, 1997. — 772 с.

3. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. — СПб., 1999. — 223 с.

4. *Бородихин В.М.* Введение в теорию вероятностей и математическая статистика: Практикум. — Новосибирск, 2000. — Ч. 1. — 159 с.

5. *Бородихин В.М.* Введение в теорию вероятностей и математическая статистика: Практикум. — Новосибирск, 2001. — Ч. 2. — 105 с.

6. *Бородихин В.М., Ковалевский А.П.* Высшая математика. — Т. 4.2: Введение в теорию вероятностей и математическая статистика. — Новосибирск: НГТУ, 2005. — 256 с.

7. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984. — 248 с.

8. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А.В.* Сборник задач по математической статистике. — М.: Высшая школа, 1989. — 255 с.

9. *Коршунов Д.А., Фосс С.Г., Эйсымонт И.М.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей. — СПб., 2004. — 192 с.

10. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач и упражнений по математической статистике. — Новосибирск, 2001. — 120 с.

11. *Лотов В.И.* Введение в теорию вероятностей и математическая статистика. — Новосибирск: НГУ, 2006. — 128 с.

7.1.12. *Свешников А.А. и др.* Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. — М., 1970. — 656 с.

13. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

14. *Чернова Н.И.* Введение в теорию вероятностей. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

15. *Чернова Н.И.* Математическая статистика. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 148 с.

Источники Интернет

1. *Лотов В.И.* Лекции по теории вероятностей и математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/lotov/tv&ms_ff.pdf

2. *Коршунов Д.А., Фосс С.Г.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseProbability2.pdf

3. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач и упражнений по математической статистике.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseStatistics2.pdf

4. *Чернова Н.И.* Лекции по теории вероятностей.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/tv/index.html

5. *Чернова Н.И.* Лекции по математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/ms.html

Программу составил доцент А. П. Ковалевский