Министерство образования и науки Российской Федерации
Новосибирский государственный университет

В.И. Лотов

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Учебное пособие для студентов механико-математического факультета НГУ

Новосибирск – 2017

Содержание

1 Введение. Примеры граничных функционалов

Пусть X, X_1, $X_2, , \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$, $S_0 = 0$. Последовательность $\{S_n,\ n \geq 0\}$ будем называть случайным блужданием, а совокупность точек $\{(n, S_n),\ n \geq 0\}$ на координатной плоскости, соединенных отрезками прямой, будем называть траекторией случайного блуждания.

Граничными задачами для случайных блужданий принято называть исследование распределений, связанных с достижением (или с недостижением) границы некоторого множества траекторией случайного блуждания.

Функционалы от траектории случайного блуждания, связанные с достижением границы того или иного множества, будем называть *граничными функционалами.* Их распределение и будет представлять интерес наших рассмотрений.

Приведем некоторые примеры граничных функционалов.

1) Супремум траектории или ее части:

$$S = \sup_{n \geq 0} S_n \qquad \text{при условии, что } \mathbf{P}(S < \infty) = 1, \qquad \text{а также} \quad \zeta_n = \sup_{1 \leq k \leq n} S_k.$$

Заметим сразу, что изучение распределений граничных функционалов является аналитически весьма трудной задачей, поскольку каждый раз требуется рассматривать вероятность тех или иных ограничений, наложенных на всю траекторию, а не только на ее значение в некоторый фиксированный момент времени, как это делалось, к примеру, в ЦПТ.

В случае с распределением супремума имеем вероятность одновременного осуществления n зависимых событий

$$\mathbf{P}(\zeta_n < y) = \mathbf{P}(S_1 < y, S_2 < y, \ldots, S_n < y),$$

что гораздо труднее изучать по сравнению с изучением $\mathbf{P}(S_n < y)$.

2) Момент первого достижения уровня t:

$$\eta_+^0(t) = \inf\{n \geq 1 :\ S_n \geq t\}, \qquad t \geq 0,$$

$$\eta_-^0(t) = \inf\{n \geq 1 :\ S_n \leq t\}, \qquad t \leq 0.$$

Варианты:

$$\eta_+(t) = \inf\{n \geq 1 :\ S_n > t\}, \qquad t \geq 0,$$

$$\eta_-(t) = \inf\{n \geq 1 :\ S_n < t\}, \qquad t \leq 0.$$

Заметим, что распределение супремума ζ_n и момента достижения уровня связаны между собой:

$$\mathbf{P}(\zeta_n < y) = \mathbf{P}(\eta_+^0(y) > n).$$

3) Величина перескока через границу:

$$\chi_\pm^0(t) = S_{\eta_\pm^0(t)} - t, \qquad \chi_\pm(t) = S_{\eta_\pm(t)} - t.$$

Обычно изучают вероятности

$$\mathbf{P}(\eta_\pm^0(t) = n,\ \chi_\pm^0(t) \in dy), \qquad \mathbf{P}(\eta_\pm(t) = n,\ \chi_\pm(t) \in dy),$$

потому что, как правило, эти две случайные величины зависимы. Как мы обнаружим ниже, независимость момента первого достижения $\eta_+^0(t)$ и величины перескока имеет место только если правый хвост распределения X является экспоненциальным или геометрическим.

Те же объекты (момент первого достижения и величина перескока) можно вводить и изучать в случае криволинейной границы, хотя это существенно сложнее, чем при рассмотрении прямолинейных границ.

4) Время пребывания случайного блуждания в множестве A с прямолинейной границей

$$d_n(A) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{S_k \in A\}},$$

а также время пребывания во множестве с нелинейной границей

$$d_n(A) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{S_k \in A_k\}}.$$

5) Задача с двумя границами.

Введем

$$N = \min\{n \geq 1 : \ S_n \notin (a, b)\}, \qquad a < 0, \ b > 0.$$

Объект исследования — вероятности $\mathbf{P}(N = n, \ S_N \in dy)$, а также $\mathbf{P}(S_N \geq b)$, $\mathbf{E}N$ и др.

6) Исследование числа пересечений полосы в задаче с двумя границами.

Во всех примерах возможные цели исследования:

а) нахождение точных выражений для искомых распределений;

б) исследование асимптотического поведения распределений и их характеристик в тех или иных предположениях;

в) доказательство неравенств для распределений и их характеристик.

2 Связь с интегральными уравнениями

Выясняется, что решения многих граничных задач, связанных с моментом достижения прямолинейной границы, одновременно являются решениями соответствующих интегральных уравнений.

Рассмотрим для примера нахождение вероятности разорения игрока. Пусть игрок имеет начальный капитал x единиц, а начальный капитал его соперника равен $b - x$. Предположим, что после i-й игры наш игрок получает выигрыш (положительный или отрицательный) случайного размера X_i, его капитал после n игр равен $x + S_n$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Игра прекращается в момент N, когда впервые траектория случайного блуждания $\{x + S_n\}$ достигнет границы полосы $\{(u, v) : 0 \leq v \leq b\}$. Наш игрок разоряется, если $x + S_N \leq 0$. Обозначим вероятность разорения через $g(x) = \mathbf{P}(x + S_N \leq 0)$. Разорение наступает, если сразу же после первой игры окажется $x + X_1 \leq 0$, либо после первой игры капитал нашего игрока окажется равным некоторому числу y, $0 < y < b$, и теперь можно считать, что игра начинается снова со стартового капитала y и с вероятностью разорения $g(y)$. То есть

$$g(x) = \mathbf{P}(x + X_1 \leq 0) + \int\limits_{(0,b)} \mathbf{P}(x + X_1 \in dy) g(y) = g_0(x) + \int\limits_{(0,b)} f(y - x) g(y) dy,$$

где $g_0(x) = \mathbf{P}(X_1 \leq -x)$ — известная функция, $f(y)$ — плотность распределения случайной величины X_1 (если она существует).

Тем самым мы получили интегральное уравнение на конечном интервале с ядром, зависящим от разности аргументов. В теории интегральных уравнений такого сорта уравнения относятся к разряду наиболее трудных, легче дело обстоит в случае, когда $b = \infty$ (так называемые уравнения Винера-Хопфа, они соответствуют случайным блужданиям с одной границей). Как в теории интегральных уравнений, так и при решении граничных задач, точные выражения для решений доступны только в некоторых частных ситуациях. В этой связи значительное внимание уделяется асимптотическому анализу решений граничных задач, что характерно для теории вероятностей, и в этом направлении результаты, полученные вероятностными методами, являются более продвинутыми по сравнению с тем, что может дать теория интегральных уравнений.

3 Где возникают граничные задачи

Много где. Приведем несколько примеров.

1) В теории систем обслуживания. В широких условиях распределение времени ожидания начала обслуживания клиента сходится к распределению супремума траектории соответствующего случайного блуждания (см. [1, гл.12, §4]). Остановимся на этом более подробно.

Представим себе, что в некоторую систему через интервалы времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ поступают «вызовы», которые надо обслуживать. Это могут быть телефонные вызовы; самолеты, прибывающие в аэропорт; клиенты бытовых учреждений; сообщения, содержащие информацию, которую надо обрабатывать, скажем, на электронной машине и др. Пусть на обслуживание k-го вызова (первый вызов пришел в момент времени 0, второй в момент времени τ_1, и т. д.) тратится время s_k, $k = 1, 2, \ldots$. Если в момент прихода k-го вызова система занята обслуживанием одного из предыдущих вызовов, то он становится в «очередь» и ждет своего обслуживания, которое начинается немедленно после того, как система обслужит все предыдущие вызовы. Задача состоит в отыскании распределения времени ожидания w_n, которое n-й вызов ждал начала своего обслуживания.

Найдем, как связаны между собой значения w_{n+1} и w_n. Ясно, что $(n+1)$-й вызов пришел позже n-го на время τ_n, но ему придется ждать дополнительно (по сравнению с n-м вызовом) время s_n обслуживания n-го вызова. Поэтому

$$w_{n+1} = w_n - \tau_n + s_n,$$

если только $w_n - \tau_n + s_n \geq 0$. Если же $w_n - \tau_n + s_n < 0$, то очевидно $w_{n+1} = 0$. Таким образом, если обозначить $X_{n+1} = s_n - \tau_n$, то

$$w_{n+1} = \max\{0, w_n + X_{n+1}\}, \qquad n \geq 1, \quad w_1 = 0.$$

Покажем, что решением этих уравнений является последовательность

$$w_n = S_n - \min\{S_1,\, S_2,\, \ldots,\, S_n\} = S_n - \gamma_n.$$

Так как $S_1 - \gamma_1 = 0$, то достаточно проверить рекуррентное соотношение

$$S_{n+1} - \gamma_{n+1} = \max\{0,\, S_n + X_{n+1} - \gamma_n\} \tag{1}$$

Если $S_{n+1} > \gamma_n$, то $\gamma_{n+1} = \gamma_n$, и в обеих частях (1) будет стоять $S_{n+1} - \gamma_n$. Если $S_{n+1} \le \gamma_n$, то $S_{n+1} = \gamma_{n+1}$, и в обеих частях (1) будет стоять 0. таким образом, равенство $w_n = S_n - \gamma_n$ доказано.

Предположим теперь, что случайные величины X_k независимы и одинаково распределены. Тогда разность

$$S_n - \gamma_n = \max\{S_n - S_1,\, S_n - S_2,\, \ldots,\, S_n - S_n\} = \max\{0,\, X_n,\, X_n + X_{n+1},\, \ldots,\, X_n + \ldots + X_2\}$$

будет распределена, очевидно, так же, как $\bar{S}_{n-1} = \max\{0,\, S_1,\, \ldots,\, S_{n-1}\}$. Так что распределение w_n совпадает с распределением $\bar{S}_{n-1}$. Так как $\bar{S}_{n-1}$ при $n \to \infty$ монотонно сходится к $S = \sup_{n \ge 0} S_n$, то всегда существует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(w_n < x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\bar{S}_{n-1} < x) = \mathbf{P}(S < x).$$

Это распределение называют *стационарным распределением времени ожидания*. Как мы увидим, оно будет собственным, если $\mathbf{E}\, X = \mathbf{E}\, s_1 - \mathbf{E}\, \tau_1 < 0$. Если же $\mathbf{E}\, s_1 > \mathbf{E}\, \tau_1$, или $\mathbf{E}\, s_1 = \mathbf{E}\, \tau_1$ и $s_1 \not\equiv \tau_1$, то «стационарное» время ожидания будет бесконечным.

2) Изучение вероятности разорения страховой компании также сводится к распределению супремума траектории ([1, гл.12, §4]).

