Задачи по теории вероятностей

1. Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово “математика”?

2. n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?

3. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k-м извлечении.

4. Числа $1, 2, ..., n$ расставлены случайным образом. Предполагая, что различные расположения чисел равновероятны, найти вероятность того, что числа 1, 2, 3 расположены в порядке возрастания, но не обязательно рядом.

5. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекаются 6 карт. Какова вероятность, что:
   а) среди них окажется туз пик;
   б) среди них окажется ровно один туз;
   в) среди них окажутся ровно две бубновые карты;
   г) среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?

6. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

7. В зрительном зале кинотеатра 500 мест. Какова вероятность, что при произвольном размещении в зале 490 зрителей пустыми останутся 10 первых мест второго ряда?

8. Из колоды, насчитывающей 52 карты, наугад извлекают 6 карт. Какова вероятность, что среди них будут представители всех четырех мастей?

9. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность, что а) все выйдут на четвертом этаже; б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже; в) все пятеро выйдут на разных этажах?

10. Из чисел 1, 2, ..., 49 наугад выбираются и фиксируются 6 чисел, считающиеся выигрышными. Некто, желающий выиграть, наугад называет свои 6 чисел из 49. Какова вероятность, что среди названных им чисел окажется не менее трех выигрышных?

11. На шахматную доску из 64 клеток ставятся наудачу две ладьи разного цвета. С какой вероятностью они не будут “бить” друг друга?

12. Группа, состоящая из $2n$ девушек и $2n$ юношей, делится произвольным образом на две равные по количеству подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе окажется поровну юношей и девушек.

13. Группа, состоящая из $3n$ юношей и 3 девушек, делится произвольным образом на три равные по количеству подгруппы. Какова вероятность, что все девушки окажутся в разных подгруппах?

14. n студентов произвольным образом расходятся по k аудиториям. Какова вероятность, что в первой аудитории окажется n_1 студентов, во второй - n_2 студентов, ..., в k-й аудитории - n_k студентов, $n_1 + ... + n_k = n$?

15. В купейный вагон (9 купе по 4 места) семи пассажирам продано семь билетов. Найти вероятность того, что занятыми оказались только два купе.

16. n различных шаров произвольным образом раскладываются по n ящикам. Какова вероятность, что при этом ровно один ящик окажется пустым?

17. В чулане находятся n пар ботинок, все пары разных фасонов. Наугад в темноте выбирают m ботинок. Какова вероятность, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные?

18. Отрезок длины l ломается в произвольной точке. Какова вероятность, что длина наибольшего обломка превосходит $2l/3$?

19. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Обозначим X, Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.

    а) Доказать, что для $0 < u < 1, \quad 0 < v < 1$

    $$\mathbf{P}(X < u,\ Y < v) = \mathbf{P}(X < u)\,\mathbf{P}(Y < v) = uv;$$

    б) найти для $0 < t < 1$

    $$\begin{array}{llll} 1) & \mathbf{P}(|X - Y| < t), & 2) & \mathbf{P}(XY < t), \\ 3) & \mathbf{P}(\max(X, Y) < t), & 4) & \mathbf{P}(\min(X, Y) < t); \end{array}$$

    в) найти $\mathbf{P}(X + Y < t)$ для $0 < t < 2$.

20. На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть X, Y, Z — расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность, что из отрезков с длинами X, Y и Z можно составить треугольник?

21. На отрезок единичной длины произвольным образом брошены две точки, которые делят отрезок на три части. Какова вероятность, что из этих частей можно составить треугольник?

22. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?

23. Пусть событие A не зависит от самого себя. Доказать, что тогда $\mathbf{P}(A)$ равно 0 или 1.

24. Пусть e_1 и e_2 равны соответственно первым двум цифрам после запятой в задаче 22. Доказать, что события $\{e_1 = 3\}$ и $\{e_2 = 5\}$ независимы.

25. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок B — с вероятностью 0.5, стрелок C — с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?

26. События $A_1, ..., A_n$ независимы, известны вероятности $p_i = \mathbf{P}(A_i)$, $i = 1, ..., n$. Найти вероятность того, что:
а) произойдет ровно одно из A_i;
б) не произойдет ни одно из A_i;
в) произойдет хотя бы одно из A_i.

27. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k-м бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?

28. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?

29. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?

