О точной асимптотике стационарного распределения времени пребывания в тандеме систем обслуживания для одного класса распределений с тонкими хвостами*

С.Г. Фосс

Институт математики, Новосибирск и

Университет Хериот-Ватта, Эдинбург

7 сентября 2007 г.

Изучается асимптотика распределения стационарного времени Z пребывания “типичного вызова” в тандеме одноканальных систем обслуживания. Показывается, что в некотором “промежуточном” случае, когда распределения времен обслуживания имеют тонкие хвосты, Z может принимать большие значения, как правило, за счет большого времени обслуживания какого-то одного вызова на одном из приборов. Используемые при этом рассуждения позволяют заодно получить и элементарное доказательство логарифмической асимптотики во всем диапазоне распределений с тонкими хвостами.

Ключевые слова: тандем систем обслуживания, время пребывания, большие уклонения, условие Крамера, точная и логарифмическая асимптотики, класс $\mathcal{S}_\gamma$.

1 Введение и основные результаты

Рассмотрим открытую сеть обслуживания, представляющую собой две последовательно соединенные одноканальные системы $GI/GI/1 \to /GI/1$, в каждой из которых вызовы обслуживаются в порядке поступления. Вызовы поступают в очередь первой системы, после обслуживания в которой переходят во вторую, и после обслуживания во второй системе покидают сеть.

Рассмотрим три независимые в совокупности последовательности неотрицательных случайных величин $\{\tau_n\}$, $\{\sigma_n^{(1)}\}$ и $\{\sigma_n^{(2)}\}$, каждая из которых состоит из независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин. При каждом n вызов с номером n поступает извне в первую систему через промежуток времени τ_n после предыдущего вызова (со средним $a = \mathbf{E}\tau_1$). Этот вызов обслуживается в первой системе в течение времени $\sigma_n^{(1)}$ (с функцией распределения $G^{(1)}$ и положительным средним $b^{(1)} = \mathbf{E}\sigma_1^{(1)}$) и затем во второй системе в течение времени $\sigma_n^{(2)}$ (с функцией распределения $G^{(2)}$ и положительным средним $b^{(2)} = \mathbf{E}\sigma_1^{(2)}$). Предполагается, что система работает стабильно, т.е. $\max\left(b^{(1)}, b^{(2)}\right) < a$. Хорошо известно (см., напр., [1]), что при этом условии существует единственное стационарное (предельное) распределение времени Z пребывания вызова в сети (т.е. времени с момента поступления вызова в

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта EPSRC 0033717/1

очередь первой системы до момента окончания его обслуживания во второй), и при любом начальном условии распределение времени Z_n пребывания в сети n-го вызова с ростом n сходится к предельному в метрике полной вариации.

Известно (см., напр., [2]) следующее представление для стационарного времени пребывания

$$Z = \sup_{0\le n\le m<\infty}\left(\sum_{-m}^{-n}\sigma_j^{(1)} + \sum_{-n}^{0}\sigma_j^{(2)} - \sum_{-m}^{-1}\tau_j\right). \qquad (1)$$

Можно дать такую интерпретацию этой формулы. Предположим, что сеть работает бесконечно долго, начиная с времени $-\infty$. Тогда $Z = Z_0$ есть время пребывания вызова с номером 0, поступающего в сеть в момент $t = 0$. Отметим, что Z является монотонной функцией от всех участвующих в формуле (1) величин: она монотонно растет с ростом любого из σ и с убыванием любого из τ.

В настоящей работе изучается асимптотика вероятности $\mathbf{P}(Z > x)$ при стремлении x к бесконечности. Рассматривается случай, когда распределения времен обслуживания в обеих системах имеют тонкие хвосты, т.е.

$$\varphi_{\sigma_1^{(i)}}(\lambda) < \infty \qquad (2)$$

при $i = 1,2$ и при некотором положительном λ. Мы используем стандартное обозначение: $\varphi_X(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X}$ есть экспоненциальный момент случайной величины X в точке λ. Краткости ради будем в дальнейшем писать $\varphi_{(i)}(\lambda) = \varphi_{\sigma_1^{(i)}}(\lambda)$ при $i = 1,2$ и $\varphi_\tau(\lambda) = \varphi_{\tau_1}(\lambda)$. Положим при $i = 1,2$

$$\gamma^{(i)} = \sup\{\lambda \ :\ \varphi_{(i)}(\lambda)\varphi_\tau(-\lambda) \le 1\} \in (0,\infty)$$

и пусть

$$\gamma = \min\left(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\right).$$

Условимся, что для любых двух функций f_1 и f_2, принимающих отличные от нуля значения при всех достаточно больших x, и постоянной $d \ge 0$ запись $f_1(x) \sim df_2(x)$ означает, что $f_1(x)/f_2(x) \to d$ при $x \to \infty$. В частности, при $d = 0$ эта запись имеет смысл: $f_1(x) = o(f_2(x))$.

Имеет место (см., напр., [3, 4]) следующая логарифмическая ("грубая") асимптотика:

Теорема 1. *При выполнении* (2)

$$-\ln \mathbf{P}(Z > x) \sim \gamma x.$$

Известные нам доказательства теоремы 1 (см., напр., [3, 4]) используют технику теории больших уклонений.

Наш основной результат (теорема 2) состоит в нахождении *точной* асимптотики больших уклонений при дополнительном предположении

$$R \equiv \max\left(\varphi_{(1)}(\gamma), \varphi_{(2)}(\gamma)\right)\varphi_\tau(-\gamma) < 1. \qquad (3)$$

В частности, из (3) следует конечность $\mathbf{E}e^{\gamma Z}$. Действительно,

$$\mathbf{E}e^{\gamma Z} \le \sum_{0\le n\le m}\mathbf{E}\exp\left(\gamma\left(\sum_{-m}^{-n}\sigma_j^{(1)} + \sum_{-n}^{0}\sigma_j^{(2)} - \sum_{-m}^{-1}\tau_j\right)\right) \le (1-R)^{-2}\varphi_\tau^{-2}(-\gamma) < \infty. \qquad (4)$$

Для формулировки теоремы 2 нам потребуется ряд дополнительных определений и обозначений.

В дальнейшем одним и тем же символом F мы будем обозначать как вероятностное распределение на вещественной прямой, так и его функцию распределения. Пусть $\overline{F}$ – хвост распределения F, т.е. $\overline{F}(x) = 1-F(x)$, и F^{*n} — n-кратная свертка распределения F с самим собой. Функция распределения F принадлежит классу $\mathcal{L}_\beta$, $\beta \geq 0$, если

$$\overline{F}(x) > 0 \text{ при всех } x \quad \text{и} \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = e^{\beta y} \quad \text{для любого фиксированного } y. \tag{5}$$

В силу монотонности $\overline{F}$, сходимость в (5) является с необходимостью равномерной по y на любом компакте. Поэтому можно определить функцию $h(x) \uparrow \infty$, $h(x) = o(x)$ так, что

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{|y|\leq h(x)} \left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} e^{\beta y} - 1 \right| = 0. \tag{6}$$

Отметим, что если h_1 и h_2 – две функции, при которых (6) имеет место, то и функция $h_3(x) = h_1(x) + h_2(x - h_1(x))$ такая же.