Рассмотрим вероятностную модель эволюции во времени капитала страховой компании. Сначала для заданной последовательности независимых одинаково распределенных векторов (τ_j, Y_j) введем процесс $Z(t)$ (обобщенный процесс восстановления):

$$Z(t) := Z_{\nu(t)},$$

где

$$Z_n := \sum_{j=1}^{n} Y_j, \qquad \nu(t) := \max\{k :\, T_k \le t\}, \qquad T_k := \sum_{j=1}^{k} \tau_j.$$

В задачах страхования прирост капитала компании за время t за счет регулярных текущих страховых взносов можно описывать с помощью функции qt, $q > 0$. Через интервалы времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ случаются страховые выплаты величиной $Y_1, Y_2, \ldots$. Тогда, если начальный капитал компании был x, то капитал в момент t будет равен

$$x + qt - Z_{\nu(t)} = x + qt - Z(t).$$

Компания разорится, если $\inf_t \big(x + qt - Z(t)\big) < 0$, или, что то же,

$$\sup_t \big(Z(t) - qt\big) > x.$$

Но нетрудно видеть, что

$$\sup_t \big(Z_{\nu(t)} - qt\big) = \sup_{k \ge 0} S_k,$$

где $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} X_j$, $X_j = Y_j - q\tau_j$. Таким образом, решение задачи о разорении страховой компании также сводится к отысканию распределения супремума последовательных сумм.

3) Теория восстановления: один из двух вариантов определения функции восстановления есть $H(t) = \mathbf{E}\eta_+(t)$ (см. [1, гл.10, §1]).

4) Задача о разорении игрока (см. пункт 2).

5) Исследование характеристик критерия согласия Колмогорова и критерия однородности двух выборок Колмогорова-Смирнова.

6) Исследование характеристик последовательного критерия отношения вероятностей. Остановимся более подробно на этом.

Предположим, что последовательно одно за другим производятся независимые наблюдения Y_1, Y_2, …, имеющие общую функцию распределения F, которая неизвестна. Нужно построить критерий для проверки простых гипотез $H_1 : \ F = F_1$ против $H_2 : \ F = F_2$. А.Вальд предложил следующую конструкцию ([2]). По наблюдениям строится вспомогательное случайное блуждание $\{S_n, \, n \geq 1\}$, где

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad X_i = \ln \frac{f_2(Y_i)}{f_1(Y_i)},$$

здесь f_1 и f_2 — плотности распределений F_1 и F_2 соответственно относительно некоторой меры μ. Мы будем в дальнейшем снабжать символы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ индексом j, если вычисление производится при условии, что $F = F_j, \ j = 1, 2$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}_1 X_1 = \int \ln \frac{f_2}{f_1} f_1 d\mu = \int \ln \left(1 + \frac{f_2}{f_1} - 1\right) f_1 d\mu < \int \left(\frac{f_2}{f_1} - 1\right) f_1 d\mu = 0,$$

и аналогично

$$\mathbf{E}_2 X_1 = \int \ln \frac{f_2}{f_1} f_2 d\mu > 0.$$

По этой причине в соответствии с законом больших чисел случайное блуждание $\{S_n, \, n \geq 1\}$ уходит на минус бесконечность, если верна гипотеза H_1, и на плюс бесконечность, если верна гипотеза H_2. А.Вальд предложил в этой ситуации выбрать достаточно большие по модулю числа $a < 0$ и $b > 0$ и посмотреть, в какую сторону случайное блуждание впервые выйдет из интервала $(a, \, b)$. Если через верхнюю границу, то принимаем гипотезу H_2, если через нижнюю — то принимаем H_1. Таким образом, для принятия решения требуется всего $N = \min\{n \geq 1 : \ S_n \notin (a, \, b)\}$ наблюдений. Разумеется, при этом возможны ошибочные решения:

$$\beta_1 := \mathbf{P}_1(S_N \geq b) \text{ – вероятность ошибки первого рода,}$$

$$\beta_2 := \mathbf{P}_2(S_N \leq a) \text{ – вероятность ошибки второго рода.}$$

Важной характеристикой является также среднее число наблюдений $\mathbf{E}_i N$, необходимых для принятия решения. Ясно, что вычисление этих величин требует знания распределения пары $(N, \, S_N)$. Выяснилось, что предложенный А.Вальдом критерий является самым экономичным: среди всех критериев с заданными ограничениями на вероятности ошибок (последовательных или с фиксированным числом наблюдений) данный критерий имеет минимальный средний объем количества требуемых наблюдений. В литературе этот критерий широко исследовался, он получил название последовательного критерия отношения вероятностей (или последовательного критерия отношения правдоподобия).

7) Исследование характеристик процедуры кумулятивных сумм в задаче скорейшего обнаружения разладки.

Пусть, как и в предыдущем пункте, последовательно одно за другим производятся независимые наблюдения Y_1, Y_2, …, причем до некоторого момента времени m они имеют общую функцию распределения F_1, а с момента m распределение наблюдений меняется на F_2. Момент m принято называть моментом разладки, и он неизвестен. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям максимально быстро обнаружить наличие разладки, если она произошла. Для этих целей опять строится вспомогательное случайное блуждание $\{S_n,\, n \geq 1\}$, где

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad X_i = \ln \frac{f_2(Y_i)}{f_1(Y_i)},$$

здесь по-прежнему f_1 и f_2 — плотности распределений F_1 и F_2 соответственно относительно некоторой меры μ. Ясно, что до разладки случайное блуждание имеет отрицательный снос, а с момента разладки снос становится положительным. Этот эффект используется для обнаружения разладки. E. Page [3] предложил алгоритм, который получил название процедуры кумулятивных сумм (CUSUM procedure). Он состоит в следующем. Решение о том, что разладка имела место, принимается в тот момент времени τ, когда траектория случайного блуждания S_n после достижения своего минимума продвинется вверх на значительную величину. Более точно,

$$\tau = \min\{n \geq 1 :\ S_n - \min_{1\leq k\leq n} S_k \geq b\}$$

при подходящем выборе числа $b > 0$. Поскольку движение траектории вниз нас не должно беспокоить, то каждый раз на n-м шаге S_n сравнивается с уже достигнутым минимумом траектории. Это эквивалентно тому, что каждый раз при достижении минимума траектории начало координат перемещается в эту уже достигнутую точку минимума, и относительно нее отслеживается движение вверх. Как уже отмечалось выше, момент τ можно задавать в следующей эквивалентной постановке:

$$\tau = \min\{n \geq 1 :\ w_n \geq b\}, \qquad \text{где} \quad w_0 = 0, \quad w_{n+1} = \max\{0,\ w_n + X_{n+1}\}.$$

Число b следует выбирать таким, чтобы в случае отсутствия разладки величина $\mathbf{E}\,\tau$ была достаточно большой, а при наличии разладки среднее время задержки с объявлением тревоги (по поводу возникшей разладки) должно быть малым. Полезно также рассматривать и другие характеристики этого алгоритма. Тем самым мы приходим к необходимости изучать распределение момента первого достижения уровня b траекториями случайного блуждания с задержкой в нуле.

4 Примеры нахождения явных выражений для решений некоторых граничных задач

4.1 Задача о разорении

Исторически наибольшее число работ, связанных с нахождением точных выражений для решений граничных задач, относится к задаче о разорении в теории игр. Речь идет о вычислении введенной в п. 2 функции $g(x)$ при условии, что $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p$, где по-прежнему предполагается, что начальный капитал игрока равен x, а капитал его соперника равен $b - x$. Кроме того, интерес вызывает средняя продолжительность игры и вероятность того, что разорение наступит именно на n-м шаге.

Первые исследования в этом направлении проводились Гюйгенсом (C.Huygens, 1629-1695), Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1654-1705), Муавром (De Moivre, 1667-1754), Монмортом (P.R. Monmort, 1678-1719) и Н. Бернулли (N. Bernoulli, 1687-1759). Комбинаторные методы явились главным инструментом их работ. Замечательный обзор результатов этих авторов в задаче о разорении игрока, а также других приложений двуграничных задач для простейших случайных блужданий содержится в [4].

Приведем один из способов нахождения функции $g(x)$ (см. [5, гл.14]).

После первого испытания капитал игрока равен либо $x-1$, либо $x+1$, поэтому при $1 < x < b-1$

$$g(x) = pg(x+1) + qg(x-1). \tag{2}$$

При $x = 1$ первое испытание может привести к разорению, поэтому

$$g(1) = pg(2) + q.$$

Кроме того,

$$g(b-1) = qg(b-2).$$

Чтобы придать всем этим равенствам одинаковый вид, положим

$$g(0) = 1, \quad g(b) = 0. \tag{3}$$

При таком соглашении вероятность разорения удовлетворяет уравнению (2) при $x = 1, 2, \ldots, b-1$. Уравнение (2) есть уравнение в конечных разностях, а условия (3) служат граничными условиями для $g(x)$. Мы выведем явное выражение для $g(x)$ с помощью метода частных решений. Предположим сначала, что $p \neq q$. Легко проверить, что разностное уравнение (2) имеет два частных решения $g(x) = 1$ и $g(x) = \big(q/p\big)^x$. Отсюда следует, что при произвольных постоянных A и B последовательность

$$g(x) = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^x \tag{4}$$

есть решение уравнения (2). Подберем постоянные A и B так, чтобы выполнялись граничные условия. Это значит, что A и B должны удовлетворять двум линейным уравнениям $A + B = 1$ и $A + B\big(q/p\big)^b = 0$. Отсюда следует, что

$$g(x) = \frac{\big(q/p\big)^b - \big(q/p\big)^x}{\big(q/p\big)^b - 1} \tag{5}$$

есть решение разностного уравнения (2), удовлетворяющее граничным условиям (3). Чтобы доказать, что искомая вероятность разорения равна (5), остается показать, что решение (5) единственно. Иначе говоря, нужно доказать, что все решения уравнения (2) могут быть записаны в виде (4). Пусть дано произвольное решение уравнения (2). Мы можем выбрать постоянные A и B так, чтобы (4) совпадало с этим решением при $x = 0$ и $x = 1$. Но по этим двум значениям можно найти все другие значения с помощью последовательной подстановки в (2) $x = 1, 2, 3, \ldots$. Это значит, что два решения, совпадающие при $x = 0$ и $x = 1$, совпадают тождественно, и поэтому любое решение имеет вид (4).

Наше рассуждение непригодно при $p = q = 1/2$, так как (5) не имеет тогда смысла. Это происходит потому, что в случае $p = q = 1/2$ два частных решения $g(x) = 1$ и $g(x) = \big(q/p\big)^x$ совпадают. Однако в этом случае мы имеем второе частное решение $g(x) = x$ и поэтому $g(x) = A + Bx$ есть решение уравнения (2), зависящее от двух постоянных. Чтобы удовлетворить граничным условиям, нужно положить $A = 1$ и $A + Bb = 0$. Отсюда

$$g(x) = 1 - \frac{x}{b}.$$

Легко видеть, что вероятность разорения стремится к единице, если число x фиксировано, а b стремится к бесконечности. То есть игра с бесконечно богатым соперником неизбежно приводит к разорению, несмотря на то, что внешне игра выглядит безобидной ($p = q = 1/2$).