30. В шар радиуса R наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

31. Шахматисты A и B решили сыграть между собой матч. Известно, что A выигрывает каждую партию у B с вероятностью $2/3$ и с вероятностью $1/3$ проигрывает. В связи с этим для победы в матче A ему нужно набрать 4 очка, а B для победы достаточно набрать 2 очка (за выигрыш в партии дается очко, за проигрыш - 0 очков, ничьих нет). Равны ли шансы на успех?

32. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех в серии последовательных испытаний Бернулли произойдет на l-м испытании.

33. Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m + l$ успехов, причем l успехов появятся в последних l испытаниях.

34. На отрезок [0,10] наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в [0,2], одна - в [2,3] и две - в [3,10].

35. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три - в нижний сегмент и по одной - в оставшиеся три сегмента.

36. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок B — с вероятностью 0.5, стрелок C — с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишени. Пусть известно, что две пули из трех попали в цель. Какова вероятность, что промахнулся C?

37. Чтобы найти нужную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в фондах эта книга или нет, и если книга есть в фондах, то с вероятностью 0.5 она не занята другим читателем. Какова вероятность того, что студент найдет книгу, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

38. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.

39. Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому, если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n он вытащит "хороший" билет. Какова вероятность вытащить "хороший" билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

40. Некоторое насекомое с вероятностью $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, где $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$, а число λ положительно. Вероятность развития потомка из яйца равна p. Какова вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков? Какова вероятность, что было отложено 20 яиц, если у насекомого развилось 10 потомков?

41. Допустим, что вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, а вероятность поражения цели при k попаданиях равна $1 - q^k$. Какова вероятность того, что цель поражена, если было произведено n выстрелов?

42. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго - 3% и третьего - 1%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 20% телевизоров с первого завода, 30% - со второго и 50% -с третьего?

43. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% - вторую, 21% - третью и 8% - четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй - кровь первой и второй групп, с третьей - кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?

44. Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин - дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина? Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.

45. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: AAAA, BBBB, CCCC, причем делается это с вероятностями 0.3, 0.4 и 0.3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0.6, а вероятность приема каждой переданной буквы за две другие равны 0.2 и 0.2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность AAAA, если на приемном устройстве получено ABCA.

46. Игрок выигрывает очко, если при подбрасывании монеты выпадает герб, и проигрывает очко в противном случае. Построить график функции распределения суммарного выигрыша игрока после двух бросаний монеты.

47. Построить график функции распределения числа испытаний Бернулли, производимых до появления первого успеха включительно.

48. Выразить через функцию распределения случайной величины X вероятности следующих событий: $\mathbf{P}\,(a < X < b)$, $\mathbf{P}\,(a \le X < b)$, $\mathbf{P}\,(a < X \le b)$, $\mathbf{P}\,(a \le X \le b)$.

49. Могут ли функции

а) $f\,(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, б) $f\,(y) = e^{-y}$, в) $f\,(y) = \cos y$, г) $f\,(y) \equiv 1$

быть плотностями распределения?

50. Каким свойством должна обладать функция распределения случайной величины X, чтобы X и $-X$ были одинаково распределены?

51. Плотность распределения случайной величины задается формулой

$$f(y) = \begin{cases} Cy^2, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases} .$$

Найти C.

52. Плотность Г-распределения с параметрами α, n равна

$$f(y) = \frac{\alpha^n}{(n-1)\,!}\, y^{n-1} e^{-\alpha y}$$

при $y > 0$ и $f(y) = 0$ при $y \leq 0$. Найти соответствующую ей функцию распределения.

53. Какова вероятность того, что значение случайной величины окажется целым, если известно, что она имеет нормальное распределение?

54. На отрезок длины l произвольным образом бросаются две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.

55. В круг радиуса R наугад бросается точка. Найти:
а) функцию распределения и плотность распределения расстояния этой точки до центра круга;
б) совместную функцию распределения полярных координат точки.

56. Дискретное совместное распределение случайного вектора (X, Y) задается таблицей:

$X \setminus Y$	1	0	-1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Найти а) одномерные законы распределения X и Y; б) закон распределения $X + Y$; в) закон распределения $Z = Y^2$.

57. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин $Y_1 = |X|$, $Y_2 = X^2$, $Y_3 = \sin X$.

58. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины $Y = \max(0, X)$.