Функция распределения F случайной величины X принадлежит классу $\mathcal{S}_\beta$, $\beta \geq 0$, если $F \in \mathcal{L}_\beta$, $\varphi_X(\beta) < \infty$ и

$$\overline{F^{*2}}(x) = \mathbf{P}(X_1 + X_2 > x) \sim 2\varphi_X(\beta)\overline{F}(x) \qquad \text{при } x \to \infty, \tag{7}$$

где X_1 и X_2 – две независимые копии случайной величины X. При этом с необходимостью

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 + X_2 > x) &\sim \mathbf{P}(X_1 + X_2 > x, X_1 \leq h(x)) + \mathbf{P}(X_1 + X_2 > x, X_2 \leq h(x)) \\ &\sim \mathbf{P}(X_1 + X_2 > x, X_1 \geq x - h(x)) + \mathbf{P}(X_1 + X_2 > x, X_2 \geq x - h(x)), \end{aligned}$$

где $h(x)$ – любая функция, удовлетворяющая (6) (см., напр., [5]).

Типичный пример распределения $F \in \mathcal{S}_\beta$ при $\beta > 0$ – это распределение с хвостом $\overline{F}(x) = Cx^{-\alpha}e^{-\beta x}$ при некоторых $\alpha > 1$, $C \in (0, 1]$ и всех $x \geq 1$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (3)*. Предположим, что*

$$\overline{G^{(i)}}(x) \sim c^{(i)}\overline{F}(x), \quad i = 1, 2 \tag{8}$$

при некоторых функции $F \in \mathcal{S}_\gamma$ и постоянных $c^{(1)} \geq 0$ и $c^{(2)} \geq 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(Z > x) \sim \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=-\infty}^{0} \mathbf{P}(Z > x, \sigma_j^{(i)} > x - h(x)) \sim K\overline{F}(x), \tag{9}$$

где $h(x)$ –любая функция, удовлетворяющая условиям (6) *и постоянная K определяется ниже в формуле (25).*

Замечание 1. Так как явный вид постоянной K громоздок и зависит от характеристик, которые вычислить невозможно, то разумно привести полезные верхнюю и нижнюю оценки для нее. При $i = 1, 2$ положим $R_i = \varphi_{(i)}(\gamma)\varphi_\tau(-\gamma)$ и $R = \max(R_1, R_2)$. Тогда

$$\frac{c^{(1)}\varphi_{(2)}(\gamma)}{1-R} + \frac{c^{(2)}\varphi_{(1)}(\gamma)}{1-R_2} \leq K \leq \frac{1}{(1-R_1)(1-R_2)} \left(\frac{c^{(1)}\varphi_{(2)}(\gamma)}{1-R_1} + \frac{c^{(2)}\varphi_{(1)}(\gamma)}{1-R_2} \right). \tag{10}$$

Замечание 2. В формулировке теоремы 2 коэффициенты $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$ могут быть как положительными, так и нулевыми. Если оба коэффициента положительны, то с необходимостью $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = \gamma$ и, как следует из свойства 1 из Приложения, оба распределения $G^{(i)}$,$i = 1, 2$ должны принадлежать классу $\mathcal{S}_\gamma$. Если лишь один из коэффициентов положителен – скажем, если $c^{(1)} > 0$ и $c^{(2)} = 0$, то распределение $G^{(1)}$ с необходимостью принадлежит классу $\mathcal{S}_\gamma$ и $\gamma^{(2)} \geq \gamma^{(1)} = \gamma$. Если же $c^{(1)} = c^{(2)} = 0$, то, как следует из (10), и $K = 0$.

Замечание 3. Если воспользоваться свойствами монотонности (см. комментарии после формулы 1), то можно получить следующие "односторонние" аналоги утверждения теоремы 2:
Если в формулировке теоремы 2 заменить условие (8) на $\limsup_{x\to\infty} \overline{G^{(i)}}(x)/\overline{F}(x) \leq c^{(i)}$, $i = 1, 2$ (или же на $\liminf_{x\to\infty} \overline{G^{(i)}}(x)/\overline{F}(x) \geq c^{(i)}$, $i = 1, 2$), то будет выполнено неравенство $\limsup_{x\to\infty} \mathbf{P}(Z > x)/\overline{F}(x) \leq K$ (или, соответственно, $\liminf_{x\to\infty} \mathbf{P}(Z > x)/\overline{F}(x) \geq K$) при том же K.

Замечание 4. Естественный аналог результата теоремы 2 справедлив для тандемов систем обслуживания с произвольным конечным числом приборов и, более общо, для древообразных сетей обслуживания. Однако явный вид постоянной K и даже ее оценки становятся все менее и менее обозримыми с ростом числа приборов. Поэтому мы и ограничились случаем тандема двух систем.

Замечание 5. Применяемый на первом шаге доказательства теоремы 2 подход (т.е. построение верхней и нижней оценки) позволяет получить также простое доказательство теоремы 1, не использующее технику теории больших уклонений (см. п. 2.2).

Замечание 6. Предлагаемый метод доказательства основан на идеях, развитых в [6] и примененных там же для получения асимптотики распределения $\mathbf{P}(Z > x)$ для тандемов в случае, когда времена обслуживания имеют субэкспоненциальные распределения. В работе [6] находится также асимптотика для стационарного времени ожидания во второй системе тандема двух систем обслуживания для субэкспоненциальных распределений. Подобную асимптотику можно найти и в нашем случае, но с использованием существенно более громоздких формул.

Замечание 7. Наряду с асимптотикой вероятности $\mathbf{P}(Z > x)$ при $x \to \infty$, можно также, используя результаты работы [5], находить (равномерные по k) асимптотики для достационарных вероятностей $\mathbf{P}(Z_k > x)$, где

$$Z_k = \sup_{0\leq n\leq m\leq k} \left(\sum_{-m}^{-n} \sigma_j^{(1)} + \sum_{-n}^{0} \sigma_j^{(2)} - \sum_{-m}^{-1} \tau_j \right).$$

В следующем параграфе приведено доказательство теоремы 2. Полезная вспомогательная информация, простое доказательство теоремы 1 и некоторые комментарии содержатся в приложении.