Отметим, что нахождение вероятности того, что разорение наступит именно на n-м шаге, является более сложной задачей. Здесь нужно ввести в рассмотрение производящую функцию

$$h(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(N=n,\ x+S_n=0), \qquad \text{где} \qquad N = \min\{n \ge 1:\ x+S_n \notin (0,b)\},$$

выписать для нее уравнение в конечных разностях наподобие (2), найти решение и затем обратить его по переменной z. Последнее связано с весьма громоздкими вычислениями. Несмотря на простоту постановки задачи, в ответе получается весьма сложное выражение (см. [5, т.1, гл.14]):

$$\mathbf{P}(N=n,\ x+S_n=0) = b^{-1}2^n p^{(n-x)/2} q^{(n+x)/2} \sum_{k=1}^{b-1} \cos^{n-1}\frac{\pi k}{b} \sin\frac{\pi k}{b} \sin\frac{\pi x k}{b}.$$

4.2 Критерий Колмогорова-Смирнова

Здесь мы продемонстрируем один из комбинаторных методов в граничных задачах на примере исследования критерия Колмогорова-Смирнова однородности двух выборок.

Пусть имеются две независимые выборки из непрерывных распределений

$$Y = (Y_1,\, Y_2,\, \dots,\, Y_n) \Subset F_1,$$

$$Z = (Z_1,\, Z_2,\, \dots,\, Z_n) \Subset F_2.$$

Проверяется гипотеза об однородности, т.е. $H_1:\ F_1 = F_2$.

Рассмотрим эмпирические функции распределения $F_1^{(n)}$ и $F_2^{(n)}$, построенные по этим выборкам, и пусть

$$D_n^+ = \sup_y \bigl(F_1^{(n)}(y) - F_2^{(n)}(y)\bigr),$$

$$D_n = \sup_y \bigl|F_1^{(n)}(y) - F_2^{(n)}(y)\bigr|.$$

Предположим, что $F_1 = F_2$, тогда $F_1^{(n)}$ и $F_2^{(n)}$ должны быть близки при больших n. По этой причине гипотезу H_1 следует отвергать, если $D_n^+ \ge d_1$ или если $D_n \ge d_2$ при некоторых значениях d_1 и d_2. Числа d_1 и d_2 определяются из условий на вероятности ошибки первого рода: если верна гипотеза H_1, то требуем, чтобы выполнялось $\mathbf{P}(D_n^+ \ge d_1) \le \varepsilon_1$ (или $\mathbf{P}(D_n \ge d_2) \le \varepsilon_2$, если критерий строится на основе D_n). Тем самым мы приходим к необходимости нахождения распределений D_n и D_n^+.

Расположим обе выборки в ряд по возрастанию:

$$V_1 < V_2 < \ldots < V_{2n},$$

введем случайные величины

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{если } V_k \text{ принадлежит первой выборке,} \\ -1, & \text{если } V_k \text{ принадлежит второй выборке,} \end{cases}$$

и пусть $S_k = X_1 + \ldots + X_k,\ \ 1 \le k \le 2n$. Тогда, очевидно,

$$nD_n^+ = \sup_{1\le k\le 2n} S_k, \qquad nD_n = \sup_{1\le k\le 2n} |S_k|,$$

и задача сводится к нахождению распределений $\sup_{1\le k\le 2n} S_k$ и $\sup_{1\le k\le 2n}|S_k|$. Последовательность $\{S_k,\ 1\le k\le 2n\}$ можно рассматривать как траекторию случайного блуждания, у которой n скачков размером $+1$ и n скачков размером -1, при этом $S_{2n}=0$. Число таких траекторий равно C_{2n}^n и все они равновероятны. Вычислим количество траекторий, удовлетворяющих условию $\sup_{1\le k\le 2n} S_k\ge y$ (здесь $y\ge 1$ — целое число). Каждая такая траектория в некоторый момент времени m впервые достигает уровня y, то есть $S_m=y$. Всю оставшуюся часть траектории, соответствующую интервалу времени $m+1\le k\le 2n$, отразим зеркально относительно горизонтальной прямой на уровне y. Результатом такого преобразования будет траектория, которая в момент времени $2n$ приходит в точку $2y$. Таким образом мы построили взаимно однозначное соответствие между множеством траекторий, удовлетворяющих условиям $S_{2n}=0$ и $\sup_{1\le k\le 2n} S_k\ge y$, и множеством A всевозможных траекторий, удовлетворяющих условию $S_{2n}=2y$. Нетрудно вычислить число элементов множества A, будем обозначать его $\sharp(A)$. Если u — число положительных скачков траектории из A, а v — число отрицательных скачков, то, очевидно, $u+v=2n,\ \ u-v=2y$. Отсюда находим $u=n+y,\ \ v=n-y$ и $\sharp(A)=C_{2n}^{n-y}$, и в целом

$$\mathbf{P}(\sup_{1\le k\le 2n} S_k<y)=1-\frac{C_{2n}^{n-y}}{C_{2n}^{n}}. \tag{6}$$

Теперь займемся нахождением вероятности

$$\mathbf{P}(\sup_{1\le k\le 2n}|S_k|\ge y).$$

Для этого нам нужно подсчитать количество траекторий, выходящих за пределы полосы $\{(u,v):\ -y<v<y\}$. Обозначим множество таких траекторий через B. Пусть B_1 — множество траекторий, когда-либо достигающих верхней границы полосы, а C_1 — множество траекторий, когда-либо достигающих нижней границы полосы. Как уже подсчитано,

$$\sharp(B_1)=\sharp(C_1)=C_{2n}^{n-y}.$$

Далее, пусть B_2 — множество траекторий из B_1, которые после достижения уровня y (в некоторый момент времени m_1) двинулись вниз и достигли также уровня $-y$ в некоторый момент m_2, то есть эти траектории принадлежат также C_1. Аналогично введем C_2 — множество траекторий из C_1, которые после достижения уровня $-y$ двинулись вверх и достигли также уровня y в некоторый момент времени, то есть эти траектории принадлежат также B_1. Если при подсчете $\sharp(B)$ мы будем суммировать $\sharp(B_1)+\sharp(C_1)$, то $\sharp(B_2)$ и $\sharp(C_2)$ мы посчитаем дважды. Следовательно, один раз нужно вычесть $\sharp(B_2)+\sharp(C_2)$.

Для нахождения $\sharp(B_2)$ опять воспользуемся зеркальными отображениями траектории, только теперь будет два таких отображения. Сначала отобразим зеркально часть траектории, соответствующую интервалу времени $m_1+1\le k\le 2n$ относительно прямой на уровне y. Поскольку исходная траектория после достижения уровня y достигала еще уровень $-y$, то после произведенного зеркального отображения преобразованная траектория в некоторый момент m_2 достигнет уровня $3y$. Сделаем еще одно зеркальное отображение: часть полученной траектории, соответствующую интервалу времени $m_2+1\le k\le 2n$ отобразим зеркально относительно прямой на уровне $3y$. Полученная таким образом траектория в момент времени $2n$ придет в точку $4y$. Нетрудно найти число таких траекторий. Если u — число положительных скачков, а v — число отрицательных скачков, то, очевидно, $u+v=2n,\ \ u-v=4y$. Отсюда находим $u=n+2y,\ \ v=n-2y$. Очевидно, множество преобразованных таким образом траекторий находится во взаимно однозначном соответствии с B_2, поэтому

$$\sharp(B_2) = \sharp(C_2) = C_{2n}^{n-2y}.$$

Теперь рассмотрим множество B_3 траекторий, которые поочередно достигают верхнюю границу полосы, потом нижнюю, и потом опять верхнюю. Симметрично вводится множество C_3. Ясно, что траектории из B_3 входят также в B_1, C_1, B_2 и C_2, поэтому в формуле $\sharp(B_1)+\sharp(C_1)-\sharp(B_2)-\sharp(C_2)$ их количество дважды входило со знаком плюс и дважды со знаком минус. Поэтому надо один раз прибавить $\sharp(B_3)+\sharp(C_3)$, и т.д. Этот процесс называется методом включений – исключений. И каждый раз нужное количество траекторий вычисляется, прибегая к последовательности зеркальных отображений. В итоге получаем

$$\mathbf{P}(nD_n < y) = 1 - \mathbf{P}(\sup_{1\le k\le 2n} |S_k| \ge y) = 1 + 2\sum_{k=1}^{[n/y]} (-1)^k \frac{C_{2n}^{n-ky}}{C_{2n}^n} = \sum_{-[n/y]}^{[n/y]} (-1)^k \frac{C_{2n}^{n-ky}}{C_{2n}^n}. \quad (7)$$

Этот результат был получен в [6]. Используя формулу Стирлинга, из (6) и (7) можно получить следующие асимптотические результаты Н.В. Смирнова (1939). Если верна гипотеза H_1, то при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{2}} D_n^+ < y\right) \to 1 - \exp\{-2y^2\},$$

$$\mathbf{P}\left(\sqrt{\frac{n}{2}} D_n < y\right) \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp\{-2k^2y^2\}, \qquad y > 0.$$

Последняя функция носит название функции распределения Колмогорова. Она возникает также при исследования свойств критерия согласия Колмогорова.

5 Общий подход. Метод факторизации

В то время как для искомых распределений в граничных задачах явные формулы удается найти только в случае блужданий весьма частного вида, нахождение соответствующих характеристических (или производящих) функций доступно для существенно более широкого класса блужданий.

Напомним, что производящей функцией для целочисленной случайной величины X называется

$$\psi(z) = \mathbf{E} z^X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \mathbf{P}(X = k), \qquad |z| = 1.$$

Вместо характеристической функции нам будет удобнее использовать так называемое преобразование Лапласа-Стилтьеса (ПЛС)

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E} e^{\lambda X} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y),$$

где $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $F(y) = \mathbf{P}(X < y)$. ПЛС превращается в характеристическую функцию при замене $\lambda = it$. Отметим, что ПЛС

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \qquad \text{где} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty, \qquad \operatorname{Re}\lambda = 0,$$

может быть определено для любой функции G ограниченной вариации. Если изучается совместное распределение пары случайных величин (W, Y), то и ПЛС будет двойным. В случае, когда W принимает только целые неотрицательные значения, удобно рассматривать двойное ПЛС в виде

$$\mathbf{E}(z^W e^{\lambda Y}) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} \mathbf{P}(W = n,\, X \in dy).$$

Хорошо известно, что ПЛС распределений находятся во взаимно однозначном и взаимно непрерывном (в смысле слабой сходимости, если говорить о распределениях) соответствии с распределениями. Особенностью граничных задач для случайных блужданий является то обстоятельство, что легче работать с ПЛС распределений граничных функционалов. И если ПЛС найдены (в явном или неявном виде), то далее приходится прилагать усилия, чтобы их обратить — в точном или асимптотическом виде. Эта схема действий является типичной для многих граничных задач.