59. Случайная величина X имеет равномерное распределение на [0,1]. Найти функции распределения и плотности случайных величин $Y_1 = -\ln X$, $Y_2 = 2X + 1$.

60. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0, \pi]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \sin X$.

61. Доказать, что случайная величина $F(X)$ имеет равномерное на [0,1] распределение, если $F(y) = \mathbf{P}(X < y)$, функция F непрерывна и строго монотонна.

62. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин $Y_1 = [X]$ (целая часть X), $Y_2 = X - [X]$, $Y_3 = X^2$, $Y_4 = \alpha^{-1} \ln X$.

63. Точка бросается в треугольник с вершинами в точках (0,0), (0,1), (2,0). Найти функции распределения и плотности декартовых координат точки.

64. n точек независимо друг от друга бросаются на отрезок $[0, a]$. Найти функции распределения и плотности распределения случайных величин Y_1 (крайняя слева точка), Y_n (крайняя справа точка), Y_k (k-я по счету слева точка, $k = 1, ..., n$).

65. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbf{P}(X = y_k) = \mathbf{P}(Y = y_k) = p_k, \quad k \geq 1$. Найти $\mathbf{P}(X = Y)$.

66. Построить пример плотности распределения $f_X(y)$ и непрерывной функции $g(y)$ таких, что распределение случайной величины $g(X)$ не вырождено и дискретно.

67. X и Y независимы, причем $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = 1/2$, а $\mathbf{P}(Y < t) = t$, $0 < t < 1$. Найти функции распределения случайных величин $X + Y$ и XY.

68. Используя формулу свертки, найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин, имеющих
а) нормальное распределение с параметрами α, σ^2;
б) равномерное на [0,1] распределение (сравните с задачей 19в).

69. Доказать, что сумма n независимых случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром α, имеет гамма-распределение с параметрами α, n.

70. Доказать, что сумма независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона, вновь распределена по закону Пуассона.

71. Две точки произвольным образом бросаются в круг. Какова вероятность, что они расположатся на одинаковом расстоянии от центра?

72. Доказать, что для любой функции распределения F

$$\lim_{x \to \infty} x \int_x^{\infty} \frac{1}{t}\, dF(t) = 0, \qquad \lim_{x \to +0} x \int_x^{\infty} \frac{1}{t}\, dF(t) = 0.$$

73. Вычислить математическое ожидание случайной величины, имеющей:
а) распределение Бернулли;
б) биномиальное распределение;
в) распределение Пуассона;
г) геометрическое распределение;
д) равномерное распределение на отрезке $[a,\ b]$;
е) показательное распределение с параметром α;
ж) нормальное распределение с параметрами α, σ^2;
з) гамма-распределение.

74. На отрезок длины l произвольным образом бросаются две точки. Найти математическое ожидание расстояния между ними.

75. Точка бросается в треугольник с вершинами в точках (0,0), (0,1), (2,0). Найти математические ожидания ее декартовых координат.

76. n точек независимо друг от друга бросаются на отрезок $[0, a]$. Найти математические ожидания случайных величин Y_1 (крайняя слева точка) и Y_n (крайняя справа точка).

77. Случайные величины X и Y независимы, X имеет равномерное на $[0, 1]$ распределение, а Y — равномерное на $[0, 2]$. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = \max(X, Y)$.

78. Вычислить $\mathbf{E}(1+X)^{-1}$, если случайная величина X имеет 1) распределение Пуассона; 2) биномиальное распределение.

79. Случайная величина X принимает натуральные значения с вероятностями $\mathbf{P}\,(X = k) = Ck^{-10}, \quad k = 1, 2, \ldots$. Как найти C? Какого порядка моменты существуют у случайной величины X?

80. Найти дисперсии случайных величин, имеющих:
   а) распределение Бернулли;
   б) биномиальное распределение;
   в) распределение Пуассона;
   г) геометрическое распределение;
   д) равномерное распределение на отрезке $[a,\, b]$;
   е) показательное распределение с параметром α;
   ж) нормальное распределение с параметрами α, σ^2;
   з) гамма-распределение.

81. Доказать, что

   1) $\mathbf{E}X = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\ (X \geq k)$, если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\ (X = k) = 1$;

   2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\ (X \geq k) \leq \mathbf{E}X \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\ (X \geq k) + 1$, если $\mathbf{P}(X \geq 0) = 1$.

