

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

---

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ, ТОМ 13

---

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ответственный редактор  
член-корреспондент АН СССР *А. А. Боровков*

(Отдельный оттиск)



НОВОСИБИРСК  
«НАУКА»  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
1989

- распределений // Теория вероятностей и ее приложения.— 1987.— Т. 32, вып. 4.— С. 694—702.
14. Gröbel R. Functions of discrete probability measures: rates of convergence in the renewal theory // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1983.— Bd 64.— S. 341—357.
  15. Gröbel R. On subordinated distributions and generalized renewal measures // Ann. Probab.— 1987.— V. 15, N 1.— P. 394—415.
  16. Gröbel R. Über unbegrenzt teilbare Verteilungen // Arch. Math.— 1983.— V. 41, Fasc. 1.— P. 80—88.
  17. Улановский А. М. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений на бесконечности // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.— Харьков, 1981.— Вып. 35.— С. 100—107.
  18. Круглов В. М., Антонов С. П. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Теория вероятностей и ее приложения.— 1982.— Т. 27, вып. 4.— С. 625—642.
  19. Круглов В. М., Антонов С. П. Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Там же.— 1984.— Т. 29, вып. 4.— С. 735—742.
  20. Круглов В. М. Дополнятельные главы теории вероятностей: Учеб. пособие.— М.: Высш. шк., 1984.— 264 с.
  21. Omeu E. Infinite divisibility and random sums of random vectors // Yokohama Math. J.— 1985.— Vol. 33.— P. 39—48.
  22. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
  23. Шрейдер Ю. А. Строение максимальных идеалов в кольцах со сверткой // Мат. сб.— 1950.— Т. 27, № 2.— С. 297—318.
  24. Рогозин Б. А., Сгибнев М. С. Банаховы алгебры мер на прямой // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 2.— С. 160—169.
  25. Рогозин Б. А. Асимптотика коэффициентов в теоремах Леви — Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах // Там же.— 1973.— Т. 14, № 6.— С. 1304—1312.
  26. Essén M. Banach algebra methods in renewal theory // J. Anal. Math.— 1973.— Vol. 26.— P. 303—336.
  27. Сгибнев М. С. Банаховы алгебры мер класса  $\mathcal{P}(\gamma)$  // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 4.— С. 162—171.
  28. Наймарк М. А. Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.— 664 с.
  29. Wermer J. Banach Algebras and Several Complex Variables.— New York a. o.: Springer, 1976.— 161 p.
  30. Van Dulst D., Frenk J. B. G. On Banach algebras, subexponential distributions and renewal theory.— Amsterdam, 1984.— 57 p.— (Preprint; University of Amsterdam, Department of Mathematics; Report 84—20).
  31. Круглов В. М. Замечание к теории безгранично делимых законов // Теория вероятностей и ее приложения.— 1970.— Т. 15, вып. 2.— С. 330—336.
  32. Шиллов Г. Е. О локально аналитических функциях // Успехи мат. наук.— 1966.— Т. 21, вып. 6.— С. 177—182.
  33. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.— 309 с.
  34. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.— 280 с.

## ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДВУГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

В. И. ЛОТОВ

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается конечная однородная неразложимая непериодическая цепь Маркова  $\{\kappa_n\}_{n \geq 0}$  с множеством состояний  $D = \{1, \dots, m\}$  и матрицей переходных вероятностей  $\mathcal{P} = \|p_{jk}\|_{j,k \in D}$ . Пусть  $\{\xi_{jk}^{(n)}\}$ ,  $n \geq 1$ ,  $j, k \in D$  — не зависящее от  $\{\kappa_n\}$  семейство независимых случайных величин, одинаково распределенных при фиксированных  $j, k$ . Положим

$$S_0 = 0, \quad S_n = S_{n-1} + \xi_{\kappa_{n-1}\kappa_n}^{(n)}, \quad n > 0. \quad (1)$$

Очевидно  $\{\kappa_n, S_n\}$  есть двумерный марковский процесс, эволюция которого определяется матрицей

$$F(\mu) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} dP(S_1 \leq y, \kappa_1 = k/\kappa_0 = j) \right\| = \|P_{jk} f_{jk}(\mu)\|, \quad (2)$$

где  $f_{jk}(\mu) = \mathbf{E} e^{i\mu \xi_{jk}^{(1)}}$ . Для произвольных положительных чисел  $a$  и  $b$  введем случайную величину

$$N = N(a, b) = \min \{n: S_n \notin (-a, b)\},$$

равную моменту первого выхода последовательности  $\{S_n\}$  из интервала  $(-a, b)$ . Полагаем  $N = \infty$ , если  $S_n \in (-a, b)$  при всех  $n$ .

Цель работы состоит в получении полных асимптотических разложений по степеням  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $\frac{a}{n}$ ,  $\frac{b}{n}$  для распределений вида

$$P(S_N \in A, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j), P(S_N \in B, N \leq n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) \quad (3)$$

при условии, что  $a = a(n) \rightarrow \infty$ ,  $b = b(n) \rightarrow \infty$ ,  $a + b = o(n)$ .

Для обычных случайных блужданий ( $m = 1$ ) асимптотические свойства распределений граничных функционалов, связанных с достижением траекторией  $S_1, S_2, \dots$  фиксированного уровня (однограничная задача) или с первым выходом из интервала (двуграничная задача), исследованы достаточно полно. Среди множества подходов здесь выделим факторизационный метод, он обеспечивает наибольшие возможности для получения асимптотических разложений. Известно (см., например, [1]), что преобразование Фурье — Стильтеса распределений практически всех интересующих нас функционалов в однограничной задаче могут быть выражены через компоненты факторизации. А. А. Боровковым в [2] развит аналитический метод, который исчерпывающим образом решает проблему полных асимптотических разложений в однограничной задаче. Этот метод включает в себя несколько этапов. На первом из них строятся разного сорта факторизационные тождества для преобразований (двойных и даже тройных) Фурье — Стильтеса искомым распределений. Последующий анализ полученных выражений требует детального изучения аналитической структуры компонент факторизации — их нулей, особенностей, возможностей аналитического продолжения и т. д. Весьма полное исследование этих вопросов в условиях крамеровского типа также проведено в [2], что позволило затем асимптотически обратить полученные тождества по одной из переменных (слово «асимптотически» означает, что обращение произведено не в точном виде, а с точностью до пренебрежимо малого остатка). Итогом являются так называемые асимптотические представления производящих функций по переменной, связанной со «временем». Дальнейший асимптотический анализ главных частей этих представлений осуществляется с помощью модификаций метода перевала, также разработанных А. А. Боровковым, и позволяет получить полные асимптотические разложения искомым распределений в широком спектре уклонов.

Эта схема исследований была впоследствии перенесена на аналогичные задачи с одной границей для случайных процессов с независимыми приращениями и непрерывным временем [3] и для полумарковских процессов (1) [4]. По этой же схеме построена настоящая работа.

Интерес к случайным блужданиям типа (1) объясняется, с одной стороны, их приложениями, например, к задачам последовательного анализа в статистике, к задачам теории массового обслуживания и другим, с другой — они могут рассматриваться как естественное обобщение классической схемы случайного блуждания, допуская специфическую зависимость скачков, но в то же время позволяя получить аналогии многих результатов в граничных задачах, установленных ранее при  $m = 1$ .

Изучение распределений, связанных с выходом случайного блуждания (1) из интервала, может быть сведено к системам интегральных уравнений на конечном (возможно, растущем) интервале с ядрами, зависящими от разности аргументов. Этим уравнениям удовлетворяют в разных задачах либо сами искомые вероятности, либо их преобразования Фурье — Стильтеса. Таким образом, полученные результаты одновременно дают асимптотические представления решений соответствующих систем интегральных уравнений.

Процессы типа (1) рассматривались в работах многих авторов, причем большая часть их посвящена однограничным задачам и связанным с ними изучением свойств факторизации (см., например, [4—8] и литературу там). Настоящая работа обобщает результаты автора [9, 10], которые были получены в двуграничных задачах для классической схемы блуждания  $m = 1$ . В своих общих чертах метод остался тем же, хотя при этом появились новые трудности и усложнилась техника. § 2 содержит предварительные сведения, необходимые для понимания дальнейшего. Основным является § 3, где найдены асимптотические представления производящих функций распределений (3). Выяснилось, что их природа та же, что и в случае  $m = 1$ , поэтому дальнейший асимптотический анализ проводится в § 4 по известной из [9] схеме с некоторыми изменениями и дополнениями. Излагаемый метод позволяет получать полные асимптотические разложения распределений (3) при любых ограничениях на  $a$  и  $b$ , совместимых с требованиями  $a = a(n) \rightarrow \infty$ ,  $b = b(n) \rightarrow \infty$ ,  $a = o(n)$ ,  $b = o(n)$ ,  $a + b \geq C\sqrt{n}$ , а также при произвольных  $A \subset (-\infty, -a] \cup [b, \infty)$  и  $B \subset (-a, b)$  таких, что  $b - \sup_{x \in B} x \rightarrow \infty$ ,  $a + \inf_{x \in B} x \rightarrow \infty$ . Основные результаты приведены в теоремах 3—5, другие разложения из указанного диапазона уклонений читатель может выписать по известному алгоритму.

## § 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь будут изложены необходимые в дальнейшем сведения из [4] о факторизации матричной функции  $E - zF(\mu)$  ( $E$  — единичная матрица размерности  $m$ ) и об аналитических свойствах компонент факторизации. Для обычных случайных блужданий ( $m = 1$ ) аналитическая структура компонент факторизации впервые подробно исследована в [2]. Кроме того, здесь будут введены и изучены функции, в терминах которых в § 3 формулируются основные результаты об асимптотических представлениях производящих функций.

Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными условие Крамера ( $K$ ):  $v_-^* - v_+^* > 0$ , где  $v_+^*$  (соответственно  $v_-^*$ ) — точная нижняя (верхняя) грань тех  $v$ , при которых все интегралы в (2) абсолютно сходятся при  $\mu = iv$ , и условие ( $C$ ): найдется элемент матрицы  $F(\mu)$  такой, что прообраз Фурье  $n$ -й степени этого элемента при некотором целом  $n \geq 1$  содержит абсолютно непрерывную компоненту.

Если все интегралы в (2) конечны при  $\mu = iv_-^*$ , то положим  $v_- = v_-^*$ , в противном случае  $v_-^* > 0$  и под  $v_-$  будем понимать произвольное действительное число такое, что  $0 < v_- < v_-^*$ . Аналогично  $v_+ = v_+^*$ , если все интегралы в (2) сходятся при  $\mu = iv_+^*$ , в противном случае  $v_+^* < v_+ < 0$ . Точки  $v_{\pm}$  могут выбираться как угодно близкими к  $v_{\pm}^*$  в случае несовпадения.