Есть еще одно обстоятельство, которое вынуждает нас прибегать к использованию ПЛС. Точные решения в граничных задачах сравнительно легко находятся, если отсутствует эффект перескока через границу, либо если перескок имеет экспоненциальное (или геометрическое для целочисленных блужданий) распределение. Перескок отсутствовал в рассмотренных выше примерах с задачей о разорении и с критерием Колмогорова - Смирнова. Наличие перескока сразу же затрудняет использование комбинаторных методов. В этой ситуации некоторые исследователи попросту игнорируют перескок и вместо точных решений получают тем самым некую аппроксимацию. Именно так в свое время были получены А.Вальдом его приближения для вероятностей ошибок в последовательном критерии [2]. К сожалению, их точность невелика. Другие авторы пытаются заменить распределение перескока чем-то другим, например, предельным распределением при неограниченном удалении границы (см. [7]).

Использование ПЛС позволяет полностью учесть в точном виде влияние перескока на решение той или иной граничной задачи.

5.1 Основное тождество

Для произвольного борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ введем момент первого достижения этого множества случайным блужданием $\{S_n,\ n \geq 1\}$:

$$N = \min\{n \geq 1 :\ S_n \in B\}, \qquad \overline{B} = \mathbb{R} \setminus B.$$

Допускается, что траектория может никогда не достигнуть множества B. Полагаем $N = \infty$, если $S_n \in \overline{B}$ при всех n.

Нас будет интересовать совместное распределение пары $(N,\, S_N)$. Введем двойное преобразование

$$Q(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N};\ N < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_B e^{\lambda y} \mathbf{P}(N = n,\, S_N \in dy),$$

и, кроме того, нам потребуется функция

$$Q_0(z, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda S_n};\ N > n) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{\overline{B}} e^{\lambda y} \mathbf{P}(N > n,\, S_n \in dy).$$

Теорема 1 (см.[5, т.2, гл.18]) *Для* $|z| < 1$ *и* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *справедливо тождество*

$$(1 - z\varphi(\lambda))(1 + Q_0(z,\lambda)) = 1 - Q(z,\lambda). \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину S_n на событии $\{N > n\}$ и прибавим к ней еще одно слагаемое X_{n+1}. В итоге мы либо по-прежнему останемся в $\overline{B}$, либо в момент $n+1$ впервые достигнем множества B. При суммировании независимых случайных величин их ПЛС перемножаются, поэтому для них будем иметь при $n = 1, \dots$

$$\varphi(\lambda) \int\limits_{\overline{B}} e^{\lambda y} \mathbf{P}(N > n,\, S_n \in dy)$$

$$= \int\limits_{\overline{B}} e^{\lambda y} \mathbf{P}(N > n+1,\, S_{n+1} \in dy) + \int\limits_{B} e^{\lambda y} \mathbf{P}(N = n+1,\, S_{n+1} \in dy).$$

Умножим обе части на z^{n+1} и просуммируем по n от единицы до бесконечности. В результате получим

$$z\varphi(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda S_n};\ N > n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} \mathbf{E}(e^{\lambda S_{n+1}};\ N > n+1) + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} \mathbf{E}(e^{\lambda S_{n+1}};\ N = n+1),$$

то есть

$$z\varphi(\lambda) Q_0(z,\lambda) = Q_0(z,\lambda) - z \int\limits_{\overline{B}} e^{\lambda y} \mathbf{P}(X_1 \in dy)$$

$$+Q(z,\lambda) - z \int\limits_{B} e^{\lambda y} \mathbf{P}(X_1 \in dy), = Q_0(z,\lambda) + Q(z,\lambda) - z\varphi(\lambda).$$

то есть

$$(1 - z\varphi(\lambda)) Q_0(z,\lambda) = z\varphi(\lambda) - Q(z,\lambda)$$

или

$$(1 - z\varphi(\lambda))(1 + Q_0(z,\lambda)) = 1 - Q(z,\lambda).$$

Теорема доказана.

Итак, мы получили одно уравнение, содержащее две неизвестные функции. Оказывается, его можно решить и найти функции $Q(z,\lambda)$, $Q_0(z,\lambda)$ в случаях, когда $B = (-\infty, a]$, $B = (-\infty, a)$, $B = [b, \infty)$, $B = (b, \infty)$ (однограничные задачи), $B = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ (двуграничная задача, $a < 0$, $b > 0$), но для этого нам потребуется *факторизация* функции $1 - z\varphi(\lambda)$.

5.2 Факторизация

Теорема 2 *Для* $|z| < 1$ *и* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *имеет место факторизационное представление*

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_-(z,\lambda) R_0(z) R_+(z,\lambda), \tag{9}$$

где

$$R_-(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n\}; S_n < 0 \right) \right\},$$

$$R_+(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n\}; S_n > 0 \right) \right\}.$$

$$R_0(z) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}\left(S_n = 0 \right) \right\}.$$

Доказательство. В условиях теоремы имеем $|z\varphi(\lambda)| < 1$, поэтому можно записать

$$1 - z\varphi(\lambda) = \exp\{\ln(1 - z\varphi(\lambda))\} = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \varphi^n(\lambda) \right\} = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\, e^{\lambda S_n} \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\left(e^{\lambda S_n};\ S_n < 0 \right) \right\} R_0(z) \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\left(e^{\lambda S_n};\ S_n > 0 \right) \right\}.$$

Теорема доказана.

Функция $R_-(z,\lambda)$ называется отрицательной компонентой факторизации, $R_+(z,\lambda)$ — положительной. Отметим важные для дальнейшего свойства компонент факторизации.

При $|z| < 1$ положительная компонента $R_+(z,\lambda)$ является аналитической функцией переменной λ в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, непрерывной на границе, она ограничена и не обращается в нуль при $\operatorname{Re}\lambda \le 0$. Аналогичными свойствами в правой полуплоскости обладает отрицательная компонента $R_-(z,\lambda)$. Далее, пусть $S(A)$ обозначает множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_A e^{\lambda y} dG(y), \qquad \text{где} \quad \int_A |dG(y)| < \infty$$

и A — произвольное борелевское множество. Ясно, что $\mathbf{E}\left(e^{\lambda S_n};\ S_n > 0 \right)$ как функция переменной λ принадлежит $S([0,\infty))$ при всех n, а вместе с ней и функции $R_+(z,\lambda)$, $R_+^{-1}(z,\lambda)$ принадлежат $S([0,\infty))$. Точно так же заключаем, что функции $R_-(z,\lambda)$, $R_-^{-1}(z,\lambda)$ принадлежат $S((-\infty,0])$. Здесь мы используем тот факт что единица (она возникает при разложении экспоненты в ряд) тоже является элементом $S([0,\infty))$ и $S((-\infty,0])$, поскольку

$$1 = \int_{(-\infty,0]} e^{\lambda y} dE_1(y) = \int_{[0,\infty)} e^{\lambda y} dE_2(y),$$

где E_2 есть функция вырожденного в нуле распределения, а $E_1(y) = E_2(y+0)$.

Для последующего изложения нам потребуется следующее определение. Для всякой функции g, представимой в виде

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \qquad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty, \qquad \operatorname{Re}\lambda = 0,$$

положим по определению

$$[g(\lambda)]^A = \int_A e^{\lambda y} dG(y)$$

для любого борелевского множества A.

Возвращаясь к обозначениям, введенным в п.1, положим $\eta_+ = \eta_+(0)$ — номер первой положительной суммы в последовательности $S_1, S_2, \ldots$, а $\chi_+ = \chi_+(0)$ — величина первой положительной суммы. Аналогично введем $\eta_- = \eta_-(0)$ — номер первой отрицательной суммы в последовательности $S_1, S_2, \ldots$, а $\chi_- = \chi_-(0)$ — величина первой отрицательной суммы. Величина η_+ называется *верхним лестничным моментом*, а η_- — *нижним лестничным моментом*. Одновременно χ_+ называется *верхней лестничной высотой*, а χ_- называется *нижней лестничной высотой*. Дополнительно введенные величины еще называются строгими, в отличие от слабых, в определении которых используются величины $\eta^0_\pm(0)$ и $\chi^0_\pm(0)$. Как будет ясно из дальнейшего, лестничные моменты и лестничные высоты играют весьма существенную роль в решении граничных задач.

Теорема 3 *Для* $|z| < 1$ *и* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *имеют место следующие представления:*

$$R_\pm(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_\pm} e^{\lambda\chi_\pm};\ \eta_\pm < \infty), \tag{10}$$

$$R_0(z)R_\pm(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta^0_\pm} e^{\lambda\chi^0_\pm};\ \eta^0_\pm < \infty), \tag{11}$$

$$R_0(z) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta^0_+};\, \chi^0_+ = 0,\, \eta^0_+ < \infty) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta^0_-};\, \chi^0_- = 0,\, \eta^0_- < \infty). \tag{12}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1 и положим в ней $B = (0,\infty)$. Тогда $N = \eta_+$, $S_N = \chi_+$ и $Q(z,\lambda) = \mathbf{E}(z^{\eta_+}e^{\lambda\chi_+};\, \eta_+ < \infty)$. Используя факторизационное представление (9), из (8) получаем

$$R_0(z)R_-(z,\lambda)(1 + Q_0(z,\lambda)) = R_+^{-1}(z,\lambda)(1 - Q(z,\lambda)). \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что

$$R_0(z)R_-(z,\lambda)(1 + Q_0(z,\lambda)) \in S((-\infty,0]),$$

поэтому

$$[R_0(z)R_-(z,\lambda)(1 + Q_0(z,\lambda))]^{(0,\infty)} \equiv 0.$$

Значит, то же самое верно и для правой части (13):

$$[R_+^{-1}(z,\lambda)(1 - Q(z,\lambda))]^{(0,\infty)} \equiv 0.$$

Имеем

$$[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{(0,\infty)} = R_+^{-1}(z,\lambda) - [R_+^{-1}(z,\lambda)]^{\{0\}} = R_+^{-1}(z,\lambda) - 1,$$
$$[R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)]^{(0,\infty)} = R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda),$$

то есть

$$R_+^{-1}(z,\lambda) - 1 = R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda),$$

что и приводит к первому из соотношений (10).

