АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции
Математический институт им. В. А. Стеклова

СТАТИСТИКА И УПРАВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Сборник статей
под редакцией
доктора физико-математических наук
А. Н. ШИРЯЕВА

МОСКВА «НАУКА»
1989

Замечание 3. Задачи, связанные с исследованием асимптотического поведения параметров критерия Неймана—Пирсона δ_t^+, близкие к лемме Стейна, можно найти в работах [3, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
2. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.
3. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Донецк: ИПММ АН УССР, 1984.
4. *Chernoff H.* Large sample theory: parametric case // Ann. Math. Statist. 1956. Vol. 27, N 1. P. 1—22.
5. *Rao C. R.* Efficient estimates and optimum inference procedures in large samples // J. Roy. Statist. Soc. B. 1962. Vol. 24, N 1. P. 46—72.
6. *Krafft O., Plachky D.* Bounds for the power of likelihood ratio test and their asymptotic properties // Ann. Math. Statist. 1970. Vol. 41, N 5. P. 1646—1654.
7. *Коломиец Э. И.* Об асимптотическом поведении вероятностей ошибок второго рода в критерии Неймана — Пирсона (случай вполне асимптотически различимых гипотез) // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32, № 3. С. 503—522.
8. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическое различение двух простых статистических гипотез: Препр. № 86.45. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986.

УДК 519.21

В. И. ЛОТОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ В ДВУГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ

Пусть $S_0=0$, $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$, $(n\geq 1)$ — случайное блуждание, порожденное последовательностью $\{\xi_n\}_{n=}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, τ — марковский момент относительно последовательности $\{S_n\}$. На множестве $\{\tau<\infty\}$ определим случайные величины

$$\tau_+(t)=\min\{n\geq\tau:\ S_n\geq t\},\quad \tau_-(t)=\min\{n\geq\tau:\ S_n\leq t\},$$

t — произвольное вещественное число.

В работе доказывается теорема, устанавливающая связь между двойными преобразованиями

$$f_t^{\pm}(z,\lambda)=\mathsf{E}\left(z^{\tau_\pm(t)}\exp\{\lambda S_{\tau_\pm(t)}\};\ \tau_\pm(t)<\infty\right)$$

и $f(z,\lambda)=\mathsf{E}\left(z^{\tau}e^{\lambda S_\tau};\ \tau<\infty\right)$, которая затем применяется для изучения распределений граничных функционалов, связанных с выходом введенного выше случайного блуждания из интервала. Демонстрируется новый способ получения известных факторизационных представлений для таких распределений, имеющий наглядную вероятностную интерпретацию, а также устанавливается асимптотическое поведение распределения числа пересечений интервала траекторией случайного блуждания.

1. Основная теорема

Пусть при $|z|<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$ $1-z\mathsf{E}e^{\lambda\xi_1}=r_{z+}(\lambda)r_{z-}(\lambda)$ — каноническая V-факторизация [1], где можно положить

$$r_{z\pm}(\lambda)=1-\mathsf{E}\left(z^{\eta_\pm}e^{\lambda\chi_\pm};\ \eta_\pm<\infty\right),$$

$\eta_\pm = \min\{n>0:\ S_n \gtrless 0\}$, $\chi_\pm = S_{\eta_\pm}$. Для всякой функции g, допускающей при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ представление

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \qquad \operatorname{Var} G < \infty,$$

определим операторы

$$\mathscr{A}_t^+ g(z,\lambda) = r_{z+}(\lambda)\,[r_{z+}^{-1}(\lambda)\, g(\lambda)]^{[t,\infty)},$$

$$\mathscr{A}_t^- g(z,\lambda) = r_{z-}(\lambda)\,[r_{z-}^{-1}(\lambda)\, g(\lambda)]^{(-\infty,t]}.$$

Здесь и далее используется обозначение

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y)\right]^D = \int_D e^{\lambda y} dF(y), \qquad \operatorname{Var} F < \infty, \quad D\subset R,$$

функция g также может зависеть от z.