Пусть  $\lambda(\mu)$  — максимальное по модулю собственное значение матрицы  $F(\mu)$ , а  $I(\mu)$  и  $l(\mu)$  — соответствующие ему вектор-столбец и вектор-строка такие, что  $l(\mu)I(\mu) = 1$ . Обозначим  $z_0 = 1 \Big| \inf_{v_+^* < v < v_-^*} \lambda(iv)$ . В широких предположениях (например, при  $v_-^* < \infty$ ,  $v_+^* > -\infty$ ) существует един-

ственная точка  $v_0 \in (v_+, v_-)$ , в которой  $\lambda(iv_0) = z_0^{-1}$ . Другие случаи здесь не рассматриваются (см. по поводу них замечание в [4]). При  $0 < z < z_0$  уравнение  $1 - z\lambda(iv) = 0$  имеет не более двух вещественных решений  $v = \mu_{\pm}(z)$ ,  $\mu_+(z) < v_0 < \mu_-(z)$ . Обозначим  $z_{\pm} = 1 / \lim_{v \rightarrow v_{\pm}^*} \lambda(iv)$ .

Функция  $\mu_+(z)$  ( $\mu_-(z)$ ) является аналитической в окрестности интервала  $(z_+, z_0)$  ( $(z_-, z_0)$ ), разрезанной по лучу  $\text{Re } z \geq z_0$ , причем в окрестности точки  $z_0$  справедливы разложения

$$\mu_{\pm}(z) = v_0 \pm i\psi_1 \sqrt{z - z_0} - \psi_2(z - z_0) \pm \dots \quad (4)$$

Здесь корень квадратный понимается в смысле главного значения,  $\psi_1 > 0$ .

Обозначим через  $V(\alpha, \beta)$  банахову алгебру матриц порядка  $m$ , элементы которых являются преобразованиями Фурье — Стильтеса непрерывных слева функций  $\varphi(x)$ , имеющих на любом конечном отрезке ограни

ченную вариацию и таких, что  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} |d\varphi(x)|$  абсолютно сходится при  $\alpha \leq \text{Im } \mu \leq \beta$ . Пусть  $V_+(\alpha)$  — подмножество  $V(\alpha, \beta)$ , образованное

матрицами вида  $\left\| \int_0^{\infty} e^{i\mu y} d\varphi_{jh}(y) \right\|$ ,  $V_-(\beta)$  — подмножество  $V(\alpha, \beta)$ , обра

зованное матрицами вида  $\left\| \int_{-\infty}^{+0} e^{i\mu y} d\varphi_{jh}(y) \right\|$ .

При  $|z| \leq z_0$ ,  $v_+ \leq \text{Im } \mu \leq v_-$  матричная функция  $E - zF(\mu)$  допускает факторизацию двух типов:

$$E - zF(\mu) = R_{z-}(\mu)R_{z+}(\mu) = L_{z+}(\mu)L_{z-}(\mu),$$

соответственно называемую правой и левой факторизацией. Ее компоненты обладают следующими свойствами. Положительные компоненты  $L_{z+}(\mu)$ ,  $R_{z+}(\mu)$  как функции переменной  $\mu$  принадлежат  $V_+(v_+)$ , отрицательные компоненты  $L_{z-}(\mu)$ ,  $R_{z-}(\mu)$  принадлежат  $V_-(v_-)$ . Как функции переменной  $z$ , принимающие значения в нормированных кольцах  $V_{\pm}(x_{\pm})$ , компоненты факторизации аналитичны в круге  $|z| < z_0$  и, более того, аналитически продолжаются в окрестность любой точки на границе этого круга, кроме точки  $z = z_0$ . В окрестности точки  $z = z_0$  компоненты факторизации являются аналитическими функциями переменной  $t = iVz - z_0$ . Пусть, далее,  $|z - z_0| \geq \delta > 0$ ,  $|z| = z_0$ . Тогда при некотором  $\gamma > 0$

$$(E - zF(\mu))^{-1} \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma),$$

$$R_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_{\pm}(v_0 \mp \gamma), \quad L_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_{\pm}(v_0 \mp \gamma).$$

Здесь и далее  $\delta, \delta_1, \gamma$  — достаточно малые (д. м.) положительные числа. Указанные свойства, однако, перестают быть верными в окрестности точки  $z_0$ . Обозначим  $a_{\pm} = v_{\pm} \mp 1$ ,  $A_{z\pm} = I(i\mu_{\pm}(z))l(i\mu_{\pm}(z))$ ,  $F_{z\pm}(\mu) = E - (\mu_{\pm}(z) - a_{\pm})(i\mu + \mu_{\pm}(z))^{-1}A_{z\pm}$ , тогда

$$F_{z\pm}^{-1}(\mu) = E + (\mu_{\pm}(z) - a_{\pm})(i\mu + a_{\pm})^{-1}A_{z\pm}$$

и при д. м.  $\delta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $|z - z_0| < \delta$

$$\mathcal{R}_z(\mu) \equiv F_{z-}(\mu)(E - zF(\mu))F_{z+}(\mu) \in V(v_+, v_-),$$

$$\mathcal{L}_z(\mu) \equiv F_{z+}(\mu)(E - zF(\mu))F_{z-}(\mu) \in V(v_+, v_-),$$

$$\mathcal{R}_z^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma), \quad \mathcal{L}_z^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma),$$

$$\mathcal{R}_{z+}(\mu) \equiv R_{z+}(\mu)F_{z+}(\mu) \in V_+(v_+),$$

$$\mathcal{L}_{z+}(\mu) \equiv F_{z+}(\mu)L_{z+}(\mu) \in V_+(v_+),$$

$$\mathcal{R}_{z-}(\mu) \equiv F_{z-}(\mu)R_{z-}(\mu) \in V_-(v_-),$$

$$\mathcal{L}_{z-}(\mu) \equiv L_{z-}(\mu)F_{z-}(\mu) \in V_-(v_-),$$

$$\mathcal{R}_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_{\pm}(v_0 \mp \gamma), \quad \mathcal{L}_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_{\pm}(v_0 \mp \gamma).$$

Более подробная информация о свойствах компонент факторизации содержится в [4—8].

Пусть  $z \in \mathcal{D}_\delta = \{z: |z| < z_0, |z - z_0| < \delta\}$ . Обозначим

$$\mathcal{V}(z, \mu) = -(\mu + \mu_+(z))^{-1} (\mu_+(z) - a_+) A_{z+} \mathcal{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) R_{z+}(\mu)$$

и покажем, что  $\mathcal{V}(z, \mu) \in V_+(v_+)$ . Действительно, матрица

$$(\mu_+(z) - a_+) A_{z+} \mathcal{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) R_{z+}(\mu) \quad (5)$$

равна нулевой при  $\mu = i\mu_+(z)$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно представить  $R_{z+}(\mu)$  в виде

$$R_{z+}(\mu) = \mathcal{R}_{z+}(\mu) (E + (\mu_+(z) - a_+) (i\mu + a_+)^{-1} A_{z+}),$$

подставить это выражение в (5) и положить  $\mu = i\mu_+(z)$ . Тогда в силу утверждения 5.2 работы [4] заключаем, что  $\mathcal{V}(z, \mu) \in V_+(v_+)$ . Более того, справедливо представление вида

$$\mathcal{V}(z, \mu) = \left\| \int_0^\infty e^{i\mu y} v_{jk}(z, y) dy \right\|, \quad \int_0^\infty e^{-v_+ y} |v_{jk}(z, y)| dy < \infty.$$

Аналогично введем матричную функцию

$$\mathcal{U}(z, \mu) = -(\mu + \mu_-(z))^{-1} (\mu_-(z) - a_-) A_z \mathcal{L}_z^{-1}(i\mu_-(z)) L_z(\mu),$$

для которой также справедливо представление

$$\mathcal{U}(z, \mu) = \left\| \int_{-\infty}^0 e^{i\mu y} u_{jk}(z, y) dy \right\|, \quad \int_{-\infty}^0 e^{-v_- y} |u_{jk}(z, y)| dy < \infty.$$

Положим  $H_1(z) = \mathcal{U}(z, i\mu_+(z))$ ,  $H_2(z) = \mathcal{V}(z, i\mu_-(z))$ ,  $H(z) = H_2(z)H_1(z)$ ,  $\hat{H}(z) = H_1(z)H_2(z)$ .

**Лемма 1.** При  $z \in \mathcal{D}_\delta$

$$H_1(z)I(i\mu_+(z)) = h_1(z)I(i\mu_-(z)),$$

$$H_2(z)I(i\mu_-(z)) = h_2(z)I(i\mu_+(z)),$$

где  $h_1(z)$ ,  $h_2(z)$  — аналитические функции переменной  $i\sqrt{z - z_0}$ ,  $h_1(z_0) = h_2(z_0) = 1$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\nu(z) = \mu_+(z) - \mu_-(z)$  и для краткости будем на время опускать аргумент  $z$ . Имеем

$$\begin{aligned} H_1 I(i\mu_+) &= I(i\mu_-) (\mu_- - a_-) \nu^{-1} l(i\mu_-) \mathcal{L}^{-1}(i\mu_-) \mathcal{L}_-(i\mu_+) \times \\ &\quad \times [E - (\mu_- - a_-)(\mu_+ - a_-)^{-1} A_-] I(i\mu_+) = \\ &= I(i\mu_-) (\mu_- - a_-) \nu^{-1} l(i\mu_-) \mathcal{L}^{-1}(i\mu_-) [\mathcal{L}_-(i\mu_-) - i\nu \mathcal{L}'_+(i\mu_-) + \dots] \cdot \\ &\quad \cdot [E - (\mu_- - a_-)(\mu_+ - a_-)^{-1} I(i\mu_-) l(i\mu_-)] \cdot [I(i\mu_-) + i\nu I'(i\mu_-) + \dots] = \\ &= I(i\mu_-) (\mu_- - a_-) \nu^{-1} l(i\mu_-) [E + O(\nu)] \{I(i\mu_-) \nu (\mu_+ - a_-)^{-1} + \\ &\quad + i\nu [I'(i\mu_-) - (\mu_- - a_-)(\mu_+ - a_-)^{-1} A_- I'(i\mu_-)] + O(\nu^2)\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее символы  $O(\nu)$ ,  $O(\nu^2)$  и т. д. по отношению к матрице употребляются в том случае, когда подобный вид имеет каждый элемент матрицы. Замечая, наконец, что

$$l(i\mu_-) \left[ I'(i\mu_-) - \frac{\mu_- - a_-}{\mu_+ - a_-} A_- I'(i\mu_-) \right] = \frac{\nu}{\mu_+ - a_-} l(i\mu_-) I'(i\mu_-),$$

получим требуемый результат. Второе соотношение доказывается аналогично. Лемма доказана.

**Следствие 1.** Вектор  $I(i\mu_+(z))$  является собственным вектором матрицы  $H(z)$ , соответствующим собственному значению  $h(z) = h_1(z)h_2(z)$ ;  $I(i\mu_-(z))$  является собственным вектором для  $\hat{H}(z)$ , соответствующим

тому же собственному значению  $h(z)$ . Функция  $h(z)$  является аналитической в окрестности нуля функцией переменной  $t = i\sqrt{z - z_0}$ ,  $h(z_0) = 1$ .