Симметричными рассуждениями устанавливается второе из соотношений (10):

$$R_-(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_-}e^{\lambda\chi_-};\ \eta_- < \infty).$$

Пусть теперь $B = [0,\infty)$. Тогда $N = \eta^0_+$, $S_N = \chi^0_+$ и $Q(z,\lambda) = \mathbf{E}(z^{\eta^0_+}e^{\lambda\chi^0_+};\, \eta^0_+ < \infty)$. Пользуясь, как и ранее, представлением (9), из (8) получаем равенство

$$R_-(z,\lambda)Q_0(z,\lambda)) = -R_-(z,\lambda) + R_0^{-1}(z)R_+^{-1}(z,\lambda)(1 - Q(z,\lambda)).$$

Левая часть этого соотношения принадлежит $S((-\infty,0))$, то же самое должно выполняться для правой части, поэтому

$$[-R_-(z,\lambda) + R_0^{-1}(z)R_+^{-1}(z,\lambda)(1 - Q(z,\lambda))]^{[0,\infty)} \equiv 0.$$

Имеем
$$[-R_-(z,\lambda)]^{[0,\infty)} = -1,$$
$$[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{[0,\infty)} = R_+^{-1}(z,\lambda),$$
$$[R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)]^{[0,\infty)} = R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda),$$
то есть
$$R_0^{-1}(z)R_+^{-1}(z,\lambda) - 1 = R_0^{-1}(z)R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda),$$
что и приводит к соотношению $1 - Q(z,\lambda) = R_0(z)R_+(z,\lambda)$.

Тождество
$$R_0(z)R_-(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_-^0}e^{\lambda\chi_-^0};\ \eta_-^0 < \infty)$$
устанавливается аналогично.

Для доказательства (12) по-прежнему полагаем $B = [0,\infty)$. Действуя, как и при доказательстве (10), приходим к равенству
$$[R_+^{-1}(z,\lambda)(1 - Q(z,\lambda))]^{(0,\infty)} \equiv 0.$$
Здесь по-прежнему
$$[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{(0,\infty)} = R_+^{-1}(z,\lambda) - [R_+^{-1}(z,\lambda)]^{\{0\}} = R_+^{-1}(z,\lambda) - 1,$$
однако в связи с тем, что $Q(z,\lambda) \in S([0,\infty))$, имеем
$$[R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)]^{(0,\infty)} = R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda) - [R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)]^{\{0\}}.$$
Нетрудно видеть, что
$$[R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)]^{\{0\}} = \mathbf{E}(z^{\eta_+^0};\, \chi_+^0 = 0,\, \eta_+^0 < \infty)$$
то есть
$$R_+^{-1}(z,\lambda) - 1 = R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda) - \mathbf{E}(z^{\eta_+^0};\, \chi_+^0 = 0,\, \eta_+^0 < \infty),$$
что приводит к соотношению $1 - Q(z,\lambda) = R_+(z,\lambda)(1 - \mathbf{E}(z^{\eta_+^0};\, \chi_+^0 = 0,\, \eta_+^0 < \infty))$. Сравнивая это равенство с (11), получаем
$$R_0(z) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_+^0};\, \chi_+^0 = 0,\, \eta_+^0 < \infty),$$
и совершенно аналогично получается
$$R_0(z) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_-^0};\, \chi_-^0 = 0,\, \eta_-^0 < \infty).$$
Теорема доказана.

Мы одновременно получаем другие варианты факторизационных представлений. Например, такие:

Следствие 1 *Для* $|z| < 1$ *и* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *имеют место факторизационные представления*
$$1 - z\varphi(\lambda) = \big(1 - \mathbf{E}(z^{\eta_-}e^{\lambda\chi_-};\ \eta_- < \infty)\big)\big(1 - \mathbf{E}(z^{\eta_+^0}e^{\lambda\chi_+^0};\ \eta_+^0 < \infty)\big), \tag{14}$$
$$1 - z\varphi(\lambda) = \big(1 - \mathbf{E}(z^{\eta_-^0}e^{\lambda\chi_-^0};\ \eta_-^0 < \infty)\big)\big(1 - \mathbf{E}(z^{\eta_+}e^{\lambda\chi_+};\ \eta_+ < \infty)\big). \tag{15}$$

5.3 Одниграничные задачи

Этот раздел также посвящен нахождению функции $Q(z,\lambda)$, участвующей в основном тождестве (8) в одниграничных задачах, то есть когда $B=(-\infty,a]$, $B=(-\infty,a)$, $B=[b,\infty)$, $B=(b,\infty)$, $a<0$, $b>0$.

Теорема 4 *Для* $|z|<1$ *и* $\operatorname{Re}\lambda=0$ *имеют место представления*

$$Q(z,\lambda)=R_+(z,\lambda)[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{(b,\infty)}, \qquad \text{если} \quad B=(b,\infty), \tag{16}$$

$$Q(z,\lambda)=R_+(z,\lambda)[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)}, \qquad \text{если} \quad B=[b,\infty), \tag{17}$$

$$Q(z,\lambda)=R_-(z,\lambda)[R_-^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,a)}, \qquad \text{если} \quad B=(-\infty,a), \tag{18}$$

$$Q(z,\lambda)=R_-(z,\lambda)[R_-^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,a]}, \qquad \text{если} \quad B=(-\infty,a]. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $B=(b,\infty)$. Обратимся к тождеству (13), полученному ранее из (8) с помощью факторизационного представления (9). При $b>0$ левая часть (13) принадлежит $S((-\infty,b])$, значит

$$[R_+^{-1}(z,\lambda)(1-Q(z,\lambda))]^{(b,\infty)}\equiv 0,$$

или, иначе,

$$[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{(b,\infty)}=[R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)]^{(b,\infty)}=R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)$$

в связи с тем, что $R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)\in S((b,\infty))$. Тем самым соотношение (16) доказано.

Пусть теперь $B=[b,\infty)$. Воспользуемся, как и в доказательстве теоремы 3, соотношением

$$R_-(z,\lambda)Q_0(z,\lambda))=-R_-(z,\lambda)+R_0^{-1}(z)R_+^{-1}(z,\lambda)(1-Q(z,\lambda)),$$

которое также следует из (8). Здесь левая часть принадлежит $S((-\infty,b))$, поэтому

$$[-R_-(z,\lambda)+R_0^{-1}(z)R_+^{-1}(z,\lambda)(1-Q(z,\lambda))]^{[b,\infty)}\equiv 0.$$

Очевидно, что $[R_-(z,\lambda)]^{[b,\infty)}\equiv 0$. Далее, в наших условиях имеет место $Q(z,\lambda)\in S([b,\infty))$, поэтому также $R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)\in S([b,\infty))$. Следовательно,

$$[R_+^{-1}(z,\lambda)(1-Q(z,\lambda))]^{[b,\infty)}=[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)}-[R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda)]^{[b,\infty)}$$

$$=[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)}-R_+^{-1}(z,\lambda)Q(z,\lambda),$$

то есть $Q(z,\lambda)=R_+(z,\lambda)[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)}$.

Доказательство равенств (18) и (19) проводится симметричными рассуждениями. Теорема доказана.

Итак, мы выяснили, что двойные преобразования распределений в одниграничных задачах выражаются через компоненты факторизации. При решении основного тождества мы использовали разновидность так называемого метода Винера–Хопфа, который имеет солидную историю в том числе в теории интегральных уравнений. Казалось бы, что использование факторизации является здесь весьма хитроумным аналитическим приемом, позволяющим решить уравнение. Однако в нашем случае компоненты факторизации имеют вполне определенный вероятностный смысл.

Действительно, представим себе картину, как происходит движение траектории случайного блуждания к барьеру на уровне $b > 0$. Сначала дождемся первой положительной суммы, достигнув высоты χ_+. Рассматривая теперь эту точку в качестве стартовой, продолжим траекторию и дождемся момента первого превышения уровня χ_+. В этот момент мы превысим уровень χ_+ на случайную величину, не зависящую от χ_+ и одинаково с ней распределенную. Затем начинаем траекторию с этого уже достигнутого уровня и ждем первого момента его превышения, и т.д. В итоге заключаем, что движение к барьеру осуществляется независимыми скачками, одинаково распределенными с лестничной высотой χ_+, то есть S_N равно сумме этих скачков. Если внимательно посмотреть теперь на момент N достижения уровня b, то обнаружим, что он равен сумме промежутков времени между лестничными скачками, одинаково распределенных с η_+. Таким образом, естественно ожидать, что совместное распределение пары (N, S_N) должно выражаться через совместное распределение пары (η_+, χ_+).

Как уже отмечалось, нахождение явных формул для распределений в граничных задачах в общем случае является малодоступной задачей, а вот нахождение преобразований Лапласа-Стилтьеса (двойных или одинарных) этих распределений вполне осуществимо. Естественно теперь ожидать, что двойное преобразование над парой (N, S_N) должно выражаться через двойное преобразование над (η_+, χ_+). Так оно и есть. Мы выразили решение через компоненты факторизации, однако в теореме 3 установлено, что компоненты факторизации мало чем отличаются от двойных преобразований над лестничными величинами.

Это означает, что использование компонент факторизации для решения уравнения (8) вполне соответствует сути вещей.

5.4 Двуграничная задача

Пусть теперь в основном тождестве $B = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$, то есть

$$N = \min\{n \geq 1 : \ S_n \notin (a,\, b)\}, \qquad a < 0,\ b > 0.$$

Первым делом отметим, что N — собственная случайная величина, т.е. $\mathbf{P}(N < \infty) = 1$. Это легко выводится из следующих соображений: для любого натурального числа r имеем

$$\mathbf{P}(N = \infty) = \mathbf{P}(S_1 \in (a,b),\ S_2 \in (a,b),\ \ldots)$$

$$\leq \mathbf{P}(|X_1 + \ldots + X_r| < b - a,\ |X_{r+1} + \ldots + X_{2r}| < b - a,\ \ldots).$$

В правой части стоит вероятность одновременного осуществления бесконечного числа независимых событий, имеющих одинаковую вероятность

$$p = \mathbf{P}(|X_1 + \ldots + X_r| < b - a).$$

Если распределение X_1 не вырождено в нуле, то при достаточно большом r и некотором $\delta > 0$ будет иметь место $1 - p = \mathbf{P}(|X_1 + \ldots + X_r| \geq b - a) \geq \delta$, то есть $p < 1$ и $\mathbf{P}(N = \infty) = 0$.

Пусть, как и ранее,

$$Q_0(z,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda S_n};\ N > n) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int\limits_{(a,b)} e^{\lambda y} \mathbf{P}(N > n,\, S_n \in dy),$$

а вот функцию $Q(z,\lambda)$ разобьем на две: $Q(z,\lambda = Q_1(z,\lambda) + Q_2(z,\lambda)$, где

$$Q_1(z,\lambda) = \mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N};\ S_N \le a) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int\limits_{(-\infty,a]} e^{\lambda y}\mathbf{P}(N=n,\, S_N \in dy),$$

$$Q_2(z,\lambda) = \mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N};\ S_N \ge b) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int\limits_{[b,\infty)} e^{\lambda y}\mathbf{P}(N=n,\, S_N \in dy).$$

Для двуграничной задачи основное тождество выглядит следующим образом.

$$(1 - z\varphi(\lambda))(1 + Q_0(z,\lambda)) = 1 - Q_1(z,\lambda) - Q_2(z,\lambda). \tag{20}$$

Нам предстоит найти участвующие в (20) неизвестные функции Q_1 и Q_2.