Теорема 1. *При* $|z|<1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$f_t^\pm(z,\lambda) = \mathscr{A}_t^\pm f(z,\lambda).$$

Доказательство. Определим на множестве $\{\tau<\infty\}$ случайные величины

$$\eta_1 = \min\{n>0:\ S_{\tau+n} > S_\tau\}, \qquad \chi_1 = S_{\tau+\eta_1} - S_\tau,$$

$$\eta_i = \min\{n>0:\ S_{\tau+\eta_1+\ldots+\eta_{i-1}+n} > S_{\tau+\eta_1+\ldots+\eta_{i-1}}\},$$

$$\chi_i = S_{\tau+\eta_1+\ldots+\eta_i} - S_{\tau+\eta_1+\ldots+\eta_{i-1}}, \qquad i\geqslant 2.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\left(z^{\tau_+(t)}\exp\{\lambda S_{\tau_+(t)}\};\ \tau_+(t)<\infty\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_t^{\infty} e^{\lambda y}\Big[\mathsf{P}(\tau=n,\ S_\tau\in dy) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} z^i \mathsf{P}(\tau=n,\ S_\tau<t,\ \eta_1=i,\ S_\tau+\chi_1\in dy) +$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{\infty} z^{i+j}\mathsf{P}(\tau=n,\ S_\tau+\chi_1<t,\ \eta_1=i,\ \eta_2=j,\ S_\tau+\chi_1+\chi_2\in dy) +$$

$$+ \ldots\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_t^{\infty} e^{\lambda y}\Big[\mathsf{P}(\tau=n,\ S_\tau\in dy) + \sum_{i=0}^{\infty} z^i\mathsf{P}(\tau=n,\ \eta_1=i,$$

$$S_\tau+\chi_1\in dy) + \sum_{i,j=0}^{\infty} z^{i+j}\mathsf{P}(\tau=n,\ \eta_1=i,\ \eta_2=j,\ S_\tau+\chi_1+\chi_2\in dy)+\ldots\Big] -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} z^n\int_t^{\infty} e^{\lambda y}\Big[\sum_{i=0}^{\infty} z^i \mathsf{P}(\tau=n,\ S_\tau\geqslant t,\ S_\tau+\chi_1\in dy,\ \eta_1=i)+\ldots\Big] =$$

$$= [f(z,\lambda)(1+\mathsf{E}(z^{\eta_1}e^{\lambda\chi_1};\ \eta_1<\infty) + (\mathsf{E}(z^{\eta_1}e^{\lambda\chi_1};\ \eta_1<\infty))^2+\ldots)]^{[t,\infty)} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} z^n\int_t^{\infty} e^{\lambda y}\Big[\sum_{i=0}^{\infty} z^i \int_t^{\infty} \mathsf{P}(\tau=n,\ \eta_1=i,\ S_\tau\in du,\ S_\tau+\chi_1\in dy\Big) +$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{\infty} z^{i+j}\int_t^{\infty}\mathsf{P}(\tau=n,\ \eta_1=i,\ \eta_2=j,\ S_\tau+\chi_1\in du,\ S_\tau+\chi_1+\chi_2\in dy)+\ldots\Big] =$$

$$= [f(z,\lambda)\, r_{z+}^{-1}(\lambda)]^{[t,\infty)} - \sum_{i=0}^{\infty} z^i\int_0^{\infty} e^{\lambda y}\mathsf{P}(\eta_1=i,\ \chi_1\in dy)\Big[\sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot$$

$$\cdot\int_t^{\infty} e^{\lambda y}\mathsf{P}(\tau=n,\ S_\tau\in dy) + \sum_{j,n=0}^{\infty} z^{j+n}\int_t^{\infty} e^{\lambda y}\mathsf{P}(\tau=n,\ \eta_1=i,\ S_\tau+$$

$$+\chi_1\in dy)+\ldots\Big]=[f(z,\lambda)r_{z+}^{-1}(\lambda)]^{[t,\infty)}-\mathsf{E}\left(z^{\eta_1}e^{\lambda\chi_1};\ \eta_1<\infty\right)\times$$
$$\times[f(z,\lambda)r_{z+}^{-1}(\lambda)]^{[t,\infty)}=\mathcal{A}_t^+f(z,\lambda).$$

Второе соотношение доказывается аналогично.

Нетрудно видеть, что распределение скачков случайного блуждания до момента τ включительно может быть произвольным и не влияет на результат.