Обозначим также

$$K(z) = -(\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_-) A_{z_+} \mathcal{P}_{z_+}^{-1}(i\mu_+(z)) \mathcal{P}_{z_-}^{-1}(i\mu_-(z)) A_{z_-},$$

$$\tilde{K}(z) = -(\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_-) A_{z_-} \mathcal{L}_{z_-}^{-1}(i\mu_-(z)) \cdot \mathcal{L}_{z_+}^{-1}(i\mu_+(z)) A_{z_+},$$

и пусть  $K(z) = \|K_{jk}(z)\|$ ,  $\tilde{K}(z) = \|\tilde{K}_{jk}(z)\|$ ,  $j, k = 1, \dots, m$ .

### § 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Положим

$$S_{jk}(z, A) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in A, N > n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j), \quad A \subset (-a, b),$$

$$T_{jk}(z, A) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_N \in A, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j), \quad A \subset (-\infty, -a] \cup [b, \infty).$$

Здесь  $A$  обозначает всюду борелевские множества,  $|z| < 1$ .

Вопрос о нахождении матричных функций  $S = \|S_{jk}\|$  в  $T = \|T_{jk}\|$  в точном виде тесно связан с получением и использованием явных выражений для компонент факторизации, что удается сделать лишь при дополнительных ограничениях на исходный процесс (см. [8]). В то же время для целей асимптотического анализа распределений достаточно ограничиться нахождением асимптотических представлений функций  $S$  и  $T$  в окрестности точки  $z_0$  (ниже будет установлена возможность аналитического продолжения этих функций в круг  $|z| < z_0$ ) и оценкой их на множестве  $|z| = z_0$ ,  $|z - z_0| > \delta$ . Обозначим  $\mu(z) = \exp\{\mu_+(z) - \mu_-(z)\}$ .

**Теорема 1.** *Существуют числа  $\delta > 0$ ,  $\gamma > 0$  такие, что при  $z \in \mathcal{D}_\delta$  и достаточно больших (д.б.)  $a + b$*

$$T_{jk}(z, [x, \infty)) = \frac{\exp\{\mu_+(z)b\}(1 - \mu^a(z)h_1(z))}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \int_{x-b}^{\infty} v_{jk}(z, y) dy +$$

$$+ e^{\nu_0 x} [O(e^{-\gamma x}) + O(e^{-\gamma(x-b+a)})], \quad x \geq b, \quad (6)$$

$$T_{jk}(z, (-\infty, x]) = \frac{\exp\{-\mu_-(z)a\}(1 - \mu^b(z)h_2(z))}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \int_{-\infty}^{x+a} u_{jk}(z, y) dy +$$

$$+ e^{\nu_0 x} [O(e^{\gamma x}) + O(e^{\gamma(x+a-b)})], \quad x \leq -a, \quad (7)$$

равномерно по  $z$ .

**Теорема 2.** *Пусть  $-a < x_1 < 0 < x_2 < b$ ,  $x_1 + a \rightarrow \infty$ ,  $b - x_2 \rightarrow \infty$ . Тогда найдутся числа  $\delta > 0$ ,  $\gamma > 0$  такие, что при  $z \in \mathcal{D}_\delta$  и д.б.  $a + b$*

$$S_{jk}(z, [x_1, x_2]) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], \kappa_n = k/\kappa_0 = j) -$$

$$- \frac{\mu^a(z)(1 - \mu^b(z)h_2(z))}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \cdot \frac{\exp\{\mu_+(z)x_2\} - \exp\{\mu_+(z)x_1\}}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} \tilde{K}_{jk}(z) -$$

$$- \frac{\mu^b(z)(1 - \mu^a(z)h_1(z))}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \cdot \frac{\exp\{\mu_-(z)x_2\} - \exp\{\mu_-(z)x_1\}}{\mu_-(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} K_{jk}(z) +$$

$$+ (z - z_0)^{-1/2} [O(e^{\nu_0 x_2 - \gamma \min(a, b - x_2)}) + O(e^{\nu_0 x_1 - \gamma \min(b, a + x_1)})] \quad (8)$$

равномерно по  $z$ .

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$Q_0(z, \mu) = \left\| \int_{-a+0}^b e^{i\mu y} S_{jk}(z, dy) \right\|,$$

$$Q_1(z, \mu) = \left\| \int_{-\infty}^{-a+0} e^{i\mu y} T_{jk}(z, dy) \right\|,$$

$$Q_2(z, \mu) = \left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} T_{jk}(z, dy) \right\|.$$

Эти функции определены во всяком случае при  $\text{Im } \mu = 0$ ,  $|z| < 1$ . Они связаны соотношением

$$Q_0(z, \mu) (E - zF(\mu)) = E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu), \quad (9)$$

которое следует из формулы полной вероятности. При  $m = 1$  оно установлено Кемперманом [11], в нашем случае это соотношение получено в [12]. Там же установлено, что (9) выполняется при всех  $z$  и  $\mu$  таких, что  $|z| < 1/\lambda$  ( $i \text{Im } \mu$ ).

Пусть  $z$  и  $\mu$  таковы, что существуют  $R_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_{\pm}(\text{Im } \mu)$ ,  $L_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_{\pm}(\text{Im } \mu)$  и имеет место (9). Тогда

$$Q_0(z, \mu) R_{z-}(\mu) = (E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu).$$

Будем обозначать далее

$$\left\| \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\varphi_{jk}(y) \right]^A \right\| = \left\| \int_A e^{i\mu y} d\varphi_{jk}(y) \right\|$$

для всякого измеримого множества  $A \subset R$ . Так как

$$[Q_0(z, \mu) R_{z-}(\mu)]^{(-\infty, b)} = Q_0(z, \mu) R_{z-}(\mu),$$

то

$$Q_0(z, \mu) R_{z-}(\mu) = [(E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, b)},$$

и одновременно

$$[(E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{(b, \infty)} \equiv 0.$$

Замечая, что  $Q_2(z, \mu) R_{z+}^{-1}(\mu) = [Q_2(z, \mu) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{(b, \infty)}$ , получим

$$Q_0(z, \mu) = [(E - Q_1(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, b)} R_{z-}^{-1}(\mu),$$

$$Q_2(z, \mu) = [(E - Q_1(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{(b, \infty)} R_{z+}(\mu). \quad (10)$$

Эти соотношения впервые получены в [11] для случая  $m = 1$ . Используя левую факторизацию, аналогичным путем находим

$$Q_0(z, \mu) = [(E - Q_2(z, \mu)) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-a, \infty)} L_{z+}^{-1}(\mu),$$

$$Q_1(z, \mu) = [(E - Q_2(z, \mu)) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, -a)} L_{z-}(\mu). \quad (11)$$

Для произвольной матричной функции  $f(\mu) \in V(v_0)$  положим

$$(Af)(z, \mu) = [f(\mu) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, -a)} L_{z-}(\mu),$$

$$(Bf)(z, \mu) = [f(\mu) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{(b, \infty)} R_{z+}(\mu),$$

тогда подстановка (11) в (10) приводит к тождеству

$$Q_2(z, \mu) = (BE)(z, \mu) - (BAE)(z, \mu) + (BAQ_2)(z, \mu), \quad (12)$$

и точно так же подстановка (10) в (11) влечет

$$Q_1(z, \mu) = (AE)(z, \mu) - (ABE)(z, \mu) + (ABQ_1)(z, \mu). \quad (13)$$

Исследуем далее аналитические свойства операторов  $A$  и  $B$ . Пусть  $z \in \mathcal{D}_\delta$  при некотором  $\delta > 0$ ,  $\mu_+(|z|) < \text{Im } \mu < \mu_- (|z|)$ . Тогда, очевидно,  $|\lambda(\mu)| < \lambda(i \text{Im } \mu) < |z|^{-1}$  (см. [4, утв. 4.1]) и соотношение (9) имеет место. Более того, при таких  $z$  и  $\mu$  существуют матрицы  $R_{z\pm}^{-1}(\mu)$  и  $L_{z\pm}^{-1}(\mu)$ . Например, для  $R_{z+}^{-1}(\mu)$  это вытекает из соотношения  $\mathcal{R}_{z+}(\mu) = R_{z+}(\mu)F_{z+}(\mu)$  и существования  $\mathcal{R}_{z+}^{-1}(\mu)$ , в остальных случаях — аналогично. Поэтому для всякой функции  $f \in V(v_0 - \gamma, v_0)$  имеем

$$[f(\mu) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b, \infty)} = [f(\mu) F_{z+}(\mu) \mathcal{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b, \infty)} = [f(\mu) \mathcal{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b, \infty)} - (\mu_+(z) - a_+) [f(\mu) A_{z+} \mathcal{R}_{z+}^{-1}(\mu) (i\mu + \mu_+(z))^{-1}]^{[b, \infty)}.$$

Матрица  $\mathcal{R}_{z+}^{-1}(\mu)$  принадлежит  $V_+(v_0 - \gamma)$  при некотором  $\gamma > 0$ , поэтому

$$f(\mu) \mathcal{R}_{z+}^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0), \\ [f(\mu) \mathcal{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b, \infty)} \in V_+(v_0 - \gamma) \quad \text{при } b \geq 0.$$

Пусть

$$f(\mu) A_{z+} \mathcal{R}_{z+}^{-1}(\mu) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right\|.$$

Для  $\mu$  таких, что  $\text{Im } \mu > \mu_+(|z|)$  в силу соотношения

$$\lambda(i \text{Re } \mu_+(z)) \geq |\lambda(i\mu_+(z))| = |z|^{-1} = \lambda(i\mu_+(|z|))$$

имеем  $\text{Re } \mu_+(z) \leq \mu_+(|z|)$ , т. е.  $\text{Im } \mu > \text{Re } \mu_+(z)$  и, следовательно, справедливо

$$\begin{aligned} & \left[ (i\mu + \mu_+(z))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right]^{[b, \infty)} = \\ & = - \left[ \int_0^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right]^{[b, \infty)} = \\ & = - \int_b^{\infty} e^{i\mu y} \int_{-\infty}^y e^{\mu_+(z)(y-t)} d_t W_{jk}(z, t) dy = \\ & = - \int_b^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} \left[ (f(i\mu_+(z)) A_{z+} \mathcal{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)))_{jk} - \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z, t) \right] dy = \\ & = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} (i\mu + \mu_+(z))^{-1} (f(i\mu_+(z)) A_{z+} \mathcal{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)))_{jk} + \\ & \quad + \int_b^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z, t) dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и далее  $G_{jk}$  означает элемент матрицы  $G$  с номером  $(j, k)$ . Последнее слагаемое в (14) также принадлежит  $V_+(v_0 - \gamma)$ , если  $z \in \mathcal{D}_\delta$  и  $\delta$  достаточно мало. Действительно, в силу (4) при малых  $\delta$   $|\text{Re } \mu_\pm(z) - v_0| \leq \gamma/2$  и потому

$$\begin{aligned} & \int_b^{\infty} \left| e^{-(v_0 - \gamma)y + \mu_+(z)y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z, t) \right| dy = \\ & = \int_b^{\infty} \left| e^{(v_0 - \gamma - \mu_+(z))y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t + (v_0 - \gamma)t} d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t) \right| dy \leq \\ & \leq \int_b^{\infty} \int_y^{\infty} |e^{(v_0 - \gamma - \mu_+(z))(t-y)}| |d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t)| dy \leq \\ & \leq \int_b^{\infty} \int_y^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-y)} |d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t)| dy < \infty. \end{aligned}$$