Используя факторизационное представление (9), из (20) получаем

$$R_0(z)R_-(z,\lambda)(1 + Q_0(z,\lambda)) = R_+^{-1}(z,\lambda)(1 - Q_1(z,\lambda) - Q_2(z,\lambda)). \tag{21}$$

Заметим опять, что левая часть (21) принадлежит $S((-\infty,b))$, значит

$$[R_+^{-1}(z,\lambda)(1 - Q_1(z,\lambda) - Q_2(z,\lambda))]^{[b,\infty)} \equiv 0,$$

или, иначе,

$$[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)} = [R_+^{-1}(z,\lambda)Q_1(z,\lambda)]^{[b,\infty)} + [R_+^{-1}(z,\lambda)Q_2(z,\lambda)]^{[b,\infty)}$$
$$= [R_+^{-1}(z,\lambda)Q_1(z,\lambda)]^{[b,\infty)} + R_+^{-1}(z,\lambda)Q_2(z,\lambda)$$

в связи с тем, что $R_+^{-1}(z,\lambda)Q_2(z,\lambda) \in S([b,\infty))$. Перепишем это равенство по-другому:

$$Q_2(z,\lambda) = R_+(z,\lambda)[R_+^{-1}(z,\lambda)]^{[b,\infty)} - R_+(z,\lambda)[R_+^{-1}(z,\lambda)Q_1(z,\lambda)]^{[b,\infty)}. \tag{22}$$

Симметричными рассуждениями получаем другое равенство:

$$Q_1(z,\lambda) = R_-(z,\lambda)[R_-^{-1}(z,\lambda)]^{(-\infty,a]} - R_-(z,\lambda)[R_-^{-1}(z,\lambda)Q_2(z,\lambda)]^{(-\infty,a]}. \tag{23}$$

Полученные выражения наводят на мысль о введении специальных операторов, связанных с компонентами факторизации. Для всякой функции g, представимой в виде

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \qquad \text{где} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty, \qquad \operatorname{Re}\lambda = 0,$$

положим по определению

$$(\mathcal{L}_- g)(z,\lambda) = R_-(z,\lambda)[R_-^{-1}(z,\lambda)g(\lambda)]^{(-\infty,a]},$$

$$(\mathcal{L}_+ g)(z,\lambda) = R_+(z,\lambda)[R_+^{-1}(z,\lambda)g(\lambda)]^{[b,\infty)}.$$

Здесь $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, функция g также может зависеть от переменной z. Как видно из определения, операторы сами зависят от z, a и b, для краткости записи мы не подчеркиваем это обстоятельство в обозначениях операторов. Положим по определению $e(\lambda) = e(z,\lambda) \equiv 1$. В новых обозначениях формулы (22) и (23) перепишутся следующим образом:

$$Q_2(z,\lambda) = (\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda) - (\mathcal{L}_+ Q_1)(z,\lambda), \tag{24}$$

$$Q_1(z,\lambda) = (\mathcal{L}_- e)(z,\lambda) - (\mathcal{L}_- Q_2)(z,\lambda). \tag{25}$$

Если $a = -\infty$, то $Q_1 \equiv 0$ и (24) превращается в равенство

$$Q_2(z,\lambda) = (\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda),$$

что совпадает с утверждением (17) для однограничной задачи. Если же $b = \infty$, то имеем

$$Q_1(z,\lambda) = (\mathcal{L}_- e)(z,\lambda),$$

что также установлено ранее. Подставляя в (24) выражение для $Q_1(z,\lambda)$ из (25), будем иметь тождество

$$Q_2(z,\lambda) = (\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda) - (\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- e)(z,\lambda) + (\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- Q_2)(z,\lambda), \tag{26}$$

и аналогично

$$Q_1(z,\lambda) = (\mathcal{L}_- e)(z,\lambda) - (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda) + (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+ Q_1)(z,\lambda).$$

Производя подстановку в последнее слагаемое в (26) выражения для Q_2, получим рекуррентный процесс: для любого $n \ge 0$

$$Q_2(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^k \big((\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda) - (\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- e)(z,\lambda)\big) + (\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^{n+1} Q_2(z,\lambda), \tag{27}$$

и аналогично

$$Q_1(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+)^k \big((\mathcal{L}_- e)(z,\lambda) - (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda)\big) + (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+)^{n+1} Q_1(z,\lambda).$$

5.5 Вероятностный смысл операторов $\mathcal{L}_\pm$

Итак, мы видим, что введенные выше операторы $\mathcal{L}_\pm$ играют существенную роль при нахождении двойных преобразований момента первого достижения границы и величины перескока в однограничной и двуграничной задачах. Ниже выяснится, что с помощью этих операторов могут быть найдены решения и в других граничных задачах. По этой причине возникает потребность более детального изучения этих операторов. Начнем с выяснения вероятностного смысла операторов $\mathcal{L}_\pm$.

Пусть $\tau \ge 0$ — произвольный момент остановки, возможно, несобственный. На событии $\{\tau < \infty\}$ определим случайные величины

$$\tau_+(b) = \inf\{n \ge \tau : \ S_n \ge b\},$$

$$\tau_-(a) = \inf\{n \ge \tau : S_n \le a\}.$$

Предположим, что нам известно двойное преобразование

$$f(z,\lambda) = \mathbf{E}\left(z^{\tau} \exp\{\lambda S_\tau\};\ \tau < \infty\right).$$

Как найти функции

$$f_+(z,\lambda) = \mathbf{E}\left(z^{\tau_+(b)} \exp\{\lambda S_{\tau_+(b)}\};\ \tau_+(b) < \infty\right),$$

$$f_-(z,\lambda) = \mathbf{E}\left(z^{\tau_-(a)} \exp\{\lambda S_{\tau_-(a)}\};\ \tau_-(a) < \infty\right)?$$

Следующее утверждение получено в [8].

Теорема 5 *Для* $|z| < 1$ *и* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *справедливы соотношения*

$$f_\pm(z,\lambda) = (\mathcal{L}_\pm f)(z,\lambda).$$

Доказательство этой теоремы простое, но весьма громоздкое, поэтому мы его здесь не приводим и отсылаем читателя к [8]. Заметим, что в условиях теоремы распределения скачков блуждания до момента τ и после него могут не совпадать.

Теперь мы можем придать вероятностный смысл слагаемым в правой части (24). Первое из них касается всех траекторий, выходящих из нуля и когда-либо достигающих уровня b. Поскольку среди них есть траектории, которые раньше достигли нижней границы полосы, то вклад этих траекторий нужно вычесть, что и делается: сначала мы рассматриваем траектории, первый выход которых из полосы происходит через нижнюю границу, этому соответствует двойное преобразование $Q_1(z,\lambda)$, а потом заботимся о том, чтобы после достижения нижней границы была достигнута верхняя, то есть применяем оператор $\mathcal{L}_+$ к $Q_1(z,\lambda)$.

Нетрудно также видеть, что соотношения (26) и (27) являют собой реализацию метода включений – исключений.

5.6 О распределении числа пересечений полосы

Далее приведем пример еще одной граничной задачи для случайных блужданий, решение которой выражается через операторы $\mathcal{L}_\pm$. Речь пойдет об изучении распределения числа пересечений полосы $a < y < b$ на координатной плоскости точек (x,y) траекторией случайного блуждания $\{(n,S_n)\}_{n=0}^\infty$. Известно [1, гл.12], что число пересечений конечно с вероятностью единица, если сходится один из рядов

$$\sum \frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n > 0) < \infty \qquad \text{или} \qquad \sum \frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n < 0) < \infty, \tag{28}$$

для чего, в свою очередь, достаточно, чтобы выполнялось условие $\mathbf{E}X \neq 0$.

Пусть выполнено (28). Для рассматриваемого случайного блуждания определим моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n \ge \tau_{i-1}^+ : S_n \le a\}, \quad \tau_i^+ = \inf\{n \ge \tau_i^- : S_n \ge b\}, \quad i \ge 1.$$

Здесь всегда подразумевается, что $\inf\emptyset = \infty$. Рассмотрим случайную величину η, равную числу пересечений указанной полосы снизу вверх траекторией $\{(n,S_n), n \ge 0\}$. Очевидно, $\mathbf{P}(\eta \ge k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$.

Из теоремы 5 следует, что при $|z| < 1$ и $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_k^+}\exp\{\lambda S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty\right) = \left((\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^k e\right)(z,\lambda), \tag{29}$$

то есть

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty) = \lim_{z\to 1}\left((\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^k e\right)(z,0).$$

Этот факт был замечен в [8], и там же найдена асимптотика вероятности $\mathbf{P}(\eta \ge k)$ при $b - a \to \infty$ в условиях Крамера на распределение X. Для этого потребовалось исследовать асимптотическое поведение операторов $\mathcal{L}_\pm$, что будет предметом наших дальнейших рассмотрений.

5.7 Явные формулы для компонент факторизации

Предположим, что наряду с факторизационным представлением (9) мы нашли другое представление

$$1 - z\varphi(\lambda) = r_-(z,\lambda) r_+(z,\lambda), \qquad |z| < 1, \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \tag{30}$$

компоненты которого обладают аналогичными свойствами: при $|z| < 1$ функция $r_+(z,\lambda)$ является аналитической функцией переменной λ в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, непрерывной на границе, она ограничена и $\inf_{\operatorname{Re}\lambda\le 0} |r_+(z,\lambda)| > 0$. Аналогичными свойствами в правой полуплоскости обладает функция $r_-(z,\lambda)$. Кстати, факторизация, обладающая такими свойствами, называется *канонической* ([1, гл.12]). Итак, можно записать

$$R_-(z,\lambda) R_0(z) R_+(z,\lambda) = r_-(z,\lambda) r_+(z,\lambda)$$

или

$$\frac{R_-(z,\lambda)R_0(z)}{r_-(z,\lambda)} = \frac{r_+(z,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}, \qquad |z| < 1, \quad \operatorname{Re}\lambda = 0.$$

Тогда функция

$$A(z,\lambda) := \begin{cases} \dfrac{R_-(z,\lambda)R_0(z)}{r_-(z,\lambda)}, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda \ge 0, \\[2ex] \dfrac{r_+(z,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda \le 0 \end{cases}$$

будет аналитической и ограниченной на всей плоскости переменной λ. Следовательно, в силу известной теоремы Лиувилля она равна некоторой константе c, которая может зависеть от z: $c = c(z)$. Таким образом получаем:

$$\frac{R_-(z,\lambda)R_0(z)}{r_-(z,\lambda)} = c(z) = \frac{r_+(z,\lambda)}{R_+(z,\lambda)}.$$

Тем самым установлена следующая теорема единственности канонической факторизации.