2. Приложения к двуграничным задачам

Положим при $a<0<b$

$$N=\min\{n:\ S_n\notin(a,b)\},\qquad Q_1(z,\lambda)=\mathsf{E}\,(z^Ne^{\lambda S_N};\ S_N\leqslant a),$$
$$Q_2(z,\lambda)=\mathsf{E}\,(z^Ne^{\lambda S_N};\ S_N\geqslant b);\qquad |z|\leqslant 1,\quad \operatorname{Re}\lambda=0.$$

Следствие 1. При любом целом $k\geqslant 0$ справедливы тождества

$$Q_1(z,\lambda)=\sum_{i=0}^{k}\left(\mathcal{A}_a^-\mathcal{A}_b^+\right)^i\left(\mathcal{A}_a^--\mathcal{A}_a^-\mathcal{A}_b^+\right)e(z,\lambda)+\left(\mathcal{A}_a^-\mathcal{A}_b^+\right)^{k+1}Q_1(z,\lambda),\tag{1}$$

$$Q_2(z,\lambda)=\sum_{i=0}^{k}\left(\mathcal{A}_b^+\mathcal{A}_a^-\right)^i\left(\mathcal{A}_b^+-\mathcal{A}_b^+\mathcal{A}_a^-\right)e(z,\lambda)+\left(\mathcal{A}_b^+\mathcal{A}_a^-\right)^{k+1}Q_2(z,\lambda).\tag{2}$$

Здесь $e(\lambda)\equiv 1$.

Доказательство. Ясно, что достаточно установить (1), (2) при $k=0$. Обозначим $\nu=\min\{n>0:\ S_n\geqslant b\}$, $\varkappa=\min\{n>0:\ S_n\leqslant a\}$, тогда

$$\mathsf{E}\,(z^\nu e^{\lambda S_\nu};\nu<\infty)=\mathcal{A}_b^+e(z,\lambda)=\mathsf{E}\,(z^\nu e^{\lambda S_\nu};\ N=\nu<\infty)+$$
$$+\mathsf{E}\,(z^\nu e^{\lambda S_\nu};\ N<\nu<\infty)=Q_2(z,\lambda)+\mathcal{A}_b^+Q_1(z,\lambda)\tag{3}$$

и аналогично

$$\mathsf{E}\,(z^\varkappa e^{\lambda S_\varkappa};\varkappa<\infty)=\mathcal{A}_a^-e(z,\lambda)=Q_1(z,\lambda)+\mathcal{A}_a^-Q_2(z,\lambda).\tag{4}$$

Эти соотношения, очевидно, эквивалентны (1), (2).

Соотношения (3), (4) впервые получены Кемперманом [2] с помощью аналитического метода типа Винера—Хопфа. Они явились исходным пунктом для нахождения в [2] явных выражений функций $Q_i(z,\lambda)$ для распределений ξ_j специального вида, а также для получения асимптотических разложений распределений, связанных с N, при $|a|$, $b\to\infty$ (см. [3, 4]). Теорема 1 проясняет вероятностный смысл каждого из слагаемых в разложениях (1), (2). Так, например, слагаемое $\mathcal{A}_a^-e(z,\lambda)$ в (1) соответствует траекториям случайного блуждания, когда-либо достигающим множества $(-\infty,a]$ (см. (4)), $\mathcal{A}_a^-\mathcal{A}_b^+e(z,\lambda)$ соответствует траекториям, когда-либо достигшим множества $[b,\infty)$, а затем достигшим $(-\infty,a]$, и т. д. В слагаемом $(\mathcal{A}_a^-\mathcal{A}_b^+)^{k+1}Q_1(z,\lambda)$ в (1) ведется пересчет траекторий, которые, впервые выйдя из интервала (a,b) через нижнюю границу, впоследствии $k+1$ раз проделывают путь в множество $[b,\infty)$ и обратно. Близкая к этой процедура последовательного перебора траекторий использовалась Б. В. Гнеденко и В. С. Королюком [5] для непосредственного подсчета вероятности $\mathsf{P}(N>n,\ S_n=0)$ в схеме блуждания с $\mathsf{P}(\xi_i=\pm 1)=1/2$, что впоследствии стали называть методом «включений—исключений». Сущность его состоит в попытке свести двуграничную задачу к последовательности одноrраничных. Однако если в простейшем случае, когда $\mathsf{P}(\xi_i=\pm 1)=$ $=1/2$, удавалось вычислить в точном виде вероятность того, что траектория определенное число раз пересечет интервал, то при произвольных ξ_i непосредственное вычисление таких вероятностей чрезвычайно затруднительно из-за возможности эффекта перескока через границы интервала. В то же время, как показывает следствие 1, эта процедура может быть реализована, если перейти к двойным преобразованиям.