82. Доказать, что $\mathbf{D}X < \mathbf{E}X$, если $\mathbf{P}(0 < X < 1) = 1$.

83. Найти $\mathbf{E}X^{2009}$, если X имеет стандартное нормальное распределение.

84. Пусть X имеет показательное распределение с параметром α, $Y = \min(1,\, X)$. Найти $\mathbf{D}Y$.

85. Вычислить момент k-го порядка для случайной величины, имеющей:
   а) равномерное на $[0, b]$ распределение;
   б) гамма-распределение.

86. Точка бросается в треугольник с вершинами в точках (0,0), (0,1), (2,0). Найти коэффициент корреляции между ее координатами.

87. Дискретное совместное распределение случайного вектора (X, Y) задается таблицей:

$X \setminus Y$	1	0	-1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

   Вычислить коэффициент корреляции $\rho\,(X, Y)$.

88. Точка произвольным образом бросается в круг единичного радиуса. Найти коэффициент корреляции между ее декартовыми координатами.

89. Найти коэффициент корреляции $\rho\ (X, X+Y)$, где X и Y независимы, одинаково распределены и имеют конечный второй момент.

90. Найти коэффициент корреляции $\rho\ (X, X^2)$, где X имеет:
а) стандартное нормальное распределение;
б) показательное распределение.

91. Доказать, что всегда $\mathbf{E}X^4 \geq (\mathbf{E}X)^4$.

92. Пусть $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Доказать, что

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| > 3\sqrt{\mathbf{D}X}) \leq 1/9.$$

93. Пусть $\mathbf{E}e^{hX} < \infty$ при некотором $h > 0$. Доказать, что для любого $t > 0$

$$\mathbf{P}(X \geq t) \leq \mathbf{E}e^{hX}/e^{ht}.$$

94. Доказать, что если случайная величина имеет момент порядка k, то ее функция распределения F удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to\infty} t^k(1 - F(t) + F(-t)) = 0.$$

95. К чему сходится по вероятности при $n \to \infty$ последовательность

$$Y_n = \cos\frac{X_1 + ... + X_n}{n},$$

если $X_1, ..., X_n$ - независимые случайные величины, распределенные равномерно на $[0, \pi]$?

96. Случайные величины $X_1, X_2, ...$ независимы и одинаково распределены по закону Пуассона с параметром λ. К чему сходится по вероятности последовательность

$$\frac{X_1^2 + ... + X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right)^2 \quad ?$$

97. n точек независимо друг от друга бросаются на отрезок $[0, a]$. Пусть Y_n — крайняя справа точка. Доказать, что $Y_n \to a$ по вероятности при $n \to \infty$.

98. Доказать, что если $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$, то $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$.

99. Пусть $F_{X_n} \Rightarrow F_X$. Доказать, что $F_{aX_n} \Rightarrow F_{aX}$, где a — константа.

100. Пусть $F_{X_n} \Rightarrow F_X$, g — непрерывная функция. Доказать, что $F_{g(X_n)} \Rightarrow F_{g(X)}$.

101. Пусть $F_{X_n} \Rightarrow F_X$, $a_n \to a$. Доказать, что $F_{a_nX_n} \Rightarrow F_{aX}$.

102. Пусть $F_{X_n} \Rightarrow F_X$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$. Доказать, что $F_{X_n+Y_n} \Rightarrow F_X$.

103. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ удовлетворяют неравенству $X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n$, причем $X_n \xrightarrow{P} X$ при $n \to \infty$. Доказать, что $X_n \to X$ почти наверное.

104. Доказать, что $X_n \to 0$ почти наверное, если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}X_n^2 < \infty$.

105. Доказать, что $X_n \to X$ почти наверное, если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}|X_n - X|^\alpha < \infty$ при некотором $\alpha > 0$.

106. Пусть g — непрерывная и ограниченная функция. Доказать, что для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(x + \frac{k}{n}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = g(x+\lambda).$$

107. Пусть g — непрерывная функция на отрезке $[0,1]$. Доказать, что при $n \to \infty$

$$\sum_{k=o}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \to g(x)$$

равномерно по $x \in [0,1]$.

108. Найти характеристическую функцию случайной величины, имеющей:
а) распределение Бернулли;
б) биномиальное распределение;
в) распределение Пуассона;
г) геометрическое распределение;
д) равномерное распределение на отрезке $[-a,\, a]$;
е) показательное распределение с параметром α;
ж) нормальное распределение с параметрами α, σ^2;
з) гамма-распределение;
и) распределение Коши.