Теорема 6 *Если наряду с канонической факторизацией* (9) *имеется другая каноническая факторизация* (30)*, то компоненты этих факторизационных представлений могут отличаться только множителем, зависящим от z:*

$$R_-(z,\lambda)R_0(z) = c(z) r_-(z,\lambda), \qquad R_+(z,\lambda) = c^{-1}(z) r_+(z,\lambda).$$

Теперь мы попробуем искусственно разложить функцию $1 - z\varphi(\lambda)$ на множители, обладающие всеми свойствами канонической факторизации, и тогда, в силу теоремы единственности, сможем утверждать, что мы нашли компоненты исходной факторизации $R_\pm(z,\lambda)$ с точностью до зависящего от z множителя, который, кстати, сократится при подстановке в операторы $\mathcal{L}_\pm$. Эти действия мы будем производить для некоторых специальных классов распределений.

5.7.1 Нерешетчатые распределения

Следуя А.А. Боровкову [9, гл.4], обозначим через $\mathcal{R}$ класс распределений, для которых функция $\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\};\ X<0)$ или $\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\};\ X>0)$ является рациональной. Нетрудно видеть, что принадлежность распределения классу $\mathcal{R}$ означает, что распределение скачков блуждания в первом случае имеет на отрицательной полуоси плотность в виде экспоненциального полинома

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{l_k} a_{kj}x^{j-1}e^{\beta_k x}, \qquad \operatorname{Re}\beta_k>0, \qquad x<0,$$

либо, во втором случае, на положительной полуоси плотность имеет вид

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{l_k} a_{kj}x^{j-1}e^{-\beta_k x}, \qquad \operatorname{Re}\beta_k>0, \qquad x>0.$$

Заметим, что класс $\mathcal{R}$ достаточно широк, он является всюду плотным в смысле слабой сходимости на множестве всех распределений ([9, гл.4]). Наша задача — найти явный вид компонент факторизации для распределений из класса $\mathcal{R}$. Итак, пусть

$$\mathbf{E}(e^{\lambda X};\ X<0)=\frac{R(\lambda)}{P(\lambda)},$$

где $R(\lambda)$ и $P(\lambda)$ — полиномы. Предположим, что степень $P(\lambda)$ равна k, тогда степень $R(\lambda)$ обязана быть меньше k, поскольку $\mathbf{E}(e^{\lambda X};\ X<0)\to 0$, если $\lambda=\mathrm{Re}\lambda\to\infty$. Функция $\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\};\ X<0)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$ и непрерывна на мнимой оси, поэтому нули полинома $P(\lambda)$ должны лежать в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda<0$.

Покажем, что в левой полуплоскости будет также ровно k нулей функции $1-z\varphi(\lambda)$ при $|z|<1$. Для этого в плоскости переменной λ начертим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $(-A,iA)$, $(0,iA)$, $(0,-iA)$, $(-A,-iA)$. При достаточно больших значениях A имеем $|\varphi(\lambda)|\le 1,\ \ \lambda\in\Gamma$. Это неравенство очевидно для той части контура, которая лежит на мнимой оси. На оставшейся части контура Γ имеем

$$|\mathbf{E}(e^{\lambda X};\ X\ge 0)|\le \mathbf{P}(X\ge 0)<1,$$

$$|\mathbf{E}(e^{\lambda X};\ X<0)|=\frac{R(\lambda)}{P(\lambda)}\to 0, \qquad |\lambda|\to\infty,$$

поскольку степень $R(\lambda)$ меньше степени $P(\lambda)$. Значит, на этом контуре $|z\varphi(\lambda)|<1$ при $|z|<1$. Таким образом, при обходе переменной λ по контуру Γ значение функции $z\varphi(\lambda)$ остается внутри единичного круга. Тогда значение функции $1-z\varphi(\lambda)$ будет находиться внутри круга единичного радиуса с центром в единице. Это значит, что при обходе переменной λ контура Γ значение функции $1-z\varphi(\lambda)$ не обойдет ни разу вокруг нуля, то есть не получит приращения аргумента.

Далее,

$$1-z\varphi(\lambda)=1-z\mathbf{E}(e^{\lambda X};\ X<0)-z\mathbf{E}(e^{\lambda X};\ X\ge 0).$$

Последнее слагаемое не имеет особенностей в левой полуплоскости, поэтому нули полинома $P(\lambda)$ будут единственными особенностями (полюсами) функции $1-z\varphi(\lambda)$, и при достаточно больших значениях A все они лежат внутри контура Γ. Значит, в силу принципа аргумента аналитической функции внутри контура находится ровно k нулей функции $1 - z\varphi(\lambda)$ (с учетом их кратностей), обозначим их $\lambda_1(z), \ \dots, \ \lambda_k(z)$.

Положим

$$\Lambda(z,\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j(z)), \qquad r_-(z,\lambda) = \frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}, \qquad r_+(z,\lambda) = \frac{(1 - z\varphi(\lambda))P(\lambda)}{\Lambda(z,\lambda)}.$$

Ясно, что $1 - z\varphi(\lambda) = r_-(z,\lambda)r_+(z,\lambda)$. Это представление удовлетворяет всем свойствам (по переменной λ), предъявляемым к канонической факторизации (см. [1]), и в соответствии с теоремой 6 при некотором $c(z)$ имеет место

$$R_-(z,\lambda) = \frac{c(z)}{R_0(z)}\frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Осталось уточнить значение $c(z)$. Пусть, к примеру, старший коэффициент у $P(\lambda)$ равен единице. Тогда $\lim_{\lambda\to\infty} r_-(z,\lambda) = 1$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty} r_-(z,\lambda)\frac{c(z)}{R_0(z)} = \lim_{\lambda\to\infty} R_-(z,\lambda) = 1 - \lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{E}(z^{\eta_-}e^{\lambda\chi_-};\, \eta_- < \infty) = 1,$$

то есть $c(z) = R_0(z)$, $\ r_-(z,\lambda) = R_-(z,\lambda)$ и $\ r_+(z,\lambda) = R_0(z)R_+(z,\lambda)$.

Если рациональной является функция

$$\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\};\, X > 0) = \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)}, \qquad \text{где} \qquad P(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - p_i), \tag{31}$$

то по аналогии с предыдущим случаем находим

$$R_+(z,\lambda) = \frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}, \qquad R_0(z)R_-(z,\lambda) = \frac{(1 - z\varphi(\lambda))P(\lambda)}{\Lambda(z,\lambda)},$$

где по-прежнему обозначено

$$\Lambda(z,\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j(z)),$$

и на этот раз $\lambda_1(z), \ \dots, \ \lambda_k(z)$ — нули функции $1 - z\varphi(\lambda)$ (с учетом их кратностей), лежащие в правой полуплоскости.

Заметим, что нормальное распределение не принадлежит классу $\mathcal{R}$, для него уравнение $1 - z\varphi(\lambda) = 0$ имеет бесконечно много решений в каждой из полуплоскостей. Точные формулы для компонент факторизации в этом случае содержатся в [10].

5.7.2 Целочисленные случайные блуждания

Если случайная величина X принимает только значения вида kh, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ при некотором $h > 0$, то ее распределение обычно называют арифметическим. Как правило, в этом случае при решении граничных задач можно полагать $h = 1$ без потери общности. Тем самым мы приходим к рассмотрению случайных блужданий по решетке целых чисел. Рассмотрим особенности, которые возникают при рассмотрении целочисленных случайных блужданий.

Во–первых, здесь удобнее оперировать производящей функцией

$$\mathbf{E}\,\mu^X = \psi(\mu) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu^k \mathbf{P}(X = k), \qquad |\mu| = 1,$$

которая получается из $\varphi(\lambda)$ заменой $\mu = e^\lambda$, то есть $\varphi(\lambda) = \psi(e^\lambda)$. Во–вторых, факторизационное представление (9) теперь перепишется в виде

$$1 - z\psi(\mu) = \tilde{R}_-(z,\mu) R_0(z) \tilde{R}_+(z,\mu), \qquad |\mu| = 1, \tag{32}$$

где обозначено $\tilde{R}_\pm(z,\mu) = R_\pm(z,\lambda)$.

Свойста компонент факторизации $\tilde{R}_\pm(z,\mu)$ очевидны. При $|z| < 1$ положительная компонента $\tilde{R}_+(z,\mu)$ является аналитической функцией переменной μ в единичном круге $|\mu| < 1$, непрерывной на границе, она ограничена и не обращается в нуль при $|\mu| \le 1$. Аналогичными свойствами во внешности единичного круга обладает отрицательная компонента $\tilde{R}_-(z,\mu)$. Далее, пусть $S(m,n)$ обозначает множество функций g, имеющих вид

$$g(\mu) = \sum_{k=m}^{n} g_k \mu^k, \qquad \text{где} \quad \sum_{k=m}^{n} |g_k| < \infty.$$

Ясно, что $\mathbf{E}\left(\mu^{S_n};\, S_n > 0\right)$ как функция переменной μ принадлежит $S(1,\infty)$ при всех n, а вместе с ней и

$$C_\mp := \mp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\left(\mu^{S_n};\, S_n > 0\right) \in S(1,\infty).$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{R}_\pm(z,\mu) = \exp\left\{C_\mp\right\} = 1 \mp C_\mp + \frac{C_\mp^2}{2} + \ldots \in S(0,\infty).$$

Точно так же заключаем, что функции $\tilde{R}_-(z,\mu)$, $\tilde{R}_-^{-1}(z,\mu)$ принадлежат $S(-\infty,0)$.

Если функция g представима в виде

$$g(\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \mu^k, \qquad \text{где} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k| < \infty,$$

то полагаем по определению

$$[g(\mu)]^A = \sum_{k \in A} g_k \mu^k.$$

для любого подмножества A множества целых чисел.

В новых обозначениях операторы $\mathcal{L}_\pm$ примут следующий вид:

$$(\tilde{\mathcal{L}}_- g)(z,\mu) = \tilde{R}_-(z,\mu)[\tilde{R}_-^{-1}(z,\mu) g(\mu)]^{(-\infty,a]},$$

$$(\tilde{\mathcal{L}}_+ g)(z,\mu) = \tilde{R}_+(z,\mu)[\tilde{R}_+^{-1}(z,\mu) g(\mu)]^{[b,\infty)},$$

здесь $a < 0$ и $b > 0$ — целые числа.

Становится понятным, что для целочисленных случайных блужданий изложение факторизационного метода становится проще, если пользоваться введенными обозначениями, в которых интегралы заменяются суммами.

