

## ПРОГРАММА

курса лекций по теории вероятностей  
для студентов механико-математического факультета НГУ

2019-2020 уч. год

Лектор – профессор В.И. Лотов

### **Глава 1. Вероятностные пространства. Основные формулы**

1. Дискретное пространство элементарных исходов. События, операции над ними. Вероятность и ее свойства. Классическое определение вероятности.
2. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Размещение частиц по ячейкам. Гипергеометрическое распределение.
3. Вероятностное пространство общего вида,  $\sigma$ -алгебра событий. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.
4. Продолжение меры с алгебры на  $\sigma$ -алгебру. Борелевские множества. Континуальные вероятностные пространства, примеры. Геометрические вероятности.
5. Формула для вероятности объединения событий. Независимые события.
6. Схема Бернулли. Полиномиальное распределение.
7. Приближение Пуассона для биномиального распределения.
8. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

### **Глава 2. Распределения**

1. Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы распределений: дискретный, абсолютно непрерывный, сингулярный, смеси.
2. Основные семейства распределений.
3. Независимость случайных величин. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.
4. Преобразования случайных величин, в том числе: а) линейные, б) квантильные; линейные преобразования гауссовских случайных величин. Формула свертки.
5. Распределение суммы независимых случайных величин, имеющих а) гамма распределение; б) нормальное распределение; в) пуассоновское распределение.

### **Глава 3. Числовые характеристики распределений**

1. Интеграл по вероятностной мере.
2. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры.
3. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия случайной величины и ее свойства. Примеры.
4. Коэффициент корреляции и его свойства.
5. Матрица ковариаций, ее свойства. Многомерное нормальное распределение, определение и свойства.
6. Математическое ожидание суммы случайного числа слагаемых. Тождество Вальда. Задача о разорении.
7. Условное математическое ожидание.
8. Задача о наилучшем приближении.

### **Глава 4. Сходимость случайных величин и распределений. Характеристические функции. Предельные теоремы**

1. Сходимость последовательностей случайных величин. Связь между разными типами сходимости.
2. Сходимость математических ожиданий для сходящейся последовательности случайных величин.
3. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Хинчина.
4. Усиленный закон больших чисел.
5. Слабая сходимость распределений, критерий. Связь со сходимостью по вероятности.
6. Характеристические функции, основные свойства, примеры вычисления.
7. Формула обращения.

8. Теорема о непрерывном соответствии.
9. Центральная предельная теорема, примеры применения.
10. Оценка скорости сходимости в теореме Пуассона.

#### **Глава 5. Цепи Маркова**

1. Основные определения. Матрица переходных вероятностей.
2. Возвратность состояний.
3. Эргодическая теорема.

#### **Глава 6. Простейшие случайные процессы**

1. Ветвящиеся процессы.
2. Случайные процессы с непрерывным временем. Процесс Пуассона.
3. Процессы рождения и гибели. Вывод уравнений. Стационарное решение. Примеры систем обслуживания.

#### **Список основной и дополнительной литературы.**

1. В.И. Лотов. Лекции по теории вероятностей. Учебное пособие для студентов механико-математического факультета НГУ.  
<http://www.nsu.ru/mmftvims/programs.html>
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. Издания: второе (М.: Наука, 1986), пятое (М.: Либроком, 2009).
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, Т.1, 1984.
5. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. М.: Наука, 1979.

#### **Примерный план семинарских занятий**

1. Комбинаторика. Классическое определение вероятностей (3 часа)
2. Геометрические вероятности (1 час)
3. Независимые события. Схема Бернулли (2 часа)
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса (2 часа)
5. Распределения случайных величин. Преобразования случайных величин (6 часов)
6. Числовые характеристики случайных величин (5 часов)
7. Коллоквиум (2 часа)
8. Характеристические функции (3 часа)
9. Сходимость последовательностей случайных величин и распределений (2 часа)
10. Предельные теоремы (4 часа)
11. Контрольная работа (2 часа)

#### **Экзаменационные билеты**

##### **Билет 1**

Дискретное пространство элементарных исходов. События, операции над ними. Вероятность и ее свойства. Классическое определение вероятности. Гипергеометрическое распределение. Элементы комбинаторики. Размещение частиц по ячейкам.

##### **Билет 2**

Продолжение меры с алгебры на  $\sigma$ -алгебру. Борелевские множества. Континуальные вероятностные пространства, примеры. Геометрические вероятности. Задача о встрече.

### Билет 3

Вероятностное пространство общего вида,  $\sigma$ -алгебра событий.  
Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

### Билет 4

Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.  
Формула для вероятности объединения событий.

### Билет 5

Независимые события. Схема Бернулли. Полиномиальное распределение.

### Билет 6

Приближение Пуассона в схеме Бернулли. Оценка точности приближения  
(формулировка и идея доказательства).

### Билет 7

Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы  
распределений: дискретный, абсолютно непрерывный, сингулярный, смеси.

### Билет 8

Основные семейства распределений. Формула свертки.

### Билет 9

Независимость случайных величин. Многомерные распределения и плотности,  
их основные свойства, примеры.

### Билет 10

Преобразования случайных величин. Линейные преобразования гауссовских  
случайных величин.

### Билет 11

Распределение суммы независимых случайных величин, имеющих 1) гамма  
распределение; 2) нормальное распределение; 3) пуассоновское распределение

### Билет 12

Интеграл по вероятностной мере (определение).

### Билет 13

Свойства математических ожиданий случайных величин, примеры.

### Билет 14

Моменты. Дисперсия случайной величины и ее свойства. Коэффициент  
корреляции и его свойства.

Билет 15

Матрица ковариаций, ее свойства. Многомерное нормальное распределение, определение и свойства.

Билет 16

Математическое ожидание суммы случайного числа слагаемых. Тождество Вальда.

Билет 17

Условное математическое ожидание, определение и свойства.

Билет 18

Задача о наилучшем приближении.

Билет 19

Критерий сходимости почти наверное. Достаточное условие сходимости почти наверное.

Билет 20

Сходимость по вероятности. Связь с другими типами сходимости

Билет 21

Сходимость математических ожиданий. Теорема о мажорируемой сходимости.

Билет 22

Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Хинчина.

Билет 23

Усиленный закон больших чисел.

Билет 24

Слабая сходимость распределений, критерий (формулировка и идея доказательства). Связь со сходимостью по вероятности.

Билет 25

Характеристические функции, основные свойства, примеры вычисления.

Билет 26

Формула обращения. Теорема о непрерывном соответствии (формулировка и идея доказательства).

Билет 27

Центральная предельная теорема. Эргодическая теорема для цепей Маркова (формулировка и идея доказательства).

Билет 28

Цепи Маркова. Возвратность состояний.

Билет 29

Ветвящиеся процессы. Вероятность вырождения.

Билет 30

Процесс Пуассона

Билет 31

Процессы рождения и гибели. Стационарное распределение.