109. Доказать, что характеристическая функция вещественна тогда и только тогда, когда соответствующее ей распределение симметрично.

110. Объяснить, почему следующие функции не могут быть характеристическими:
а) $\sin t$; б) $1 + \sin t$; в) $\cos t^2$; г) $e^{-i|t|}$.

111. Каким распределениям соответствуют характеристические функции:
а) $\cos t$; б) $\cos^2 t$; в) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt)$, где $a_k \geq 0$ и $\sum a_k = 1$?

112. Каким должно быть распределение случайной величины, чтобы при некотором $t_0 > 0$ выполнялось:
а) $\varphi(t_0) = 1$; б) $|\varphi(t_0)| = 1$?
Здесь φ — характеристическая функция.

113. Доказать, что любая характеристическая функция φ удовлетворяет неравенствам
а) $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \sqrt{2(1 - Re\varphi(h))}$;
б) $1 - Re\varphi(2t) \leq 4(1 - Re\varphi(t))$.

114. Случайные величины $X_1,\, X_2,\, \ldots$ независимы и одинаково распределены, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, и пусть $\varphi(t) = \mathbf{E}\exp\{itX_1\}$. Найти характеристическую функцию случайной величины S_ν, где случайная величина ν не зависит от введенной последовательности $\{X_n\}$, $\mathbf{P}(\nu = k) = p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

115. Пусть φ — характеристическая функция. Доказать, что в этом случае характеристическими функциями будут также:
а) $e^{\varphi - 1}$; б) $\frac{\varphi}{2-\varphi}$; в) φ^2; г) $|\varphi|^2$.

116. Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7.2 \cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 5 млн. карточек. Какова вероятность, что никто не угадал все 6 номеров? Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0.9 хотя бы один угадал 6 номеров?

117. Некоторая машина состоит из 10 тыс. деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью p_i, причем для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0.0003$, для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0.0002$, и для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0.0001$. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы две детали. Найти вероятность того, что машина не будет работать.

118. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее 100 исправных?

119. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

120. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0.006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 1200 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного родственникам выплачивается 100000 рублей. Какова вероятность того, что:
а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;
б) его доход превысит 6000000 рублей?

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0.95 доход был не менее 4000000 рублей?

121. Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0.5 сумма выпавших очков превысила 100?

122. Для определения вероятности p изделия быть бракованным пользуются приближением $p \approx S_n/n$, где S_n — число бракованных изделий в партии из n изделий. Насколько большим должно быть число n, чтобы с вероятностью не менее 0.95 величина S_n/n отличалась от p менее, чем на 0.001?

123. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0.2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя
а) не менее 20 конденсаторов;
б) менее 28 конденсаторов.

124. 1000 раз бросается игральная кость. Найти пределы, в которых с вероятностью, большей 0.95, будет лежать сумма выпавших очков.

125. Пусть $X_1, X_2, ...$ - независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{D}X_1 < \infty$. Известно, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{n}} \geq \ 1\right) \to \frac{1}{3}$$

при $n \to \infty$. Найти $\mathbf{D}X_1$.

126. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0.2, 4 с вероятностью 0.4, 3 с вероятностью 0.3 и 2 с вероятностью 0.1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.95 лежит средний балл.

127. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

Урожай в кг	0	1	1.5	2	2.5
Вероятность	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

На участке высажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0.95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0.975 урожай был не менее тонны?

128. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

129. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Доказать, что для любого t предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < t)$$

равен либо 0, либо 1, либо 1/2. Найти условия, при которых имеет место каждая из указанных ситуаций.

130. Доказать, что при $n \to \infty$

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}.$$

131. Пусть Y_n распределено по закону Пуассона с параметром n при каждом $n \geq 1$. Доказать, что при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} < t\right) \to \Phi_{0,1}(t).$$

132. Пусть Y_n имеет Γ распределение с параметрами $(\alpha,\, n\lambda)$ при каждом $n \geq 1$. Доказать, что при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\alpha Y_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} < t\right) \to \Phi_{0,1}(t).$$

133. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены и для них $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{D}X_i = 1$. Доказать, что распределение случайной величины

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots + X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}$$

при $n \to \infty$ слабо сходится к стандартному нормальному.