2 Доказательства

2.1 Верхняя и нижняя оценки для стационарного времени пребывания вызова в системе

Нижняя оценка. Положим при $i = 1, 2$

$$Z^{(i)} = \sigma_0^{(i)} + \max_{n\geq 0} \sum_{-n}^{-1} \left(\sigma_j^{(i)} - \tau_j\right) \tag{11}$$

(где $\sum_0^{-1} = 0$). Тогда $Z^{(1)} = \sigma_0^{(1)} + W^{(1)}$ при $W^{(1)} = \max_{n\geq 0} \sum_{-n}^{-1} \left(\sigma_j^{(1)} - \tau_j\right)$. Здесь $Z^{(1)}$ (соответственно, $W^{(1)}$) – стационарное время пребывания (соответственно, ожидания) в первой системе. Нам удобнее использовать несколько иную интерпретацию: $Z^{(1)}$ (соответственно, $W^{(1)}$) есть стационарное время пребывания (соответственно, ожидания) во вспомогательном тандеме систем обслуживания, в котором все времена обслуживания во второй системе равны нулю. Аналогично, $Z^{(2)} = \sigma_0^{(2)} + W^{(2)}$ при $W^{(2)} = \max_{n\geq 0} \sum_{-n}^{-1} \left(\sigma_j^{(2)} - \tau_j\right)$, и $Z^{(2)}$ (соответственно, $W^{(2)}$) есть стационарное время пребывания (соответственно, ожидания) во вспомогательном тандеме систем обслуживания, в котором времена обслуживания в первой системе заменены нулями. Из монотонности Z по всем переменным в (1) следует оценка

$$Z \geq \max\left(Z^{(1)}, Z^{(2)}\right) \quad \text{п.н.} \tag{12}$$

и, в частности,

$$\mathbf{P}(Z > x) \geq \max(\mathbf{P}(Z^{(1)} > x), \mathbf{P}(Z^{(2)} > x)). \tag{13}$$

Верхняя оценка. Пусть $L \geq 1$ – целое число. Введем вспомогательную одноканальную систему обслуживания с н.о.р. интервалами между моментами прихода вызовов $\widetilde{\tau}_n$ и не зависящими от них н.о.р. временами обслуживания $\widetilde{\sigma}_n$, где

$$\widetilde{\tau}_n = \sum_1^L \tau_{(n-1)L+i} \quad \text{и} \quad \widetilde{\sigma}_n = \max_{1\leq j\leq L} \left(\sum_{i=1}^j \sigma_{(n-1)L+i}^{(1)} + \sum_{i=j}^L \sigma_{(n-1)L+i}^{(2)} \right).$$

Здесь величины $\widetilde{\sigma}$ допускают такую интерпретацию: допустим, что вызовы с номерами $1, \ldots, L$ поступают одновременно в момент времени 0 в пустую систему; тогда $\widetilde{\sigma}_1$ есть время окончания обслуживания последнего из них во второй системе. Нетрудно видеть (см., напр., [7]), что $\mathbf{E}\widetilde{\sigma}_1/L \to \max(b^{(1)}, b^{(2)})$ при $L \to \infty$. Поэтому $\mathbf{E}\widetilde{\sigma}_1 < \mathbf{E}\widetilde{\tau}_1$ при всех достаточно больших L. Зафиксируем такое L и обозначим через

$$\widetilde{W} = \max_{n\geq 0} \sum_{-n}^{-1} (\widetilde{\sigma}_n - \widetilde{\tau}_n) < \infty \quad \text{п.н.}$$

(соответственно, $\widetilde{Z} = \widetilde{\sigma}_0 + \widetilde{W}$) стационарное время ожидания (соответственно, пребывания) вызова с номером 0 в этой системе, которые являются п.н. конечными случайными величинами. Из свойств монотонности Z следует (см., напр., [7, 6]), что

$$Z \leq \widetilde{Z} \quad \text{п.н.} \tag{14}$$

2.2 Доказательство теоремы 2.

Мы докажем теорему только в случае $c^{(1)} + c^{(2)} > 0$, т.к. при этом утверждение в случае $c^{(1)} = c^{(2)} = 0$ будет следовать из естественных свойств монотонности.

Из теоремы 1 работы [5] и неравенства (13) следует, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(Z > x)}{\overline{F}(x)} \geq \max(c^{(1)}, c^{(2)}). \tag{15}$$

Далее, мы могли бы, с использованием (14), получить верхнюю оценку

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(Z > x)}{\overline{F}(x)} \leq K_0, \tag{16}$$

при некоторой постоянной K_0. Однако нам будет нужен явный вид событий, приводящих к большим значениям Z, для чего удобнее использовать более грубую верхнюю оценку, чем (14). А именно, возьмем произвольно число $T > 0$ и определим случайные величины $\widehat{\sigma}_n$ равенствами

$$\widehat{\sigma}_n = \Sigma_n \mathbf{I}(\Sigma_n > T) + \widetilde{\sigma}_n \mathbf{I}(\Sigma_n \leq T),$$

где

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{L} \left(\sigma^{(1)}_{(n-1)L+i} + \sigma^{(2)}_{(n-1)L+i} \right) \geq \widetilde{\sigma}_n$$

и $\mathbf{I}$ есть индикаторная функция. Ясно, что $\widehat{\sigma}_n \geq \widetilde{\sigma}_n$ п.н. Кроме того, в силу свойств 1 и 2 (см. Приложение), функция распределения случайных величин $\widehat{\sigma}_n$ принадлежит классу $\mathcal{S}_\gamma$ и $\mathbf{P}(\widehat{\sigma}_1 > x) \sim C\overline{F}(x)$ при некотором положительном C. Действительно, распределение Σ_n принадлежит классу $\mathcal{S}_\gamma$ по свойству 2. И так как $\widehat{\sigma}_n > x$ тогда и только тогда, когда $\Sigma_n > x$ при любом $x \geq T$, то $\mathbf{P}(\widehat{\sigma}_n > x) \sim \mathbf{P}(\Sigma_n > x)$ при $x \to \infty$ и, значит, по свойству 1, распределение $\widehat{\sigma}_n$ тоже из класса $\mathcal{S}_\gamma$.

Мы знаем, что $\mathbf{E}\widetilde{\sigma} < \mathbf{E}\widetilde{\tau}_1 = L\mathbf{E}\tau_1$ при больших значениях L. Также, в силу (3) и (28), $\widetilde{\varphi}(\gamma) = \mathbf{E}e^{\gamma\widetilde{\sigma}_1} < 1/\mathbf{E}e^{-\gamma\widetilde{\tau}_1}$ при всех достаточно больших L. Выберем одно такое L. Далее, $\mathbf{E}\widehat{\sigma} \to \mathbf{E}\widetilde{\sigma}$ и $\mathbf{E}e^{\gamma\widehat{\sigma}_1} \to \mathbf{E}e^{\gamma\widetilde{\sigma}_1}$ при $T \to \infty$. Поэтому мы можем выбрать T настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\mathbf{E}\widehat{\sigma}_1 < L\mathbf{E}\tau_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}e^{\gamma\widehat{\sigma}_1} < 1/\mathbf{E}e^{-\gamma\widetilde{\tau}_1}. \tag{17}$$

При этом одноканальная система обслуживания с н.о.р. интервалами между моментами прихода вызовов $\widetilde{\tau}_n$ (см. п. 2.1) и временами обслуживания $\widehat{\sigma}_n$ является стабильной. Обозначим через $\widehat{W}$ стационарное время ожидания в этой системе,

$$\widehat{W} = \max_{n\geq 0} \sum_{-n}^{-1} (\widehat{\sigma}_n - \widetilde{\tau}_n) < \infty \quad \text{п.н.}$$

Это стационарное время ожидания имеет то же распределение, что и супремум случайного блуждания с приращениями $\widehat{\sigma}_n - \widetilde{\tau}_n$. Значит, по свойству 4 из Приложения и в силу (17), $\mathbf{P}(\widehat{W} > x) \sim C\overline{F}(x)$ при некотором $C > 0$ и, по свойству 2, распределение случайной величины $\widehat{W}$ принадлежит классу $\mathcal{S}_\gamma$. В силу свойств монотонности,

$$Z \leq \widehat{Z} \equiv \widehat{W} + \sigma_0^{(1)} + \sigma_0^{(2)}, \tag{18}$$