Здесь  $W_{jk}(z, t)$  — функция ограниченной вариации по  $t$ . Таким образом, при  $z \in \mathcal{D}_\delta$

$$(Bf)(z, \mu) = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} f(i\mu_+(z)) \mathcal{Y}(z, \mu) + \Delta(z, \mu) R_{z+}(\mu), \quad (15)$$

где

$$\Delta(z, \mu) = [\Delta(z, \mu)]^{b, \infty} \in V_+(v_0 - \gamma)$$

при некотором  $\gamma > 0$ . Аналогичным путем устанавливается, что если  $f_1 \in V(v_0, v_0 + \gamma)$ , то при  $z \in \mathcal{D}_\delta$

$$(Af_1)(z, \mu) = e^{-(i\mu + \mu_-(z))a} f_1(i\mu_-(z)) \mathcal{U}(z, \mu) + \Delta_1(z, \mu) L_{z-}(\mu), \quad (16)$$

$$\Delta_1(z, \mu) = [\Delta_1(z, \mu)]^{(-\infty, -a)} \in V_-(v_0 + \gamma)$$

при некотором  $\gamma > 0$ .

Будем использовать представления (15), (16) в (12), беря в качестве  $f$  матрицы  $E$ ,  $(AE)(z, \mu)$ ,  $(AQ_2)(z, \mu)$ , а в качестве  $f_1$  матрицы  $E$  и  $Q_2(z, \mu)$ . При  $z \in \mathcal{D}_\delta$   $Q_2(z, \mu) \in V_+(v_0)$ ,  $(AE)(z, \mu) \in V_-(v_0)$ ,  $(AQ_2)(z, \mu) \in V_-(v_0)$ . Имеем таким образом

$$(BE)(z, \mu) = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \mathcal{Y}(z, \mu) + \Delta^{(1)}(z, \mu) R_{z+}(\mu), \quad (17)$$

$$(AE)(z, \mu) = e^{-(i\mu + \mu_-(z))a} \mathcal{U}(z, \mu) + \Delta_1^{(1)}(z, \mu) L_{z-}(\mu), \quad (18)$$

$$(AQ_2)(z, \mu) = e^{-(i\mu + \mu_-(z))a} Q_2(z, i\mu_-(z)) \mathcal{U}(z, \mu) + \Delta_1^{(2)}(z, \mu) L_{z-}(\mu), \quad (19)$$

$$(BAE)(z, \mu) = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \mu^a(z) H_1(z) \mathcal{Y}(z, \mu) + \Delta^{(2)}(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \Delta_1^{(1)}(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathcal{Y}(z, \mu), \quad (20)$$

$$(BAQ_2)(z, \mu) = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \mu^a(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z) \mathcal{Y}(z, \mu) + \Delta^{(3)}(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \Delta_1^{(2)}(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathcal{Y}(z, \mu), \quad (21)$$

и после подстановки в (12) получаем

$$Q_2(z, \mu) = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} [E - \mu^a(z) H_1(z) + \mu^a(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z)] \mathcal{Y}(z, \mu) + D(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu + \mu_+(z))b} D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathcal{Y}(z, \mu). \quad (22)$$

Здесь  $D(z, \mu) = \Delta^{(1)}(z, \mu) - \Delta^{(2)}(z, \mu) + \Delta^{(3)}(z, \mu) \in V_+(v_0 - \gamma)$ ,  $D_1(z, \mu) = \Delta_1^{(2)}(z, \mu) - \Delta_1^{(1)}(z, \mu) \in V_-(v_0 + \gamma)$ ,  $\gamma > 0$ . Полагая в (22)  $\mu = i\mu_-(z)$ , получим тождество

$$Q_2(z, i\mu_-(z)) = \mu^b(z) [E - \mu^a(z) (H_1(z) - Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z))] H_2(z) + D(z, i\mu_-(z)) R_{z+}(i\mu_-(z)) + \mu^b(z) D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) H_2(z). \quad (23)$$

Это выражение для  $Q_2(z, i\mu_-(z))$  подставляем в правую часть (22), в получившееся выражение опять подставляем (23) и т. д. В результате  $s$ -кратного применения этой процедуры получим ( $s \geq 1$ )

$$Q_2(z, \mu) = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \left[ (E - \mu^a(z) H_1(z)) \sum_{j=0}^s \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) + \mu^{a+s(a+b)}(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z) H^s(z) \right] \mathcal{Y}(z, \mu) + D(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \left[ D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \sum_{j=0}^s \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) + \mu^a(z) D(z, i\mu_-(z)) R_{z+}(i\mu_-(z)) H_1(z) \sum_{j=0}^{s-1} \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) \right] \mathcal{Y}(z, \mu). \quad (24)$$

Далее воспользуемся следствием 1, в силу которого  $H^j(z) \mathcal{Y}(z, \mu) = h^j(z) \mathcal{Y}(z, \mu)$  (см. определение функции  $\mathcal{Y}(z, \mu)$ ),  $H_1(z) \mathcal{Y}(z, \mu) =$

$= h_1(z) \mathcal{Y}^s(z, \mu)$ . Поэтому (24) переписывается так:

$$Q_2(z, \mu) = e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \left[ (1 - \mu^a(z) h_1(z)) \sum_{j=0}^s \mu^{(a+b)j}(z) h^j(z) \right] \mathcal{Y}^s(z, \mu) + \\ + \mu^{a+s(a+b)}(z) h_1(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) \mathcal{Y}^s(z, \mu) + D(z, \mu) R_{z_+}(\mu) + \\ + e^{(i\mu + \mu_+(z))b} \left[ D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z_-}(i\mu_+(z)) \sum_{j=0}^s \mu^{(a+b)j}(z) h^j(z) + \right. \\ \left. + \mu^a(z) D(z, i\mu_-(z)) R_{z_+}(i\mu_-(z)) h_1(z) \sum_{j=0}^{s-1} \mu^{(a+b)j}(z) h^j(z) \right] \mathcal{Y}^s(z, \mu). \quad (25)$$

Покажем, что элементы матрицы  $Q_2(z, i\mu_-(z))$  ограничены в  $\mathcal{D}_\delta$  равномерно по  $a$  и  $b$ . Из неравенства  $\lambda(i \operatorname{Re} \mu_-(z)) \geq |\lambda(i\mu_-(z))| = |z^{-1}| = = \lambda(i\mu_-(|z|))$  вытекает  $\operatorname{Re} \mu_-(z) \geq \mu_-(|z|)$ , стало быть,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(z)y} \mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) \right| \leq \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(|z|)y} \mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j),$$

т. е. поэлементно  $|Q_2(z, i\mu_-(z))| \leq Q_2(|z|, i\mu_-(|z|))$ . Пусть  $\tilde{Q}_2(z, \mu)$  совпадает с функцией  $Q_2(z, \mu)$ , вычисленной при  $a = \infty$ . Очевидно,  $Q_2(|z|, i\mu_-(|z|)) \leq \tilde{Q}_2(|z|, i\mu_-(|z|))$  (все матричные неравенства понимаются поэлементно). Но  $\tilde{Q}_2(z, \mu) = (BE)(z, \mu)$  и в силу асимптотического представления (17) при  $z \in \mathcal{D}_\delta$

$$\tilde{Q}_2(|z|, i\mu_-(|z|)) \leq C e^{(\mu_+(|z|) - \mu_-(|z|))b} \leq C_1.$$

Здесь и далее  $C, C_1$  — матрицы с постоянными положительными элементами.

При д. б.  $a + b$  и  $z \in \mathcal{D}_\delta$  имеет место  $|\mu^{a+b}(z) h(z)| < 1$ , поэтому слагаемое  $\mu^{a+s(a+b)}(z) h_1(z) h^s(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) \mathcal{Y}^s(z, \mu)$  в (25) стремится к нулевой матрице при всех  $z \in \mathcal{D}_\delta$  и  $s \rightarrow \infty$ , кроме того сходится ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} \mu^{(a+b)j}(z) h^j(z) = (1 - \mu^{a+b}(z) h(z))^{-1}$ .

**Лемма 2.**

$$L_{z_-}(i\mu_+(z)) I(i\mu_+(z)) = (\mu_-(z) - \mu_+(z)) C_1(z) I(i\mu_+(z)), \\ R_{z_+}(i\mu_-(z)) I(i\mu_+(z)) = (\mu_-(z) - \mu_+(z)) C_2(z) I(i\mu_+(z)),$$

где  $C_1(z), C_2(z)$  — матрицы с ограниченными в  $\mathcal{D}_\delta$  элементами.

**Доказательство.**

$$L_{z_-}(i\mu_+(z)) I(i\mu_+(z)) = \mathcal{L}_{z_-}(i\mu_+(z)) \cdot \\ \cdot [E - (\mu_-(z) - a_-)(\mu_+(z) - a_-)^{-1} A_{z_-}] I(i\mu_+(z)) = \\ = \mathcal{L}_{z_-}(i\mu_+(z)) \{E - (\mu_-(z) - a_-)(\mu_+(z) - a_-)^{-1} [A_{z_+} + \\ + i(\mu_-(z) - \mu_+(z))(Il)'(i\mu_+(z)) + \dots]\} I(i\mu_+(z)) = \\ = \mathcal{L}_{z_-}(i\mu_+(z)) [(\mu_+(z) - \mu_-(z))(\mu_+(z) - a_-)^{-1} I(i\mu_+(z)) + \\ + i(\mu_-(z) - \mu_+(z))(Il)'(i\mu_+(z)) I(i\mu_+(z)) + \dots] = \\ = (\mu_-(z) - \mu_+(z)) C_1(z) I(i\mu_+(z)); \\ R_{z_+}(i\mu_-(z)) I(i\mu_+(z)) = \mathcal{R}_{z_+}(i\mu_-(z)) [E - \\ - (\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_+)^{-1} A_{z_+}] I(i\mu_+(z)) = \\ = \mathcal{R}_{z_+}(i\mu_-(z)) (\mu_-(z) - \mu_+(z)) (\mu_-(z) - a_+)^{-1} I(i\mu_+(z)),$$

что и требовалось доказать.

**Лемма 3.** При д. б.  $a + b$  функция

$$\Psi(z, s, a + b) \equiv (\mu_-(z) - \mu_+(z)) \sum_{j=0}^s \mu^{(a+b)j}(z) h^j(z)$$

ограничена в  $\mathcal{D}_\delta$  равномерно по  $s \geq 1$  и  $a + b$ .