Другим непосредственным следствием теоремы 1 являются формулы для распределения числа пересечений интервала (a, b) траекторией случайного блуждания в том случае, если это число конечно с вероятностью 1.

Пусть при $k \geqslant 1$ событие $C_k^{(1)}$ означает, что $S_{n_1} \leqslant a$, $S_{n_2} \geqslant b$, $S_{n_3} \leqslant a$, $S_{n_4} \geqslant b, \ldots, S_{n_{2k-1}} \leqslant a$, $S_{n_{2k}} \geqslant b$, а событие $C_k^{(2)}$ происходит, если, наоборот, $S_{n_1} \geqslant b$, $S_{n_2} \leqslant a, \ldots, S_{n_{2k-1}} \geqslant b$, $S_{n_{2k}} \leqslant a$ при некоторых $n_1 < n_2 < \ldots < n_{2k}$. Положим $C_k^{(3)} = C_k^{(1)} \cap \{S_{n_{2k+1}} \leqslant a\}$, $C_k^{(4)} = C_k^{(2)} \cap \{S_{n_{2k+1}} \geqslant b\}$ при некотором $n_{2k+1} > n_{2k}$. Введем случайные величины ζ_i, равные числу пересечений интервала (a, b) траекторией случайного блуждания снизу вверх ($i = 1$) и сверху вниз ($i = 2$), т. е. $\{\zeta_i \geqslant k\} = C_k^{(i)}$, $k \geqslant 1$. Пусть ζ — общее число пересечений интервала. Нетрудно видеть, что

$$\mathsf{P}(\zeta \geqslant 2k) = \mathsf{P}(C_k^{(3)}) + \mathsf{P}(C_k^{(4)}) - \mathsf{P}(C_{k+1}^{(1)}) - \mathsf{P}(C_{k+1}^{(2)}) + \mathsf{P}(C_{k+1}^{(3)}) + \ldots,$$

$$\mathsf{P}(\zeta \geqslant 2k-1) = \mathsf{P}(C_k^{(1)}) + \mathsf{P}(C_k^{(2)}) - \mathsf{P}(C_k^{(3)}) - \mathsf{P}(C_k^{(4)}) + \ldots, \quad k \geqslant 1.$$

Применяя теперь теорему 1, получим

Следствие 2. При $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(\zeta_1 \geqslant k) = (\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^-)^k e(1, 0), \quad \mathsf{P}(\zeta_2 \geqslant k) = (\mathscr{A}_a^- \mathscr{A}_b^+)^k e(1, 0),\\
&\mathsf{P}(\zeta \geqslant 2k) = \mathscr{A}_a^- (\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^-)^k e(1, 0) + \mathscr{A}_b^+ (\mathscr{A}_a^- \mathscr{A}_b^+)^k e(1, 0) -\\
&\qquad - (\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^-)^{k+1} e(1, 0) - (\mathscr{A}_a^- \mathscr{A}_b^+)^{k+1} e(1, 0) + \ldots,\\
&\mathsf{P}(\zeta \geqslant 2k-1) = (\mathscr{A}_a^- \mathscr{A}_b^+)^k e(1, 0) + (\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^-)^k e(1, 0) -\\
&\qquad - \mathscr{A}_a^- (\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^-)^k e(1, 0) - \mathscr{A}_b^+ (\mathscr{A}_a^- \mathscr{A}_b^+)^k e(1, 0) + \ldots
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь под значением $\mathscr{A}_t^\pm g(1, 0)$ понимается $\lim\limits_{z \uparrow 1} \mathscr{A}_t^\pm g(z, 0)$.

Заметим, что требование $0 \in (a, b)$ не принципиально, так как изменения, которые нужно внести в формулы (5) при $0 \notin (a, b)$, очевидны. Например, при $0 \leqslant a < b$ $\mathsf{P}(\zeta_1 \geqslant k) = (\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^-)^{k-1} \mathscr{A}_b^+ e(1, 0)$, $\mathsf{P}(\zeta_2 \geqslant k) = (\mathscr{A}_a^- \mathscr{A}_b^+)^k e(1, 0)$ и т. д.