где слагаемые в правой части независимы в совокупности и хвост распределения каждого из них асимптотически эквивалентен хвосту $\overline{F}(x)$, умноженному на некоторую неотрицательную постоянную (причем хотя бы одна из этих постоянных строго положительна). По свойству 2 из Приложения, распределение случайной величины $\widehat{Z}$ также принадлежит классу $\mathcal{S}_\gamma$ и

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\widehat{Z}>x) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2}\{\widehat{Z}>x,\sigma_0^{(i)}>x-h_1(x)\}\bigcup\{\widehat{Z}>x,\widehat{W}>x-h_1(x)\}\right)+o(\overline{F}(x))\\ &= \sum_{i=1}^{2}\mathbf{P}(\widehat{Z}>x,\sigma_0^{(i)}>x-h_1(x))+\mathbf{P}(\widehat{Z}>x,\widehat{W}>x-h_1(x))+o(\overline{F}(x))\end{aligned}$$

для любой функции h_1, удовлетворяющей условию (6). Отметим, что если h_1 и h – две такие функции, то

$$\mathbf{P}(\widehat{Z}>x,\sigma_0^{(i)}>x-h_1(x))=\mathbf{P}(\widehat{Z}>x,\sigma_0^{(i)}>x-h(x))+o(\overline{F}(x)). \tag{19}$$

Воспользуемся следующими простыми соотношениями. Пусть даны три события A,B и C. Если

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A\bigcap B)+v,$$

то

$$\mathbf{P}(A\bigcap C)=\mathbf{P}(A\bigcap C\bigcap B)+\widehat{v}, \tag{20}$$

где $0\le\widehat{v}\le v$. В частности, если $C\subseteq A$, то последнее равенство трансформируется в

$$\mathbf{P}(C)=\mathbf{P}(C\bigcap B)+\widehat{v}.$$

Применяя эти рассуждения к событиям $A=\{\widehat{Z}>x\}$ и $C=\{Z>x\}$, приходим к равенству

$$\mathbf{P}(Z>x)=\sum_{i=1}^{2}\mathbf{P}(Z>x,\sigma_0^{(i)}\ge x-h_1(x))+\mathbf{P}(Z>x,\widehat{W}>x-h_1(x))+o(\overline{F}(x)). \tag{21}$$

По свойству 4 из Приложения, при любом $\varepsilon>0$ найдется достаточно большое N такое, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\widehat{W}>x-h_1(x)) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{N}\{\widehat{W}>x-h_1(x),\widehat{\sigma}_{-j}-\tau_{-j}>x-h_1(x)-h_2(x-h_1(x))\}\right)+g_1(x)\\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{N}\{\widehat{W}>x-h_1(x),\widehat{\sigma}_{-j}>x-h_1(x)-h_2(x-h_1(x))\}\right)+g_2(x)\\ &= \sum_{j=1}^{N}\mathbf{P}(\widehat{W}>x-h_1(x),\widehat{\sigma}_{-j}>x-h_1(x)-h_2(x-h_1(x)))+g_3(x),\end{aligned}$$

где h_2 – любая функция, удовлетворяющая (6), и $0\le g_i(x)\le\varepsilon\overline{F}(x)+o(\overline{F}(x))$ при $i=1,2,3$. Последнее неравенство означает, что $\limsup_{x\to\infty}\frac{g_i(x)}{\overline{F}(x)}\le\varepsilon$.

Используя опять (20), теперь при $A=\{\widehat{W}>x-h_1(x)\}$ и $C=\{Z>x\}$, получаем:

$$\mathbf{P}(Z>x,\widehat{W}>x-h_1(x))=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{P}(Z>x,\widehat{W}>x-h_1(x)),\widehat{\sigma}_{-j}>x-h_1(x)-h_2(x-h_1(x)))+g_4(x),$$

где $0 \le g_4(x) \le \varepsilon \overline{F}(x) + o(\overline{F}(x))$.

Выбирая h_2 специальным образом, мы можем упростить правую часть последнего равенства, исключив оттуда неравенство $\{\widehat{W} > x - h_1(x)\}$. Действительно, положим

$$P(x) = \mathbf{P}(Z > x, \widehat{W} \le x - h_1(x)), \widehat{\sigma}_{-j} > x - h_1(x) - h_2(x - h_1(x)))$$

и отметим, что

$$\begin{aligned} P(x) &\le \mathbf{P}(\widehat{Z} > x, \widehat{W} \le x - h_1(x)), \widehat{\sigma}_{-j} > x - h_1(x) - h_2(x - h_1(x))) \\ &\le \mathbf{P}(\sigma_0^{(1)} + \sigma_0^{(2)} > h_1(x), \widehat{\sigma}_{-j} > x - h_1(x) - h_2(x - h_1(x))) \\ &= (1 + o(1))(c^{(1)} + c^{(2)})\overline{F}(h_1(x)) \cdot C\overline{F}(x - h_1(x) - h_2(x - h_1(x))) \\ &= (1 + o(1))\widehat{C}e^{\gamma(h_1(x) + h_2(x - h_1(x)))}\overline{F}(h_1(x))\overline{F}(x), \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из замечания после формулы (6) и $\widehat{C} = C(c^{(1)} + c^{(2)})$. Так как $\int_0^\infty e^{\gamma t} dF(t) < \infty$, то $e^{\gamma t}\overline{F}(t) \to 0$ с ростом t и, значит, $\overline{F}(h_1(x))e^{\gamma h_1(x)} \to 0$ с ростом x. Поэтому мы можем выбрать h_2 настолько медленно растущей к бесконечности, что $\overline{F}(h_1(x))e^{\gamma(h_1(x) + h_2(x - h_1(x)))}$ тоже стремится к нулю. При этом $P(x) = o(\overline{F}(x))$ и, значит,

$$\mathbf{P}(Z > x, \widehat{W} > x - h_1(x)) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}(Z > x, \widehat{\sigma}_{-j} > x - h_3(x)) + g_5(x),$$

где $0 \le g_5(x) \le \varepsilon \overline{F}(x) + o(\overline{F}(x))$ и функция $h_3(x) = h_1(x) + h_2(x - h_1(x))$ удовлетворяет (6).