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для целых  $a$  и  $b$ .

$$|\Psi(z, s, a + b)| \leq c \frac{|1 - \mu(z)|}{|1 - \mu^{a+b}(z) h(z)|} \leq c |1 - \mu(z)| \times \\ \times \left[ (1 - |\mu(z)|) \left( 1 + |\mu(z)| + \dots + |\mu(z)|^{\alpha+b-1} + |\mu(z)|^{\alpha+b} \frac{1 - |h(z)|}{1 - |\mu(z)|} \right) \right]^{-1}.$$

При  $z \in \mathcal{D}_\delta$  отношение  $\frac{|1 - \mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$  ограничено, а выражение

$$1 + |\mu(z)| + \dots + |\mu(z)|^{\alpha+b-1} + |\mu(z)|^{\alpha+b} \frac{1 - |h(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

больше единицы при  $z = z_0$  и д. б.  $a + b$ . В силу непрерывности это верно при  $z \in \mathcal{D}_\delta$  при некотором  $\delta = \delta(a + b)$ , к тому же как функция  $a + b$  эта величина не убывает. Лемма доказана.

Точно так же можно установить равномерную по  $a$  и  $b$  ограниченность в  $\mathcal{D}_\delta$  функций

$$\frac{1 - \mu^a(z) h_1(z)}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)}, \quad \frac{1 - \mu^b(z) h_2(z)}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)}.$$

Устремляя в (25)  $s \rightarrow \infty$ , получим теперь

$$Q_s(z, \mu) = \frac{e^{(i\mu + \mu_+(z))b} (1 - \mu^a(z) h_1(z))}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} \mathcal{Y}^o(z, \mu) + D(z, \mu) R_{z_+}(\mu) + \\ + e^{(i\mu + \mu_+(z))b} [D_1(z, i\mu_+(z)) C_3(z) + D(z, i\mu_-(z)) C_4(z)] \mathcal{Y}^o(z, \mu),$$

где  $C_3(z)$ ,  $C_4(z)$  — матрицы с ограниченными равномерно по  $a$ ,  $b$  и  $z \in \mathcal{D}_\delta$  элементами.

Далее, в представлениях

$$D(z, \mu) = \left\| \int_b^\infty e^{i\mu y} d_y G_{jh}(z, y) \right\|, \quad \text{Im } \mu = v_0 - \gamma, \\ D_1(z, \mu) = \left\| \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y} d_y \tilde{G}_{jh}(z, y) \right\|, \quad \text{Im } \mu = v_0 + \gamma$$

имеет место равномерно по  $z \in \mathcal{D}_\delta$ ,  $a$  и  $b$

$$|G_{jh}(z, x) - G_{jh}(z, \infty)| = O(e^{(v_0 - \gamma)x}), \quad x \rightarrow \infty, \\ |\tilde{G}_{jh}(z, x) - \tilde{G}_{jh}(z, -\infty)| = O(e^{(v_0 + \gamma)x}), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Это следует из [2, лемма 2], при этом необходимо убедиться, что вариации функций

$$\int_x^\infty e^{-(v_0 - \gamma)y} d_y G_{jh}(z, y), \quad x \geq b, \quad \int_{-\infty}^x e^{-(v_0 + \gamma)y} d_y \tilde{G}_{jh}(z, y), \quad x \leq -a$$

ограничены равномерно по  $z$ ,  $a$  и  $b$ . Как следует из вывода формул (15) и (16), для этого достаточно, чтобы аналогичными свойствами обладали функции  $f$  и  $f_1$ , что имеет место в каждом конкретном случае (17) —

(21). Например, при  $f_1 = Q_2$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} e^{-(v_0+\nu)y} \mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(|z|)y} \mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = Q_{2jk}(|z|, i\mu_-(|z|)) \leq c \end{aligned}$$

(последнее неравенство установлено ранее).

Оценим величины  $D(z, i\mu_-(z))$  и  $D_1(z, i\mu_+(z))$ . Здесь

$$\begin{aligned} |D_{jk}(z, i\mu_-(z))| &= \left| \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(z)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| = \\ &= \left| \int_b^{\infty} e^{(v_0-\nu-\mu_-(z))y} e^{-(v_0-\nu)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| \leq \left| \int_b^{\infty} e^{-\nu y} e^{-(v_0-\nu)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| \leq c e^{-\nu b}, \\ |D_{1jk}(z, i\mu_+(z))| &= \left| \int_{-\infty}^{-a} e^{-\mu_+(z)y} d_y \tilde{G}_{jk}(z, y) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{-a} e^{(v_0+\nu-\mu_+(z))y} e^{-(v_0+\nu)y} d_y \tilde{G}_{jk}(z, y) \right| \leq c e^{-\nu a}. \end{aligned}$$

Кроме того, в представлении

$$e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mathcal{Y}^{\circ}(z, \mu) = e^{\mu_+(z)b} \left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} v_{jk}(z, y-b) dy \right\|$$

справедливо при  $x \geq b$

$$\left| e^{\mu_+(z)b} \int_x^{\infty} v_{jk}(z, y-b) dy \right| = e^{\nu_0 b} \cdot O\left(e^{(v_0-\nu)(x-b)}\right) = O\left(e^{\nu_0 x - \nu(x-b)}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} D(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu+\mu_+(z))b} [D_1(z, i\mu_+(z)) C_3(z) + D(z, i\mu_-(z)) C_4(z)] \mathcal{Y}^{\circ}(z, \mu) = \\ = \left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\|, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\left| \int_x^{\infty} d_y r_{jk}(z, y) \right| = O\left(e^{(v_0-\nu)x}\right) + O\left(e^{\nu_0 x - \nu(x-b+a)}\right), \quad (27)$$

что и доказывает (6). Соотношение (7) доказывается по той же схеме симметричными рассуждениями, в которых отправным пунктом является тождество (13). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть при  $z \in \mathcal{D}_0$   $\mu_+(|z|) < \text{Im } \mu < \mu_-(|z|)$ . В этом случае существует матрица  $(E - zF(\mu))^{-1}$  и в силу (9)

$$Q_0(z, \mu) = (E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu)) (E - zF(\mu))^{-1}.$$

Воспользуемся далее асимптотическими представлениями для  $Q_1(z, \mu)$  и  $Q_2(z, \mu)$ , вытекающими из (6) и (7), в силу которых

$$\begin{aligned} Q_0(z, \mu) &= (E - zF(\mu))^{-1} + \frac{\exp\{-(i\mu + \mu_-(z))a\} (1 - \mu^b(z) h_2(z))}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} \times \\ &\times \frac{\mu_-(z) - a_-}{i\mu + \mu_-(z)} A_z \mathcal{L}_z^{-1}(i\mu_-(z)) L_{z+}^{-1}(\mu) + \frac{\exp\{(i\mu + \mu_+(z))b\} (1 - \mu^a(z) h_1(z))}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} \times \\ &\times \frac{\mu_+(z) - a_+}{i\mu + \mu_+(z)} A_{z+} \mathcal{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) R_{z-}^{-1}(\mu) + \\ &+ \left( \left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\| + \left\| \int_{-\infty}^{-a_0} e^{i\mu y} d_y \tilde{r}_{jk}(z, y) \right\| \right) (E - zF(\mu))^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $\left\| \int_b^\infty e^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\|$  и  $\left\| \int_{-\infty}^{-a+0} e^{i\mu y} d_y \tilde{r}_{jk}(z, y) \right\|$  — остаточные члены в асимптотических представлениях для  $Q_2(z, \mu)$  и  $Q_1(z, \mu)$  соответственно; первый из них введен в (26), (27), второй обладает свойством

$$\left| \int_{-\infty}^x d_y \tilde{r}_{jk}(z, y) \right| = O(e^{(v_0+\nu)x}) + O(e^{v_0x+\nu(x+a-b)}), \quad x \leq -a.$$

Так как при рассматриваемых  $z$  и  $\mu$  все собственные числа матрицы  $zF(\mu)$  по модулю меньше единицы, то

$$\begin{aligned} (E - zF(\mu))^{-1} &= E + zF(\mu) + z^2F^2(\mu) + \dots = \\ &= \left\| \int_{-\infty}^\infty e^{i\mu y} d_y \sum_{n=0}^\infty z^n \mathbf{P}(S_n \in dy, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) \right\|. \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть, далее,

$$\begin{aligned} (i\mu + \mu_-(z))^{-1} L_{z+}^{-1}(\mu) &= \left\| \int_{-\infty}^\infty e^{i\mu y} d_y f_{jk}^{(1)}(z, y) \right\|, \\ (i\mu + \mu_+(z))^{-1} R_{z-}^{-1}(\mu) &= \left\| \int_{-\infty}^\infty e^{i\mu y} d_y f_{jk}^{(2)}(z, y) \right\|, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \left[ \frac{e^{-i\mu a} L_{z+}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_-(z)} \right]^{[x_1, x_2]} &= \left\| \int_{x_1}^{x_2+0} e^{i\mu y} d_y f_{jk}^{(1)}(z, y+a) \right\|, \\ \left[ \frac{e^{i\mu b} R_{z-}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_+(z)} \right]^{[x_1, x_2]} &= \left\| \int_{x_1}^{x_2+0} e^{i\mu y} d_y f_{jk}^{(2)}(z, y-b) \right\|, \end{aligned}$$

значит, при  $b - x_2 \rightarrow \infty$ ,  $a + x_1 \rightarrow \infty$  для получения асимптотических представлений функции  $S(z, [x_1, x_2])$  необходимо изучить асимптотику функций  $f_{jk}^{(1)}(z, y)$  при  $y \rightarrow \infty$  и  $f_{jk}^{(2)}(z, y)$  при  $y \rightarrow -\infty$ . Для первой из них

$$\begin{aligned} L_{z+}^{-1}(\mu) (i\mu + \mu_-(z))^{-1} &= \mathcal{L}_{z+}^{-1}(\mu) F_{z+}(\mu) (i\mu + \mu_-(z))^{-1} = \\ &= \mathcal{L}_{z+}^{-1}(\mu) (i\mu + \mu_-(z))^{-1} - \frac{\mu_+(z) - a_+}{(i\mu + \mu_+(z))(i\mu + \mu_-(z))} \mathcal{L}_{z+}^{-1}(\mu) A_{z+} = \\ &= - \frac{\mu_+(z) - a_+}{(i\mu + \mu_-(z))(i\mu + \mu_+(z))} \mathcal{L}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) A_{z+} + q_1(z, \mu), \end{aligned}$$

где  $q_1(z, \mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0)$ , кроме того,

$$(i\mu + \mu_-(z))^{-1} (i\mu + \mu_+(z))^{-1} = - \int_{-\infty}^\infty e^{(i\mu + \mu_-(z))y} \int_{\max(0, y)}^\infty e^{(\mu_+(z) - \mu_-(z))t} dt dy,$$