Далее можно воспользоваться техникой и результатами [4], где при некоторых дополнительных предположениях получены асимптотические представления величин вида $\mathscr{A}_t^\pm g(1, 0)$ при $|t| \to \infty$.

Пусть выполнены следующие условия:

1. Существует $\mathsf{E}\xi_1 < 0$.
2. Распределение ξ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту.
3. $\lambda_+ = \sup\{\lambda\colon \varphi(\lambda) = \mathsf{E}e^{\lambda\xi_1} < \infty\} > 0, \quad \varphi(\lambda_+) = \lim\limits_{\lambda \uparrow \lambda_+} \varphi(\lambda) \geqslant 1.$

В этих условиях определен единственный положительный корень h уравнения $\varphi(h) = 1$ (в [4] рассматривался случай $h = 1$, что не умаляет общности рассуждений). Пусть, кроме того,

4. $\int\limits_0^\infty y e^{hy} \mathsf{P}(\xi_1 \in dy) < \infty.$

Тогда, как следует из [4], для всякой функции g вида

$$g(\lambda) = \int\limits_b^\infty e^{(\lambda - h)y} dG(y), \quad \operatorname{Var} G < \infty,$$

при $b \to \infty$, $b - a \to \infty$ имеет место соотношение

$$\mathscr{A}_b^+ \mathscr{A}_a^- g(1, 0) = \beta\gamma e^{h(a-b)} g(0)(1 + o(1)),$$

где $\beta = -r_{1+}(0)/hr'_{1+}(h)$, $\gamma = r_{1-}(h)/hr'_{1-}(0)$ (здесь требование $a < 0$ не обязательно). Кроме того,

$$\mathscr{A}_b^+ e(1, 0) = \beta e^{-hb}(1 + o(1))$$

и, как следует из теоремы 1, в наших условиях

$$\mathscr{A}_a^- f(1, 0) = \mathsf{P}(\tau_-(a) < \infty, \tau < \infty) = \mathsf{P}(\tau < \infty) = f(1, 0).$$

Поэтому справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1—4, $a < 0 < b$, $b \to \infty$, *тогда при* $k \geqslant 1$

$$\mathsf{P}(\zeta_1 \geqslant k) = (\beta\gamma)^k e^{h(a-b)k}(1 + o(1)) = \mathsf{P}(\zeta \geqslant 2k)(1 + o(1)),$$

$$\mathsf{P}(\zeta_2 \geqslant k) = \beta^k \gamma^{k-1} e^{h(a-b)(k-1)-hb}(1 + o(1)) = \mathsf{P}(\zeta \geqslant 2k - 1)(1 + o(1)).$$

Случай $0 \leqslant a < b$ исследуется аналогично. Из [4] также следует, что если дополнительно потребовать

$$\mathsf{E}(\max(0, -\xi_1))^{\varepsilon_1} < \infty, \qquad \int_0^\infty y^{\varepsilon_2} e^{hy} \mathsf{P}(\xi_1 \in dy) < \infty$$

при некоторых $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$, то величины $o(1)$ в формулировке теоремы 2 имеют степенной характер убывания. Если, как и в [4], функция $\varphi(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение за пределы полосы $0 \leqslant \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant h$, то при некоторых дополнительных ограничениях на абсолютно непрерывную компоненту распределения ξ_1 величины $o(1)$ здесь будут иметь экспоненциальную скорость убывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
2. *Kemperman J. H. B.* A Wiener — Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // Ann. Math. Statist. 1963. Vol. 34, N 4. P. 1168—1193.
3. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I, II // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 3. С. 475—485; № 4. С. 873—879.
4. *Лотов В. И.* Асимптотические разложения в последовательном критерии отношения правдоподобия // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32, № 1. С. 62—72.
5. *Гнеденко Б. В., Королюк В. С.* О максимальном расхождении двух эмпирических распределений // ДАН СССР. 1951. Т. 80, № 4. С. 525—528.

УДК 519.21

Н. Н. ЛЯШЕНКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ШУМОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ

В настоящей работе рассматриваются некоторые особенности асимптотического поведения траектории случайных процессов, интерпретируемых как элементы пространства $\mathscr{F}$ замкнутых подмножеств полосы $\mathbf{E} = [0, 1] \times \mathbf{R}$, т. е. случайные замкнутые множества (СЗМ).

Прежде чем перейти к точной постановке задачи, кратко опишем предысторию исследования.