При всех достаточно больших x события $\{\widehat{\sigma}_{-j} > x - h_3(x))\}$ и $\{\Sigma_{-j} > x - h_3(x))\}$ происходят или не происходят одновременно. Поэтому $\mathbf{P}(Z > x, \widehat{\sigma}_{-j} > x - h_3(x)) = \mathbf{P}(Z > x, \Sigma_{-j} > x - h_3(x))$. Воспользовавшись свойством 2 из Приложения, примененным к случайным величинам Σ_{-j}, получаем равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z > x, \widehat{\sigma}_{-j} > x - h_3(x)) &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{l=(j-1)L+1}^{jL} \mathbf{P}(Z > x, \widehat{\sigma}_{-j} > x - h_3(x), \sigma_{-l}^{(i)} > x - h_3(x) - h_4(x - h_3(x))) \\ &+ o(\overline{F}(x)) \end{aligned}$$

где h_4 – любая функция, удовлетворяюшая (6). Накладывая на функцию h_4 ограничение, аналогичное наложенному ранее на функцию h_2, мы можем исключить неравенство $\{\widehat{\sigma}_{-j} > x - h_3(x)\}$ из правой части последнего соотношения. Полагая $h(x) = h_3(x) + h_4(x - h_3(x))$, приходим к равенству

$$\mathbf{P}(Z > x, \widehat{\sigma}_{-j} > x - h_3(x)) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{l=(j-1)L+1}^{jL} \mathbf{P}(Z > x, \sigma_{-l}^{(i)} > x - h(x)) + o(\overline{F}(x)).$$

Подставляя полученные соотношения в (21) и воспользовавшись (19), получаем окончательно:

$$\mathbf{P}(Z > x) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{NL} \mathbf{P}(Z > x, \sigma_{-j}^{(i)} > x - h(x)) + g(x), \tag{22}$$

где $0 \le g(x) \le \varepsilon \overline{F}(x) + o(\overline{F}(x))$.

Изучим теперь асимптотику каждого слагаемого двойной суммы в правой части (22). Положим

$$W_j^{(1)} = \max\left(0, \sup_{n\ge 1}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^{(1)}_{-j-i} - \tau_{-j-i})\right)$$

и отметим, что распределение $W_j^{(1)}$ не зависит от j. Далее, обозначим

$$Y_j^{(1)} = \max_{0\le k\le -j}\left(\sum_{i=-j+1}^{-j+k}\sigma_i^{(1)} + \sum_{i=-j+k}^{0}\sigma_i^{(2)}\right),$$

и

$$V_j^{(1)} = \max\left(\sup_{-j<n\le m<\infty}\left(\sum_{-m}^{-n}\sigma_i^{(1)} + \sum_{-n}^{0}\sigma_i^{(2)} - \sum_{-m}^{-1}\tau_i\right), \max_{0\le n\le m<-j}\left(\sum_{-m}^{-n}\sigma_i^{(1)} + \sum_{-n}^{0}\sigma_i^{(2)} - \sum_{-m}^{-1}\tau_i\right)\right).$$

Тогда при каждом $j\ge 0$

$$Z = \max\left(V_j^{(1)}, W_j^{(1)} + \sigma_{-j}^{(1)} + Y_j^{(1)} - \sum_{i=-j}^{-1}\tau_i\right),$$

где случайные величины $(W_j^{(1)}, Y_j^{(1)}, V_j^{(1)}, \sum_{-j}^{-1}\tau_i)$ не зависят в совокупности от $\sigma_{-j}^{(1)}$. Обозначим $Q_j^{(1)} = W_j^{(1)} + Y_j^{(1)} - \sum_{-j}^{-1}\tau_i$. При каждом $j = 0,\dots,NL$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z>x, \sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)) &= \mathbf{P}(Q_j^{(1)} + \sigma_{-j}^{(1)} > x, \sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)) + o(\mathbf{P}(Z>x))\\
&= \int_0^{h(x)}\mathbf{P}(Q_j^{(1)}\in dt)\mathbf{P}(\sigma_{-j}^{(1)} > x-t) + o(\mathbf{P}(Z>x)) + o(\overline{F}(x))\\
&= c^{(1)}\overline{F}(x)\int_0^{h(x)}\mathbf{P}(Q_j^{(1)}\in dt)e^{-\gamma t} + o(\mathbf{P}(Z>x)+\overline{F}(x))\\
&= c^{(1)}\overline{F}(x)\mathbf{E}e^{\gamma W_0^{(1)}}\mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}}(\varphi_\tau(-\gamma))^j + o(\mathbf{P}(Z>x)+\overline{F}(x))
\end{aligned}$$

Поясним каждое из четырех равенств. Справедливость первого из них следует из

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z>x, \sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)) &= \mathbf{P}(Q_j^{(1)} + \sigma_{-j}^{(1)} > x, \sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x))\\
&+ \mathbf{P}(V_j^{(1)} > x, Q_j^{(1)} + \sigma_{-j}^{(1)} \le x, \sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)),
\end{aligned}$$

где второе слагаемое не больше, чем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(V_j^{(1)} > x, \sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)) &= \mathbf{P}(V_j^{(1)} > x)\mathbf{P}(\sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x))\\
&\le \mathbf{P}(Z>x)\mathbf{P}(\sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)) = o(\mathbf{P}(Z>x)).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Q_j^{(1)} + \sigma_{-j}^{(1)} > x, \sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)) &= \int_0^{h(x)}\mathbf{P}(Q_j^{(1)}\in dt)\mathbf{P}(\sigma_{-j}^{(1)} > x-t)\\
&+ \mathbf{P}(Q_j^{(1)} > h(x))\mathbf{P}(\sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)),
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{P}(Q_j^{(1)} > h(x)) \le \mathbf{P}(Z > h(x))$$

и

$$\mathbf{P}(\sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)) \sim c^{(1)}\overline{F}(x-h(x)) \sim c^{(1)}e^{\gamma h(x)}\overline{F}(x).$$

И так как $\mathbf{E}e^{\gamma Z} < \infty$, то $\mathbf{P}(Z > h(x))e^{\gamma h(x)} \to 0$ с ростом x – поэтому справедливо и второе равенство. Третье равенство следует из равномерной эквивалентности (6) и предположений теоремы:

$$\int_0^{h(x)} \mathbf{P}(Q_j^{(1)} \in dt)\mathbf{P}(\sigma_{-j}^{(1)} > x-t) \sim c^{(1)} \int_0^{h(x)} \mathbf{P}(Q_j^{(1)} \in dt)\overline{F}(x-t) \sim c^{(1)} \int_0^{h(x)} \mathbf{P}(Q_j^{(1)} \in dt)e^{\gamma t}\overline{F}(x).$$

Наконец, с ростом x,

$$\int_0^{h(x)} \mathbf{P}(Q_j^{(1)} \in dt)e^{\gamma t} \to \int_0^{\infty} \mathbf{P}(Q_j^{(1)} \in dt)e^{\gamma t} = \mathbf{E}e^{\gamma Q_j^{(1)}},$$

что, по независимости входящих в $Q_j^{(1)}$ слагаемых, влечет последнее из равенств. Значит,

$$\sum_{j=0}^{NL} \mathbf{P}(Z > x, \sigma_{-j}^{(1)} > x-h(x)) = (1+o(1))c^{(1)}\overline{F}(x)\mathbf{E}e^{\gamma W_0^{(1)}} \sum_{j=0}^{NL} \mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}} (\varphi_\tau(-\gamma))^j + o(\mathbf{P}(Z > x)). \tag{23}$$

Аналогично, при любом $j = 0, 1, 2, \ldots$ случайную величину Z можно представить в виде

$$Z = \max\left(V_J^{(2)}, Y_j^{(2)} + \sigma_{-j}^{(2)} + \sum_{i=-j+1}^{0} \sigma_i^{(2)} - \sum_{i=-j}^{-1} \tau_i\right),$$