стало быть

$$\begin{aligned} \left\| \int_{a+x_1}^{a+x_2+0} d_y f_{jk}^{(1)}(z, y) \right\| &= \frac{e^{\mu_+(z)(x_2+a)} - e^{\mu_+(z)(x_1+a)}}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} (\mu_+(z) - a_+) \times \\ &\times \mathcal{L}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) A_{z+} + O(e^{(v_0-\nu)(a+x_1)}) + O(e^{(v_0-\nu)(a+x_2)}). \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогично находим

$$\frac{R_{z-}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_+(z)} = - \frac{(\mu_-(z) - a_-) \mathcal{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z)) A_{z-}}{(i\mu + \mu_-(z))(i\mu + \mu_+(z))} + q_2(z, \mu),$$

где  $q_2(z, \mu) \in V(v_0, v_0 + \gamma)$ , следовательно,

$$\left\| \int_{x_1-b}^{x_2-b+a} d_y f_{jh}^{(z)}(z, y) \right\| = \frac{e^{\mu_-(z)(x_2-b)} - e^{\mu_-(z)(x_1-b)}}{\mu_-(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} (\mu_-(z) - a_-) \times \\ \times \mathcal{R}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z)) A_{z-} + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_2-b)}\right) + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_1-b)}\right). \quad (31)$$

Соотношения (29) — (31) вместе с (28) дают главные члены в разложении (8). Осталось исследовать остаточный член в (28). Пусть

$$(E - zF(\mu))^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y g_{jh}(z, y) \right\|.$$

Изучим поведение  $g_{jh}(z, y)$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ . Имеем

$$(E - zF(\mu))^{-1} = F_{z+}(\mu) \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) F_{z-}(\mu) = \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) - \\ - (\mu_+(z) - a_+) (i\mu + \mu_+(z))^{-1} A_{z+} \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) - \\ - (\mu_-(z) - a_-) (i\mu + \mu_-(z))^{-1} \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) A_{z-} + \\ + \frac{(\mu_+(z) - a_+) (\mu_-(z) - a_-)}{(i\mu + \mu_-(z)) (i\mu + \mu_+(z))} A_{z+} \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) A_{z-}.$$

Выделяя, как и ранее, особенности функции  $(E - zF(\mu))^{-1}$ , получаем

$$\int_x^{\infty} d_y g_{jh}(z, y) = c_{jh}(z) (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} \int_x^{\infty} e^{\mu_+(z)t} dt + O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \quad x \rightarrow \infty, \\ \int_{-\infty}^x d_y g_{jh}(z, y) = \tilde{c}_{jh}(z) (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} \int_{-\infty}^x e^{\mu_-(z)t} dt + O\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \rightarrow -\infty,$$

где функции  $c_{jh}$ ,  $\tilde{c}_{jh}$  ограничены в  $\mathcal{D}_0$ . Следовательно, в представлении

$$\left( \left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y r_{jh}(z, y) \right\| + \left\| \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y} d_y \tilde{r}_{jh}(z, y) \right\| \right) (E - zF(\mu))^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y \rho_{jh}(z, y) \right\|$$

имеем после несложных вычислений

$$\int_{x_1}^{x_2} d_y \rho_{jh}(z, y) = \left[ O\left(e^{v_0 x_2}\right) + O\left(e^{v_0 x_1}\right) \right] \left[ O\left(e^{-v a}\right) + O\left(e^{-v b}\right) \right] (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1}.$$

Таким образом, с учетом (30) и (31) суммарный остаточный член в (8) будет иметь вид

$$\left[ O\left(e^{(v_0-\gamma)(a+x_1)}\right) + O\left(e^{(v_0-\gamma)(a+x_2)}\right) \right] e^{-\mu_-(z)a} + \\ + \left[ O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_2-b)}\right) + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_1-b)}\right) \right] e^{\mu_+(z)b} + \\ + \left[ O\left(e^{v_0 x_2}\right) + O\left(e^{v_0 x_1}\right) \right] \left[ O\left(e^{-v a}\right) + O\left(e^{-v b}\right) \right] (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} = \\ = \left[ O\left(e^{v_0 x_2 - \gamma \min(a, b-x_2)}\right) + O\left(e^{v_0 x_1 - \gamma \min(b, a+x_1)}\right) \right] (z - z_0)^{-1/2}.$$

Теорема 2 доказана.

Для последующего контурного интегрирования производящих функций  $T_{jh}$  и  $S_{jh}$  нам потребуется их оценка на множестве  $L_0 = \{|z| = z_0, |z - z_0| \geq \delta\}$ . Рассмотрим сначала  $T_{jh}(z, (-\infty, x])$  при  $x \leq -a$ . Нетрудно видеть, что при  $z \in L_0$   $Q_1(z, \mu) \in V_-(v_0 + \gamma)$  при некотором  $\gamma > 0$ . Это следует из (11), так как  $L_{z-}^{\pm 1}(\mu) \in V_-(v_0 + \gamma)$ ,  $Q_2(z, \mu) \in V_+(v_0 + \gamma)$ , и потому  $[(E - Q_2(z, \mu)) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{[-\infty, -a]} \in V_-(v_0 + \gamma)$ . Применяя опять

лемму 2 из [2], будем иметь при  $z \in L_0$

$$T_{jk}(z, (-\infty, x]) = O(e^{(v_0+\nu)x}), \quad x \leq -a \quad (32)$$

равномерно по  $z$ ,  $a$  и  $b$ . Аналогично

$$T_{jk}(z, [x, \infty)) = O(e^{(v_0-\nu)x}), \quad x \geq b \quad (33)$$

равномерно по  $z \in L_0$ ,  $a$  и  $b$ . Далее, в силу основного тождества (9)

$$S_{jk}(z, [x_1, x_2]) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], \kappa_n = k/\kappa_0 = j) - \\ - \sum_{q=1}^m \left( \int_{x_1}^{x_2} d_y \int_b^{\infty} g_{qk}(z, y-t) T_{jq}(z, dt) - \int_{x_1}^{x_2} d_y \int_{-\infty}^{-a} g_{qk}(z, y-t) T_{jk}(z, dt) \right)$$

и остается воспользоваться в этом соотношении формулами (32), (33) и асимптотическими представлениями

$$\int_x^{\infty} d_y g_{jk}(z, y) = O(e^{(v_0-\nu)x}), \quad \int_{-\infty}^{-x} d_y g_{jk}(z, y) = O(e^{-(v_0+\nu)x}), \quad x \rightarrow \infty,$$

которые справедливы при  $z \in L_0$ , так как  $(E - zF(\mu))^{-1} \in V(v_0 - \nu, v_0 + \nu)$  для таких  $z$ . Получаем в итоге равномерно по  $z \in L_0$ ,  $x_1$  и  $x_2$

$$S_{jk}(z, [x_1, x_2]) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = \\ = O(e^{v_0 x_2 - \nu \min(a, b)}) + O(e^{v_0 x_1 - \nu \min(a, b)}). \quad (34)$$

#### § 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обозначим через  $\Gamma$  контур, полученный из дуги  $|z| = z_0$ ,  $|z - z_0| < \delta$  искривлением внутрь  $\mathcal{D}_\delta$  вблизи точки  $z = z_0$ . Имеем тогда

$$\mathbf{P}(S_N \in A, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=z_0} T_{jk}(z, A) z^{-n-1} dz = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T_{jk}(z, A) z^{-n-1} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\delta} T_{jk}(z, A) z^{-n-1} dz.$$

В силу (32) и (33) последний интеграл есть  $O(z_0^{-n} e^{(v_0+\nu)x})$  при  $A = (-\infty, x]$ ,  $x \leq -a$  и  $O(z_0^{-n} e^{(v_0-\nu)x})$  при  $A = [x, \infty)$ ,  $x \geq b$ . Точно так же в силу (34) для нахождения  $\mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], N \leq n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j)$  достаточно вести интегрирование соответствующей производящей функции лишь по контуру  $\Gamma$ , образующаяся при этом погрешность имеет порядок, указанный в (34), умноженный на  $z_0^{-n}$ . Во всех случаях вдоль контура  $\Gamma$  мы можем заменить производящие функции их асимптотическими представлениями (6)–(8). Дело сводится, таким образом, к необходимости строить асимптотические разложения для интегралов вида

$$J(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G(z) z^{-n-1} dz,$$

где функция  $G$  имеет вид

$$G_1(z) = f(z) \exp\{(k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z))a + (k_3\mu_+(z) - k_4\mu_-(z))b\} \times \\ \times \frac{1 - \mu^b(z) h_2(z)}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} + \frac{\delta(z)}{(z - z_0)^{1/2}}$$

ИЛИ

$$G_2(z) = f(z) \exp\{(k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z))b + (k_3\mu_+(z) - k_4\mu_-(z))a\} \times \\ \times \frac{1 - \mu^a(z) h_1(z)}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} + \frac{\delta(z)}{(z - z_0)^{1/2}}.$$

Здесь  $k_1, \dots, k_4$  — неотрицательные постоянные величины,  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k i^k (z - z_0)^{k/2}$ ,  $\delta(z)$  — аналитическая в  $\mathcal{D}_\delta$  и непрерывная на границе функция, оценки которой содержатся в (6) — (8).

Подробное изложение способа построения полных асимптотических разложений для интегралов подобного вида содержится в [9] с той лишь разницей, что там предполагается  $z_0 = 1$ , что несущественно с точки зрения применения метода. В связи с этим мы ограничимся здесь кратким изложением схемы действий с формулировкой результатов и указанием алгоритмов вычисления коэффициентов разложений. Рассмотрим сначала случай  $G(z) = G_1(z)$  и пусть  $a = a(n) = o(n)$ ,  $b = b(n) = o(n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Интеграл

$$\frac{z_0^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\delta(z) dz}{(z - z_0)^{1/2} z^{n+1}}$$

имеет ту же оценку, что и  $\delta(z)$  в  $\mathcal{D}_\delta$ , а функцию  $\Pi(z) = (1 - \mu^b(z) \times \times h_2(z))(1 - \mu^{a+b}(z)h(z))^{-1}$  при любом  $M \geq 1$  можно представить в виде  $\Pi(z) = \sum_{s=0}^{M-1} (1 - \mu^b(z)h_2(z))\mu^{(a+b)s}(z)h^s(z) + \Pi(z)\mu^{(a+b)M}(z)h^M(z)$ . В соответствии с этим с точностью до экспоненциального остатка известного вида  $J(n)$  можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \left[ \sum_{s=0}^{M-1} (J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) + J_M(n) \right],$$

где

$$J_{rs}(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(h_1 - h_2) + b(h_3 - h_4)]} \int_{\Gamma} \tilde{a}_r(z) e^{n\tilde{h}_{rs}(z)} dz, \quad s = 0, \dots, M-1,$$

$$J_M(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(h_1 - h_2) + b(h_3 - h_4)]} \int_{\Gamma} \tilde{a}_1(z) \Pi(z) e^{n\tilde{h}_{1M}(z)} dz,$$

$$\tilde{h}_{1s}(z) = (\tau_1 s + \tau_2 s)(\mu_+(z) - \mu_-(z)) + \tau_1(k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z)) + \tau_2(k_3\mu_+(z) - - k_4\mu_-(z)) + s\tau_3 \ln h(z) - \ln \frac{z}{z_0} - \tau_1 v_0(k_1 - k_2) - \tau_2 v_0(k_3 - k_4),$$

$$\tilde{h}_{2s}(z) = \tilde{h}_{1s}(z) + \tau_2(\mu_+(z) - \mu_-(z)), \quad \tilde{a}_1(z) = f(z)z^{-1},$$

$$\tilde{a}_2(z) = h_2(z)\tilde{a}_1(z), \quad \tau_1 = \frac{a}{n}, \quad \tau_2 = \frac{b}{n}, \quad \tau_3 = \frac{1}{n},$$