где

$$Y_j^{(2)} = \sup_{m \geq n \geq -j} \left(\sum_{-m}^{-n} \sigma_i^{(1)} + \sum_{-n}^{-j-1} \sigma_i^{(2)} - \sum_{-m}^{-j-1} \tau_i\right)$$

(и распределение $Y_j^{(2)}$ не зависит от j),

$$V_j^{(2)} = \sup_{m \geq -j} \max_{0 \leq n < -j} \left(\sum_{-m}^{-n} \sigma_i^{(1)} + \sum_{-n}^{0} \sigma_i^{(2)} - \sum_{-m}^{-1} \tau_i\right),$$

и случайные величины $(Y_j^{(2)}, \sum_{i=-j+1}^0 \sigma_i^{(2)} - \sum_{i=-j}^{-1} \tau_i, V_j^{(2)})$ не зависят в совокупности от $\sigma_{-j}^{(2)}$. Поэтому (при $Q_j^{(2)} = Y_j^{(2)} + \sum_{i=-j+1}^0 \sigma_i^{(2)} - \sum_{i=-j}^{-1} \tau_i$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z > x, \sigma_{-j}^{(2)} > x - h(x)) &= \mathbf{P}(Q_j^{(2)} + \sigma_{-j}^{(2)} > x, \sigma_{-j}^{(2)} > x - h(x)) + o(\mathbf{P}(Z > x)) \\
&= \int_0^{h(x)} \mathbf{P}(Q_j^{(2)} \in dt)\mathbf{P}(\sigma_{-j}^{(2)} > x - t) + o(\mathbf{P}(Z > x) + \overline{F}(x)) \\
&= c^{(2)}\overline{F}(x) \int_0^{h(x)} \mathbf{P}(Q_j^{(2)} \in dt)e^{\gamma t} + o(\mathbf{P}(Z > x) + \overline{F}(x)) \\
&= c^{(2)}\overline{F}(x)\mathbf{E}e^{\gamma Y_0^{(2)}} \left(\varphi_{(2)}(\gamma)\right)^{j-1} (\varphi_\tau(-\gamma))^{j-1} + o(\mathbf{P}(Z > x) + \overline{F}(x))
\end{aligned}$$

(при этом аргументация очень близка к использованной при нахождении асимптотики для $\mathbf{P}(Z > x, \sigma_{-j}^{(2)} > x - h(x))$). Значит,

$$\sum_{j=0}^{NL} \mathbf{P}(Z > x, \sigma_{-j}^{(2)} > x - h(x)) = (1 + o(1))c^{(2)}\overline{F}(x)\mathbf{E}e^{\gamma Y_0^{(2)}} \frac{1 - R_2^{NL}}{1 - R_2} + o(\mathbf{P}(Z > x)), \tag{24}$$

где $R_2 = \varphi_{(2)}(\gamma)\varphi_\tau(-\gamma) < 1$.

Собирая вместе (22), (23) и (24), получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z>x)(1+o(1)) &= (1+o(1))\overline{F}(x)\\ &\times \left(c^{(1)}\mathbf{E}e^{\gamma W_0^{(1)}}\sum_{j=0}^{NL}\mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}}(\varphi_\tau(-\gamma))^j + c^{(2)}\mathbf{E}e^{\gamma Y_0^{(2)}}\frac{1-R_2^{NL}}{1-R_2}\right)+g_3(x).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}(Z>x)}{\overline{F}(x)} \le c^{(1)}\mathbf{E}e^{\gamma W_0^{(1)}}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}}(\varphi_\tau(-\gamma))^j + c^{(2)}\mathbf{E}e^{\gamma Y_0^{(2)}}\frac{1}{1-R_2}+\varepsilon$$

и

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}(Z>x)}{\overline{F}(x)} \ge c^{(1)}\mathbf{E}e^{\gamma W_0^{(1)}}\sum_{j=0}^{NL}\mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}}(\varphi_\tau(-\gamma))^j + c^{(2)}\mathbf{E}e^{\gamma Y_0^{(2)}}\frac{1-R_2^{NL}}{1-R_2},$$

где ε может быть выбрано как угодно малым (и, соответственно, N – как угодно большим). Устремляя ε к нулю, получаем окончательно:

$$\mathbf{P}(Z>x)\sim\overline{F}(x)\left(c^{(1)}\mathbf{E}e^{\gamma W_0^{(1)}}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}}(\varphi_\tau(-\gamma))^j + c^{(2)}\mathbf{E}e^{\gamma Y_0^{(2)}}\frac{1}{1-R_2}\right). \qquad (25)$$

Получим теперь оценки (10). Для этого мы используем несколько раз очевидные соотношения: для любого конечного или счетного набора случайных величин X_i

$$\sup_i \mathbf{E}e^{X_i}\le\mathbf{E}e^{\sup_i X_i}\le\sum_i\mathbf{E}e^{X_i}.$$

Во-первых,

$$1\le\mathbf{E}e^{\gamma W_0^{(1)}}\le\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathbf{E}e^{\gamma(\sigma_1^{(1)}-\tau_1)}\right)^n=\frac{1}{1-R_1},$$

где, напомним, $R_1=\varphi_{(1)}(\gamma)\varphi_\tau(-\gamma)<1$. Далее, при $\varphi(\gamma)=\max(\varphi_{(1)}(\gamma),\varphi_{(2)}(\gamma))$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}} &\ge \max_{0\le k\le -j}\mathbf{E}\exp\left(\gamma\sum_{i=-j+1}^{-j+k}\sigma_i^{(1)}+\gamma\sum_{i=-j+k}^{0}\sigma_i^{(2)}\right)\\ &= \max_{0\le k\le -j}\varphi_{(1)}^k(\gamma)\varphi_{(2)}^{j+1-k}(\gamma)=\varphi^j(\gamma)\varphi_{(2)}(\gamma)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}} &\le \sum_{k=0}^{-j}\mathbf{E}\exp\left(\gamma\sum_{i=-j+1}^{-j+k}\sigma_i^{(1)}+\gamma\sum_{i=-j+k}^{0}\sigma_i^{(2)}\right)\\ &= \varphi_{(2)}(\gamma)\sum_{i=0}^{j}\varphi_{(1)}^i(\gamma)\varphi_{(2)}^{j-i}(\gamma).\end{aligned}$$

И так как $R=\varphi(\gamma)\varphi_\tau(-\gamma)$, то

$$\frac{\varphi_{(2)}(\gamma)}{1-R}\le\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{E}e^{\gamma Y_j^{(1)}}\varphi_\tau(-\gamma)^j\le\varphi_{(2)}(\gamma)\cdot\frac{1}{(1-R_1)(1-R_2)}.$$

Аналогично,

$$\varphi_{(1)}(\gamma)\le\mathbf{E}e^{\gamma Y_0^{(2)}}\le\varphi_{(1)}(\gamma)\cdot\frac{1}{(1-R_1)(1-R_2)}.$$

Подставляя все полученные неравенства в (25), мы приходим к неравенствам (10).

3 Приложение

3.1 Свойства распределений из класса $\mathcal{S}_\beta$, $\beta > 0$.

В этом пункте мы приводим ряд известных свойств (Свойства 1–3) распределений из класса $\mathcal{S}_\beta$ при $\beta > 0$ – см., напр., [11] и комментарии в [5], а также Свойство 4, следующее из утверждений работы [5].

Свойство 1. (Замкнутость класса $\mathcal{S}_\beta$ относительно эквивалентности по хвостам распределений)
Если $F \in \mathcal{S}_\beta$ и $\overline{F}(x) \sim c\overline{G}(x)$ для некоторой постоянной $c \in (0,\infty)$, то $G \in \mathcal{S}_\beta$. В частности, если случайные величины X и Y независимы, Y принимает п.н. неотрицательные значения и $F(x) = \mathbf{P}(X \le x) \in \mathcal{S}_\beta$, то

$$\overline{G}(x) = \mathbf{P}(X - Y > x) \sim \int_0^{h(x)} G(dt)\overline{F}(x+t) \sim \overline{F}(x) \int_0^{h(x)} G(dt)e^{-\beta t} \sim \overline{F}(x)\mathbf{E}e^{-\beta Y}$$

при $x \to \infty$ и, значит, $G \in \mathcal{S}_\beta$.

Справедлив и более общий результат:

Свойство 2. Допустим, что $F \in \mathcal{S}_\beta$ при некотором $\beta \ge 0$. Предположим также, что при $i = 1,\ldots,n$ случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ независимы в совокупности и имеют функции распределения F_i, соответственно, которые удовлетворяют соотношениям $\mathbf{P}(X_i > x) = \overline{F_i}(x) \sim c_i\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ для некоторых $c_i \ge 0$, $\sum_1^n c^{(i)} > 0$. Тогда $\varphi_i = \mathbf{E}e^{\beta X_i} < \infty$ при всех $i = 1,\ldots,n$. Распределение суммы $\sum_{i=1}^n X_i$ этих случайных величин также принадлежит классу $\mathcal{S}_\beta$ и

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\sum_{i=1}^n X_i > x) &\sim \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^n \{\sum_{i\neq j} X_i \le h(x), \sum_{i=1}^n X_i > x\}\right) \\
&\sim \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\left(\sum_{i\neq j} X_i \le h(x), \sum_{i=1}^n X_i > x\right) \\
&\sim \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^n \{X_j > x - h(x), \sum_{i=1}^n X_i > x\}\right) \\
&\sim \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\left(X_j > x - h(x), \sum_{i=1}^n X_i > x\right) \sim \prod_{i=1}^n \varphi_i \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\varphi_i}\,\overline{F}(x),
\end{aligned}$$

где $h(x)$ – любая функция, удовлетворяющая свойству (6).

Свойство 3. Допустим, что $F \in \mathcal{S}_\beta$ при некотором $\beta \ge 0$. Предположим, что случайные величины V, ξ и η независимы в совокупности, $\eta \ge 0$ почти наверное, $\mathbf{P}(V > x) \sim c_1\overline{F}(x)$ и $\mathbf{P}(\xi > x) \sim c_2\overline{F}(x)$, где $c_1 \ge 0$ и $c_2 > 0$. Тогда при любой функции h, удовлетворяющей условиям (6),

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(V + \xi - \eta > x, V \le h(x)) &\sim \mathbf{P}(V + \xi - \eta > x, V - \eta \le h(x)) \\
&\sim \mathbf{P}(V + \xi - \eta > x, \xi - \eta \ge x - h(x)) \\
&\sim \mathbf{P}(V + \xi - \eta > x, \xi \ge x - h(x)) \\
&\sim c_2\overline{F}(x)\mathbf{E}e^{\beta V}\mathbf{E}e^{-\beta\eta}.
\end{aligned}$$

Свойство 4. Расмотрим последовательность независимы одинаково распределенных случайных величин $\{X_n\}$ с обшей функцией распределения F и предположим, что $\mathbf{E}X_i = -a < 0$, $F \in \mathcal{S}_\beta$ и $\mathbf{E}e^{\beta X_1} < 1$. Обозначим $M_k = \max_{0\le n\le k}\sum_{i=1}^n X_i$ и $M = \sup_{n\ge 0}\sum_{i=1}^n X_i$. Из теоремы 1 и замечания 3 работы [5] следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}(M>x)}{\overline{F}(x)} = \frac{\mathbf{E}e^{\beta M}}{1-\mathbf{E}e^{\beta X_1}}$$

(см. также [12]) и, более того, для любого как угодно малого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется такое большое N, что при $x\to\infty$ и при любой функции $h(x)$, удовлетворяющей условиям (6)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(M>x) &\ge \mathbf{P}\left(M>x, \bigcup_{n=1}^{N}\{X_n > x-h(x)\}\right) + o(\overline{F}(x)) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\mathbf{P}(M>x, X_n > x-h(x)) + o(\overline{F}(x)) \\
&\ge \mathbf{P}(M>x) + o(\overline{F}(x)) - \varepsilon\overline{F}(x).
\end{aligned}$$

(повторим, что мы понимаем запись $f(x)\ge g(x)+o(f(x))$ как $\limsup_{x\to\infty} g(x)/f(x) \le 1$; в нашем случае $o(\overline{F}(x)) = o(\mathbf{P}(M>x))$).

Если предположить дополнительно, что случайные величины X_n допускают представление в виде разностей $X_n = \xi_n - \eta_n$, где $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ – две независимые последовательности случайных величин, элементы каждой из которых независимы и одинаково распределены, и если случайные величины ξ_n неотрицательны, то приведенные выше соотношения останутся справедливыми, если заменить в них события $\{X_n > x-h(x)\}$ на $\{\xi_n > x-h(x)\}$.

3.2 Простое доказательство теоремы 1 с использованием нижней и верхней оценок из п.2.1.

Напомним еще раз, что стационарное время ожидания в одноканальной системе с временами обслуживания σ_n и интервалами между моментами прихода τ_n имеет то же распределение, что и максимум $M = \sup_n S_n$ случайного блуждания $S_n = \sum_1^n X_i$ с приращениями $X_n = \sigma_n - \tau_n$. Воспользуемся следующим известным утверждением для произвольного случайного блуждания $S_n = \sum X_i$ с отрицательным сносом:

Теорема 3. *Если*

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda \ : \ \varphi_{X_1}(\lambda) \le 1\} > 0,$$

то

$$-\ln\mathbf{P}(M>x) \sim \lambda_0 x.$$

Замечание 8. Нам известна только одна работа ([8], с. 17), где теорема 3 доказывается без дополнительных предположений. Обычно же (см., напр., [9], параграф 21, теорема 11) предполагается дополнительно выполнение условия Крамера:

$$\varphi_{X_1}(\lambda_0) = 1 \quad \text{и} \quad d = \mathbf{E}X_1 e^{\lambda_0 X_1} < \infty \tag{26}$$

или более сильных условий. Утверждение теоремы можно также вывести как следствие существенно более общих результатов, содержащихся, напр., в [10]. В п. 3.3 мы приводим комментарий методического характера о том, как можно доказывать теорему 3 в общем случае, если предполагать, что она уже доказана в условиях (26).