и пусть после замены  $t = i(z - z_0)^{1/2}$

$$a_r(t) = -2i\tilde{a}_r(z), \quad \eta(t) = h(z), \quad \psi_{\pm}(t) = \mu_{\pm}(z), \quad h_{rs}(t) = \tilde{h}_{rs}(z)$$

(везде в дальнейшем переменная  $r$  принимает значения только 1 или 2). Пусть  $\Gamma_1$  — образ  $\Gamma$  в плоскости переменной  $t$ , тогда

$$J_{rs}(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(h_1 - h_2) + b(h_3 - h_4)]} \int_{\Gamma_1} a_r(t) e^{nh_{rs}(t)} dt.$$

Исследование этих интегралов проводится с помощью модификации метода перевала, изложенной в [2]. Точки перевала  $t_{rs}$  функций  $h_{rs}(t)$  определяются из уравнений  $h'_{rs}(t) = 0$ . Рассмотрим уравнения

$$F_1(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv z_1(\psi'_+(t) - \psi'_-(t)) + z_2 \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} + + z_3(k_1\psi'_+(t) - k_2\psi'_-(t)) + z_4(k_3\psi'_+(t) - k_4\psi'_-(t)) + \frac{2t}{z_0 - t^2} = 0, \quad (35)$$

$$F_2(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv F_1(t, z_1, z_2, z_3, z_4) + z_4(\psi'_+(t) - \psi'_-(t)) = 0. \quad (36)$$

Существуют решения  $t_1(z_1, z_2, z_3, z_4)$  и  $t_2(z_1, z_2, z_3, z_4)$  уравнений (35) и (36) соответственно, представимые в некоторой  $\tau$ -окрестности нуля в виде сходящихся рядов по степеням  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Коэффициенты этих разложений без труда вычисляются известным образом. Заметим, что

$$h'_{rs}(t) = F_r(t, (\tau_1 + \tau_2)s, \tau_3s, \tau_1, \tau_2). \quad (37)$$

Полагая  $M-1 = [\tau n / (a+b)]$ , мы обеспечим принадлежность  $\tau$ -окрестности нуля всех аргументов в (37). Таким образом, для точек перевала  $t_r$  получим разложения по степеням  $(\tau_1 + \tau_2)s, \tau_3s, \tau_1, \tau_2$ , а после перегруппировки — по степеням  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ :

$$t_r \equiv t_r((\tau_1 + \tau_2)s, \tau_3s, \tau_1, \tau_2) = -\psi_1 z_0 \left( s + \frac{k_1 + k_2}{2} \right) \tau_1 - \\ - \psi_1 z_0 \left( s + \frac{k_3 + k_4}{2} + r - 1 \right) \tau_2 - \frac{s \eta_1 z_0}{2} \tau_3 + O((\tau_1 + \tau_2)^2 s^2).$$

Число  $\psi_1$  определено в (4),  $\eta_1 = \eta'(0)$ . Поскольку в окрестности нуля

$$h_{rs}(t) = \psi_1 t [(2s + k_1 + k_2) \tau_1 + (2(s + r - 1) + k_3 + k_4) \tau_2] + \\ + s \eta_1 \tau_3 t + \frac{t^2}{z_0} [1 + O(s(\tau_1 + \tau_2))] + O(t^3),$$

справедливы разложения

$$h_{rs}(t_{rs}) = -z_0 \left[ \psi_1 \left( s + \frac{k_1 + k_2}{2} \right) \tau_1 + \psi_1 \left( s + r - 1 + \frac{k_3 + k_4}{2} \right) \tau_2 + \right. \\ \left. + \frac{s \eta_1}{2} \tau_3 \right]^2 + O((\tau_1 + \tau_2)^3 s^3), \\ h''_{rs}(t_{rs}) = \frac{2}{z_0} + O(s(\tau_1 + \tau_2)).$$

Применение метода Лапласа оценки интегралов дает нам при каждом целом  $q \geq 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{s=0}^{M-1} (J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1 - k_2) + b(k_3 - k_4)]} \times \\ \times \left[ \sum_{j=0}^{q-1} n^{-j-\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{M-1} (D_{1sj} e^{nh_{1s}(t_{1s})} - D_{2sj} e^{nh_{2s}(t_{2s})}) + \right. \\ \left. + n^{-q-\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{M-1} (R_{1sq} e^{nh_{1s}(t_{1s})} - R_{2sq} e^{nh_{2s}(t_{2s})}) \right], \quad (38)$$

где величины  $R_{rsj}$  ограничены равномерно по  $s = 0, \dots, M-1$  и  $n$ ,

$$D_{rsj} = \frac{(-1)^{1/2}}{2\pi i} \sum_{i=0}^{2j} q_{2j,i}^{r,s} (-h_{rs}^{(0)})^{-i-j-\frac{1}{2}} \Gamma\left(i + j + \frac{1}{2}\right),$$

а  $q_{j,i}^{r,s}$  — коэффициент при  $z^j$  в произведении

$$\frac{1}{i!} (a_{rs}^{(0)} + a_{rs}^{(1)}z + \dots) (h_{rs}^{(1)}z + h_{rs}^{(2)}z^2 + \dots)^i, \\ a_{rs}^{(k)} = \frac{a_r^{(k)}(t_{rs})}{k!}, \quad h_{rs}^{(k)} = \frac{1}{(k+2)!} h_{rs}^{(k+2)}(t_{rs}), \quad k = 0, 1, \dots$$

В силу выбора числа  $M$  интегралом  $J_M(n)$  можно пренебречь (см. [9]).

Если  $\frac{a+b}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$ , то при суммировании по  $s$  в (38) достаточно ограничиться слагаемым при  $s=0$ , все последующие будут отличаться от него множителем порядка  $O\left(e^{-\gamma(a+b)^2/n}\right)$ . Это и даст нам окончательный результат для таких  $a$  и  $b$ .

Пусть

$$a = a_1 \sqrt{n}, \quad b = b_1 \sqrt{n}, \quad 0 < c_1 \leq a_1, \quad b_1 \leq c_2 < \infty. \quad (39)$$

В этом случае суммирование по  $s$  в (38) можно распространить до  $\infty$ , что не изменит вида остаточного члена. Имеем здесь  $\tau_1 = \frac{a_1}{\sqrt{n}}$ ,  $\tau_2 = \frac{b_1}{\sqrt{n}}$ ,  $\tau_3 = \frac{1}{n}$  и справедливо разложение

$$D_{rsj} \exp \left\{ nh_{rs}(t_{rs}) + \psi_{i_0}^2 \left[ a_1 \left( s + \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + b_1 \left( s + r - 1 + \frac{k_3 + k_4}{2} \right) \right]^2 \right\} = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} q_i^{r,j}(s),$$

где  $q_i^{r,j}(s)$  — многочлены от  $s$ ,  $a_1$  и  $b_1$  степени не выше  $3i$  по каждой переменной. Обозначим

$$P_{ij} = \sum_{s=0}^{\infty} \left( q_i^{1,j}(s) \exp \left\{ -\psi_{i_0}^2 \left[ a_1 \left( s + \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + b_1 \left( s + \frac{k_3 + k_4}{2} \right) \right]^2 \right\} - \right. \\ \left. - q_i^{2,j}(s) \exp \left\{ -\psi_{i_0}^2 \left[ a_1 \left( s + \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + b_1 \left( s + 1 + \frac{k_3 + k_4}{2} \right) \right]^2 \right\} \right), \quad (40)$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{s=0}^{M-1} (J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1 - k_2) + b(k_3 - k_4)]} \times \\ \times \left( \sum_{j=0}^{q-1} n^{-j-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} P_{ij} + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right) \right)$$

при каждом  $q \geq 1$ . Заметим, что коэффициенты  $P_{ij}$  зависят среди всего прочего от пяти параметров:  $P_{ij} = P_{ij}(k_1, k_2, k_3, k_4, f)$ . Этими обозначениями мы в дальнейшем будем пользоваться.

Наконец, мы можем рассмотреть ситуацию  $b = b_1 \sqrt{n}$ ,  $a = o(b)$  или, наоборот,  $a = a_1 \sqrt{n}$ ,  $b = o(a)$ . Здесь получатся полные асимптотические разложения для  $J(n)$  по степеням величин  $\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$  и  $\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{n}}$  в первом случае и по степеням  $\theta_1$  и  $\theta_3 = \frac{b}{\sqrt{n}}$  во втором. Подробно это сделано в [9], поэтому мы ограничимся ссылкой на эту работу.

Для исследования  $J(n)$  при  $G(z) = G_2(z)$  достаточно в предыдущих рассмотрениях заменить  $h_2(z)$  на  $h_1(z)$  и поменять местами  $a$  и  $b$ . Полученные в этой ситуации коэффициенты  $P_{ij}$  мы будем снабжать штрихами.

Перейдем к окончательным формулировкам теорем. Ясно, что описанный выше метод вместе с найденными в § 3 асимптотическими представлениями производящих функций позволяет получать полные асимптотические разложения для распределений  $P(S_N \in A, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j)$  при любых  $A \subset (-\infty, -a] \cup [b, \infty)$  и для  $P(S_N \in [x_1, x_2], N \leq n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j)$  при  $a + x_1 \rightarrow \infty$ ,  $b - x_2 \rightarrow \infty$  во всем спектре уклонений, совместимых с требованиями  $a \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$ ,  $a + b = o(n)$ ,  $a + b \geq c\sqrt{n}$ . Мы приведем здесь некоторые из них.

**Теорема 3.** Пусть  $(a+b)/\sqrt{n} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда для любого  $x \leq -a$  и любого целого  $q \geq 1$

$$\begin{aligned} & P(S_N \leq x, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = \\ & = z_0^{-n} e^{-v_0 a} \left[ \sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \left( D_{10l} e^{nh_{10}(t_{10})} - D_{20l} e^{nh_{20}(t_{20})} \right) + \right. \\ & \left. + n^{-q-\frac{1}{2}} O(\exp\{-z_0 \psi_1^2 a^2/n\}) \right] (1 + O(\exp\{-\gamma(a+b)^2/n\})) + \\ & + O(z_0^{-n} e^{(v_0+\nu)x}) + O(z_0^{-n} e^{(v_0+\nu)(x+a-b)}), \end{aligned}$$

при этом в определении  $D_{20l}$  следует положить  $f(z) = \int_{-\infty}^{x+a} u_{jk}(z, y) dy, k_1 = k_3 = k_4 = 0, k_2 = 1$ .