Из теоремы 3 следует, что

$$-\ln \mathbf{P}(W^{(i)} > x) \sim \gamma^{(i)} x,$$

и так как $Z^{(i)} \geq W^{(i)}$ п.н., то

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{-\ln \mathbf{P}(Z > x)}{x} \leq \gamma. \tag{27}$$

С другой стороны, при любом $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(\lambda) &\equiv \mathbf{E} e^{\lambda \widetilde{\sigma}_1} \leq \sum_{j=1}^{L} \mathbf{E} \exp\left(\sum_{i=1}^{j} \sigma_i^{(1)} + \sum_{i=j}^{L} \sigma_i^{(2)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{L} \varphi_{(1)}^{j}(\lambda) \varphi_{(2)}^{L-j+1}(\lambda) \equiv \varphi_*(\lambda). \end{aligned}$$

Используя снова обозначение $\varphi(\lambda) = \max(\varphi_{(1)}(\lambda), \varphi_{(2)}(\lambda))$, получаем, что

$$\min((\varphi_{(1)}(\lambda), \varphi_{(2)}(\lambda)) \cdot \varphi^L(\lambda) \leq \widetilde{\varphi}(\lambda) \leq \varphi_*(\lambda) \leq (L+1)\varphi^{L+1}(\lambda)$$

и, значит,

$$(\widetilde{\varphi}(\lambda))^{1/L} \to \varphi(\lambda) \quad \text{и} \quad (\varphi_*(\lambda))^{1/L} \to \varphi(\lambda) \quad \text{при} \quad L \to \infty. \tag{28}$$

Положим $\widetilde{\gamma} = \sup\{\lambda \ : \ \widetilde{\varphi}(\lambda)\varphi_\tau^L(-\lambda) \leq 1\}$. Так как $\widetilde{\sigma}_1 \geq \max\left(\sum_1^L \sigma_i^{(1)}, \sum_1^L \sigma_i^{(2)}\right)$, то $\gamma \geq \widetilde{\gamma}$. В силу (28), $\widetilde{\gamma} \to \gamma$. По теореме 3, при каждом достаточно большом L

$$-\ln \mathbf{P}(\widetilde{W} > x) \sim \widetilde{\gamma} x.$$

И так как $\mathbf{E} \exp(\gamma \widetilde{\sigma}_0) < \infty$, то

$$-\ln \mathbf{P}(\widetilde{Z} > x) \sim \widetilde{\gamma} x.$$

Устремляя L к бесконечности, получаем, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{-\ln \mathbf{P}(Z > x)}{x} \geq \gamma. \tag{29}$$

Утверждение теоремы 1 следует теперь из неравенств (27) и (29).

Замечание 9. Имеет место естественный аналог теоремы 1 для тандемов произвольного (конечного) числа систем обслуживания, который и доказывается совершенно аналогично.

3.3 Комментарий к доказательству теоремы 3.

Предположим, что утверждение теоремы доказано при дополнительных предположениях (26). Заметим только, что есть несколько вариантов этого доказательства (с использованием, напр., (а) мартингальной техники, (б) экспоненциальной замены меры и элементов теории восстановления и т.д.)

Допустим теперь, что условие (26) не выполняется. При любом $r > 0$ определим случайные величины

$$X_{n,+r} = \max(X_n, -r) \quad \text{и} \quad X_{n,-r} = \min(X_n, r).$$

Обозначим соответствующие суммы, максимумы и моменты через $S_{n,+r}, S_{n,-r}, M_{+r}, M_{-r}$, $\varphi_{X,+r}$ и $\varphi_{X,-r}$, где $M_{+r} \geq M \geq M_{-r}$ п.н. Для всех достаточно больших значений r максимум M_{+r} является п.н. конечной случайной величиной. Из монотонности и непрерывности функций $\varphi_{X,+r}$ и $\varphi_{X,-r}$ по параметру r и из ограниченности сверху случайных величин $X_{n,-r}$ следует, что, во-первых, при каждом r существуют корни $\lambda_{+r} < \lambda_0 < \lambda_{-r}$ уравнений $\varphi_{X,+r}(\lambda_{+r}) = 1$ и $\varphi_{X,-r}(\lambda_{-r}) = 1$, соответствующие производные принимают конечные значения и поэтому

$$-\ln \mathbf{P}(M_{+r} > x) \sim \lambda_{+r}x \quad \text{и} \quad -\ln \mathbf{P}(M_{-r} > x) \sim \lambda_{-r}x,$$

и, во-вторых, как λ_{+r}, так и λ_{-r} стремятся к λ_0 с ростом r. Из этого следует утверждение теоремы 3.

Если же $\varphi_X(\lambda_0) < 1$, то найдется $r < \infty$ такое, что $\varphi_{X,+r}(\lambda_0) = 1$ и $\varphi'_{X,+r}(\lambda_0) < \infty$. Пожтому при таком r

$$-\ln \mathbf{P}(M_{+r} > x) \sim \lambda_0 x.$$

Случай $\varphi_X(\lambda_0) = 1$ и $d = \infty$ оставляем читателю.

Список литературы

[1] Loynes, R. M. "The stability of a system of queues in series," *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1964, vol. 60, no.3, pp. 569–574.

[2] Baccelli, F. and Foss, S. "Ergodicity of Jackson-Type Queueing Networks", *Queueing Systems*, 1994, vol. 17, no. 1, pp. 5–72.

[3] Bertsimas, D., Paschalidis, I., and Tsitsiklis, J. "On the large deviation behaviour in acyclic networks of G/G/1 queues", *Ann. Appl. Prob.*, 1998, vol. 8, no. 4, pp. 1027–1069.

[4] Ganesh, A. J. "Large deviations of the sojourn time for queues in series", *Ann. Oper. Res.*, 1998, vol. 79, no. 1, pp. 3–26.

[5] Захари, С., Фосс, С.Г. (2006). "О точной асимптотике максимума случайного блужданмя с приращениями из одного класса распределений с тонкими хвостами", *Сиб. матем. ж.*, том 47 , вып. 6, с. 1265–1274.

[6] Baccelli, F. and Foss, S. "Moments and tails in monotone-separable stochastic networks", *Ann. Appl. Prob*, 2004, vol. 14, no. 3, pp. 612–650.

[7] Baccelli, F. and Foss, S. "On the Saturation Rule for the Stability of Queues". *J. Appl. Prob.*, 1995, vol. 32, no. 2, pp. 494–507

[8] Ganesh, A. J., O Connell, N., Wischik, D. "*Big queues*", Lecture Notes in Mathematics, vol.1838, Springer, 2004.

[9] Боровков, А.А. "*Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*". М., Наука, 1972.

[10] Боровков, А.А., Могульский А.А. "Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных случайных блужданий" *Сиб. матем. ж.*, 1996, том 37, вып. 4, с. 745–782.

[11] Pakes, A. "On the tails of waiting time distributions." *J. Appl. Prob.*, 1975, vol. 7, no.4, pp. 745–789.

[12] Bertoin, J. and Doney, R. A. "Some asymptotic results for transient random walks", *Adv. Appl. Prob.*, 1996, vol. 28, no.1, pp. 207–226.