Ясно, что в случае достаточно быстрого роста  $b$ , например, при  $b = n^{1/2+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , слагаемое  $D_{20l} e^{nh_{20}(t_{20})}$  отличается от  $D_{10l} e^{nh_{10}(t_{10})}$  множителем порядка  $e^{-\gamma n^{2\varepsilon}}$  и по этой причине может быть отнесено в остаточный член, т. е. в этом случае двуграничная задача сводится к однограничной.

Аналогичным образом может быть выписано разложение для  $P(S_N \geq x, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j), x \geq b$ .

Далее рассмотрим наиболее важную, на наш взгляд, ситуацию пормальных уклонений границ.

**Теорема 4.** Пусть выполнено (39). Тогда для каждого целого  $q \geq 1$  справедливо

$$\begin{aligned} 1) P(S_N \leq x, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = \\ = z_0^{-n} e^{-v_0 a} \left[ \sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} P_{il}(0, 1, 0, 0, f_x^{j,k}) + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right) \right], \end{aligned}$$

где  $x \leq -a$ ,  $f_x^{j,k}(z) = \int_{-\infty}^{x+a} u_{jk}(z, y) dy, P_{00}(0, 1, 0, 0, f_x^{j,k}) = 0, P_{10}(0, 1, 0, 0,$

$$\begin{aligned} f_x^{j,k}) = f_x^{j,k}(z_0) z_0^{1/2} \psi_1 \pi^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[ \left( s + \frac{1}{2} \right) a_1 + s b_1 \right] e^{-\psi_1^2 z_0 \left[ a_1 \left( s + \frac{1}{2} \right) + s b_1 \right]^2} - \right. \\ \left. - \left[ \left( s + \frac{1}{2} \right) a_1 + (s+1) b_1 \right] e^{-\psi_1^2 z_0 \left[ a_1 \left( s + \frac{1}{2} \right) + b_1 (s+1) \right]^2} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) P(S_N \geq x, N = n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = \\ = z_0^{-n} e^{v_0 b} \left[ \sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} P'_{il}(1, 0, 0, 0, \tilde{f}_x^{j,k}) + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

где  $x \geq b$ ,  $\tilde{f}_x^{j,k}(z) = \int_{x-b} u_{jk}(z, y) dy, P'_{00}(1, 0, 0, 0, \tilde{f}_x^{j,k}) = 0, P'_{10}(1, 0, 0, 0,$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x^{j,k}) = \tilde{f}_x^{j,k}(z_0) z_0^{1/2} \psi_1 \pi^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[ s a_1 + \left( s + \frac{1}{2} \right) b_1 \right] e^{-\psi_1^2 z_0 \left[ s a_1 + \left( s + \frac{1}{2} \right) b_1 \right]^2} - \right. \\ \left. - \left[ (s+1) a_1 + \left( s + \frac{1}{2} \right) b_1 \right] e^{-\psi_1^2 z_0 \left[ (s+1) a_1 + \left( s + \frac{1}{2} \right) b_1 \right]^2} \right\}. \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Пусть  $-a < x_1 < 0 < x_2 < b$  и выполнено (39). Тогда при любом целом  $q \geq 1$

1) если  $x_1$  и  $x_2$  не зависят от  $n$ , то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], N \leq n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = \\ & = z_0^{-n} \sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} (P_{il}(1, 1, 0, 0, f_{j,h}^{(1)}) + P'_{il}(1, 1, 0, 0, f_{j,h}^{(2)})) + \\ & \quad + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}} z_0^{-n}\right), \end{aligned}$$

$$f_{j,h}^{(1)}(z) = \frac{e^{\mu_+(z)x_2} - e^{\mu_+(z)x_1}}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} \tilde{K}_{jh}(z), \quad f_{j,h}^{(2)}(z) = \frac{e^{\mu_-(z)x_2} - e^{\mu_-(z)x_1}}{\mu_-(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} K_{jh}(z),$$

$$\begin{aligned} & P_{00}(1, 1, 0, 0, f_{j,h}^{(1)}) + P'_{00}(1, 1, 0, 0, f_{j,h}^{(2)}) = \\ & = \frac{(e^{v_0 x_2} - e^{v_0 x_1}) \tilde{K}_{jh}(z_0)}{2\sqrt{\pi} v_0 \psi_1 z_0^{1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} (\exp\{-\psi_1^2 z_0 [a_1(s+1) + b_1 s]^2\} + \\ & + \exp\{-\psi_1^2 z_0 [a_1 s + b_1(s+1)]^2\} - 2 \exp\{-\psi_1^2 z_0 [a_1(s+1) + b_1(s+1)]^2\}); \end{aligned}$$

2) если  $|x_1| = \alpha a$ ,  $x_2 = \beta b$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные величины, и  $v_0 \neq 0$ , то при любом целом  $q \geq 1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], N \leq n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = \\ & = z_0^{-n} e^{v_0 x_2} \left[ \sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} (P_{il}(1, 1, \beta, 0, F_{jh}^{(1)}) + \right. \\ & + P'_{il}(1, 1 - \beta, 0, 0, F_{jh}^{(2)})) + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right) \left. - z_0^{-n} e^{v_0 x_1} \left[ \sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times (P_{il}(1 - \alpha, 1, 0, 0, F_{jh}^{(1)}) + P'_{il}(1, 1, 0, \alpha, F_{jh}^{(2)})) + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right) \right] \right], \end{aligned}$$

$$F_{jh}^{(1)}(z) = \frac{\tilde{K}_{jh}(z)}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))}, \quad F_{jh}^{(2)}(z) = \frac{K_{jh}(z)}{\mu_-(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))},$$

коэффициенты  $P_{il}$  определены в (40), при этом  $q_0^{1,0}(s) = q_0^{2,0}(s) = \frac{K_{jh}(z_0)}{2\sqrt{\pi} v_0 \psi_1 z_0^{1/2}}$ ,  $P'_{00}$  отличается от  $P_{00}$  тем, что  $a_1$  и  $b_1$  меняются местами.

Если  $v_0 = 0$  и  $-x_1 = \alpha a$ ,  $x_2 = \beta b$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ , то подход, примененный в п. 2) теоремы 5 неприменим, так как в этом случае функции  $a_r(t)$  имеют простой полюс в нуле. В этой ситуации, однако, применима другая модификация метода перевала, разработанная А. А. Боровковым в [2] как раз для того случая, когда функция  $a_r(t)$  имеет простой полюс вблизи точки перевала. Эта модификация приспособлена для использования в двуграничной задаче в [13], где при  $m = 1$  с ее помощью найдены полные асимптотические разложения вероятностей вида  $\mathbf{P}(S_N \in A, N \leq n)$ .

Другая возможность здесь — перейти к локальным характеристикам распределения  $\mathbf{P}(S_n \in A, N \leq n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j)$ . Как следует из (8), для него справедливо представление

$$\mathbf{P}(S_n \in A, N \leq n, \kappa_n = k/\kappa_0 = j) = P_{1,n}(A) + P_{2,n}(A),$$

где мера  $P_{1,n}(A)$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а мера  $P_{2,n}(A)$  имеет известную экспоненциальную оценку и соответствует остаточному члену в (8). (Для краткости в обозначениях  $P_{z,n}(A)$  мы опускаем зависимость от  $j, k, a$  и  $b$ .) Пусть  $p_{1,n}(y)$  — плотность, соответствующая  $P_{1,n}(A)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1,n}(y) = \left( \frac{\mu^a(z)(1 - \mu^b(z)h_2(z))}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \tilde{K}_{jh}(z) e^{\mu_+(z)y} + \right. \\ & \left. + \frac{\mu^b(z)(1 - \mu^a(z)h_1(z))}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} K_{jh}(z) e^{\mu_-(z)y} \right) (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} \quad (41) \end{aligned}$$

и, обозначив  $y = -\theta_1 a$  или  $y = \theta_2 b$ ,  $0 < \theta_1 \leq \alpha$ ,  $0 < \theta_2 \leq \beta$ , мы вновь можем применить к правой части (41) изложенную выше схему асимптотического анализа. При этом коэффициенты полученных разложений будут функциями от  $\theta_1$  или  $\theta_2$ .

В заключение заметим, что асимптотические представления производящих функций (6), (7) представляют самостоятельный интерес и могут использоваться в других задачах. Так, при  $z = z_0 = 1$  мы получаем из них распределение величины первого перескока через границу интервала  $(-a, b)$  с точностью до экспоненциально малого остатка, что, в свою очередь, может быть использовано, например, для нахождения с помощью тождества Вальда асимптотических разложений величины  $EN$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм // Теория вероятностей и ее применения.— 1970.— Т. 15, № 3.— С. 377—418.
2. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн.— 1962.— Т. 3, № 5.— С. 645—694.
3. Рогозин Б. А. Распределение максимума процесса с независимыми приращениями // Там же.— 1969.— Т. 10, № 6.— С. 1334—1363.
4. Пресман Э. Л. Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1969.— Т. 33, № 4.— С. 861—900.
5. Miller H. D. A convexity property in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain // Ann. Math. Statist.— 1961.— V. 32, N 4.— P. 1261—1270.
6. Miller H. D. A matrix factorization problem in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain // Proc. Cambridge philos. Soc.— 1962.— V. 58, N 2.— P. 268—285.
7. Аридт К. Асимптотические свойства распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1980.— Т. 25, № 2.— С. 313—328.
8. Аридт К. Об отыскании в явном виде распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 139—146.
9. Лотов В. И. Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I—II // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— Т. 29, № 3.— С. 475—485; № 4.— С. 873—879.
10. Лотов В. И. Об асимптотике распределений, связанных с выходом не дискретного случайного блуждания из интервала // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 18—25.
11. Kemperman J. H. B. A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // Ann. Math. Statist.— 1963.— V. 34, N 4.— P. 1168—1193.
12. Kűchler I., Semjonov A. Die Waldsche Fundamentalidentitat und ein Sequentieller Quotiententest fűr eine zufallige Irrfahrt űber einer homogenen irreduziblen Markovschen Kette mit endlichem Zustandsraum // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statistics.— 1979.— V. 10, N 2.— S. 319—331.
13. Лотов В. И. Асимптотические разложения в двуграничных задачах для случайных блужданий: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1977.— 105 с.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

### В ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ

### ДЛИН СЕРИЙ «УСПЕХОВ»

### В МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

С. Ю. НОВАК

Рассмотрим однородную марковскую цепь  $\{\xi_i, i \geq 0\}$  с состояниями  $\{1; 0\}$ , переходными вероятностями  $p_{11} = \alpha$ ,  $p_{00} = \beta$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta < 1$ , и начальным распределением  $P(\xi_0 = 1) = p$ . Положим

$$\eta_n = \max \left\{ k \leq n : \max_{0 \leq i \leq n-k} 1\{\xi_{i+1} = \dots = \xi_{i+k} = 1\} = 1 \right\}. \quad (0)$$