Отдельного рассмотрения заслуживает возможность нахождения в явном виде компонент факторизации для целочисленных случайных блужданий.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{R}}$ класс распределений целочисленных случайных величин, для которых функция $\mathbf{E}(\mu^X;\, X < 0)$ или $\mathbf{E}(\mu^X;\, X > 0)$ является рациональной. В частности, распределение случайной величины X принадлежит $\tilde{\mathcal{R}}$, если $\mathbf{P}(X \le C) = 1$ или $\mathbf{P}(X \ge -C) = 1$ при некотором $C > 0$. Убедимся в том, что для распределений из класса $\tilde{\mathcal{R}}$ компоненты факторизации могут быть найдены в явном виде.

Предположим для примера, что

$$\mathbf{E}(\mu^X;\, X < 0) = \sum_{-\infty}^{-1} \mu^j\, \mathbf{P}(X = j) = \frac{R(\mu)}{P(\mu)}, \tag{33}$$

где $R(\mu)$, $P(\mu)$ — полиномы, и $P(\mu) = \prod_{i=1}^{k}(\mu - p_i)$. Устремляя $\mu \to \infty$, убеждаемся, что степень $R(\mu)$ меньше k. Из аналитичности функции (33) при $|\mu| > 1$ заключаем, что все $p_i < 1$. Разложение на простые дроби (в случае, если все нули p_i простые)

$$\frac{R(\mu)}{P(\mu)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\mu - p_i}$$

говорит о том, что распределение X на отрицательной полуоси являет собой смесь геометрических распределений вида

$$\mathbf{P}(X = -m) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i p_i^m, \qquad m \ge 1.$$

Если среди нулей многочлена $P(\mu)$ имеются кратные, то в этой формуле кроме геометрических распределений будут присутствовать их свертки.

Далее замечаем, что на окружности $|\mu| = 1$ выполняется неравенство $|z\psi(\mu)| < 1$ при $|z| < 1$. Таким образом, при обходе переменной μ по единичной окружности значение функции $z\psi(\mu)$ остается внутри единичного круга. Тогда значение функции $1 - z\psi(\mu)$ будет находиться внутри круга единичного радиуса с центром в единице, и при обходе переменной μ единичной окружности значение функции $1 - z\psi(\mu)$ не получит приращения аргумента.

Далее,

$$1 - z\psi(\mu) = 1 - z\mathbf{E}(\mu^X;\ X < 0) - z\mathbf{E}(\mu^X;\ X \ge 0).$$

Последнее слагаемое не имеет особенностей внутри единичного круга, поэтому нули полинома $P(\mu)$ будут единственными особенностями (полюсами) функции $1 - z\psi(\mu)$, и все они лежат внутри единичного круга. Значит, в силу принципа аргумента аналитической функции внутри единичного круга находится ровно k нулей функции $1 - z\psi(\mu)$ (с учетом их кратностей), обозначим их $\mu_1(z),\ \ldots,\ \mu_k(z)$.

Положим, как и ранее,

$$\Lambda(z,\mu) = \prod_{j=1}^{k}(\mu - \mu_j(z)), \qquad \tilde{r}_-(z,\mu) = \frac{\Lambda(z,\mu)}{P(\mu)}, \qquad \tilde{r}_+(z,\mu) = \frac{(1 - z\psi(\mu))P(\mu)}{\Lambda(z,\mu)}.$$

Ясно, что $1 - z\psi(\mu) = \tilde{r}_-(z,\mu)\tilde{r}_+(z,\mu)$. Это представление удовлетворяет всем свойствам (по переменной μ), предъявляемым к канонической факторизации, поэтому при некотором $c(z)$ имеет место

$$\tilde{R}_-(z,\mu) = \frac{c(z)}{R_0(z)} \frac{\Lambda(z,\mu)}{P(\mu)}.$$

Осталось уточнить значение $c(z)$. Имеем $\lim_{\mu\to\infty}\tilde{r}_-(z,\mu)=1$ и

$$\lim_{\mu\to\infty}\tilde{r}_-(z,\mu)\frac{c(z)}{R_0(z)}=\lim_{\mu\to\infty}\tilde{R}_-(z,\mu)=1-\lim_{\mu\to\infty}\mathbf{E}(z^{\eta_-}\mu^{\chi_-};\,\eta_-<\infty)=1,$$

то есть $c(z)=R_0(z)$ и $\tilde{R}_-(z,\mu)=\tilde{r}_-(z,\mu)$.

Итак, в силу единственности компонент канонической факторизации имеем $\tilde{r}_\pm(z,\mu)=\tilde{R}_\pm(z,\mu)$.

Заметим, что для целочисленных случайных блужданий легче всего находить компоненты факторизации, когда одновременно

$$\mathbf{E}(\mu^X;\ X<0)=\frac{c_1}{\mu-p_1},\qquad \mathbf{E}(\mu^X;\ X>0)=\frac{c_2\mu(1-p_2)}{1-\mu p_2}. \tag{34}$$

Первое соотношение соответствует геометрическому убыванию вероятностей отрицательных значений X (если $p_1\neq 0$) и единственному отрицательному значению $\mathbf{P}(X=-1)=c_1$, если $p_1=0$. Второе соотношение соответствует геометрическому убыванию вероятностей положительных значений X (если $p_2\neq 0$) и единственному положительному значению $\mathbf{P}(X=1)=c_2$, если $p_2=0$.

При выполнении условия (34) нахождение корня $\mu_1(z)$ сводится к решению квадратного уравнения.

5.8 Явные формулы для операторов $\mathcal{L}_\pm$

Вернемся к нерешетчатому случаю и проанализируем, как работает оператор $\mathcal{L}_+$ при выполнении условия (31). Предположим сначала для простоты, что $k=1$, то есть

$$\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\};\,X>0)=\frac{q\alpha}{\alpha-\lambda},\qquad q<1,\qquad \alpha>0.$$

Это соответствует условию

$$\mathbf{P}(X\geq t)=q\exp\{-\alpha t\},\quad t\geq 0. \tag{35}$$

Обозначим $\lambda(z)$ единственное решение уравнения $1-z\varphi(\lambda)=0$ в правой полуплоскости, тогда

$$R_+(z,\lambda)=\frac{\lambda-\lambda(z)}{\lambda-\alpha},$$

$$(\mathcal{L}_+g)(z,\lambda)=\frac{\lambda-\lambda(z)}{\lambda-\alpha}\left[\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\lambda(z)}g(\lambda)\right]^{[b,\infty)}$$

$$=\frac{\lambda-\lambda(z)}{\lambda-\alpha}\left[\frac{\lambda-\lambda(z)}{\lambda-\lambda(z)}g(\lambda)\right]^{[b,\infty)}+\frac{\lambda-\lambda(z)}{\lambda-\alpha}\left[\frac{\lambda(z)-\alpha}{\lambda-\lambda(z)}g(\lambda)\right]^{[b,\infty)}$$

$$=\frac{\lambda-\lambda(z)}{\lambda-\alpha}\big[g(\lambda)\big]^{[b,\infty)}+\frac{(\lambda(z)-\alpha)(\lambda-\lambda(z))}{\lambda-\alpha}\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\lambda(z)}\right]^{[b,\infty)}. \tag{36}$$

Приведем далее две леммы.

Лемма 1 *Пусть функция g имеет вид*

$$g(\lambda)=\int_u^\infty e^{\lambda t}dG(t),\quad \mathrm{Re}\lambda=0,\quad u\geq a,$$

тогда для любого $\beta < 0$
$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{(-\infty,a]} = g(\beta)\frac{e^{(\lambda-\beta)a}}{\lambda-\beta}.$$

Доказательство. Имеем
$$\frac{1}{\lambda-\beta} = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(\lambda-\beta)t}dt,$$
$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{(-\infty,a]} = \Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t}\Bigg(\int\limits_{\max(u,t)}^{\infty} e^{-\beta(t-y)}dG(y)\Bigg)dt\Bigg]^{(-\infty,a]}$$
$$= \Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda-\beta)t}dt \int\limits_{\max(u,t)}^{\infty} e^{\beta y}dG(y)\Bigg]^{(-\infty,a]} = g(\beta)\int\limits_{-\infty}^{a} e^{(\lambda-\beta)t}dt.$$
Аналогично получается и другая лемма.

Лемма 2 *Пусть функция* g *имеет вид*
$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{v} e^{\lambda t}dG(t), \quad Re\lambda = 0, \quad v \le b,$$
тогда для любого $\beta > 0$
$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{[b,\infty)} = g(\beta)\frac{e^{(\lambda-\beta)b}}{\lambda-\beta}.$$

Вернемся к (36). Если $g \in S((-\infty,0])$ (а у нас именно к таким функциям g применялся оператор $\mathcal{L}_+$), то с помощью леммы 2 получаем
$$(\mathcal{L}_+g)(z,\lambda) = \frac{\lambda-\lambda(z)}{\lambda-\alpha}\big[g(\lambda)\big]^{[b,\infty)} + \frac{(\lambda(z)-\alpha)(\lambda-\lambda(z))}{\lambda-\alpha}\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\lambda(z)}\right]^{[b,\infty)}$$
$$= \frac{\lambda(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}g(\lambda(z))e^{(\lambda-\lambda(z))b} = \frac{\alpha-\lambda(z)}{\alpha}g(\lambda(z))e^{(\lambda-\lambda(z))b}\int\limits_{0}^{\infty}\alpha e^{(\lambda-\alpha)y}dy. \tag{37}$$

Теперь рассмотрим более общую ситуацию, когда выполнено (31). В этом случае для вычисления $(\mathcal{L}_+g)(z,\lambda)$ нужно предварительно разложить $R_+^{-1}(z,\lambda)$ на простые дроби
$$R_+^{-1}(z,\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\Lambda(z,\lambda)} = 1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i(z)}{\lambda-\lambda_i(z)}$$
при некотором наборе коэффициентов $c_i(z)$ (здесь мы предположили, что корни $\lambda_i(z)$ простые), после чего величина $[R_+^{-1}(z,\lambda)g(\lambda)]^{[b,\infty)}$ вычисляется без труда в соответствии с леммой 2. Получаем в итоге
$$(\mathcal{L}_+g)(z,\lambda) = \frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}\left[\left(1+\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i(z)}{\lambda-\lambda_i(z)}\right)g(\lambda)\right]^{[b,\infty)}$$
$$= \frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}[g(\lambda)]^{[b,\infty)} + \frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}\sum_{i=1}^{k}c_i(z)\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\lambda_i(z)}\right]^{[b,\infty)}.$$

5.9 Явные формулы в однограничной задаче

Пусть, как и выше, выполнено (35), то есть $\mathbf{P}(X \geq t) = q\exp\{-\alpha t\}, \ \ t \geq 0$. Для однограничной задачи, где $N = N_b = \min\{n \geq 1: \ S_n \geq b\}, \ \ b > 0$, будем иметь

$$Q(z,\lambda) = (\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda) = (\alpha - \lambda(z))e^{(\lambda-\lambda(z))b}\int\limits_0^\infty e^{(\lambda-\alpha)y}dy.$$

Если вместо S_{N_b} рассматривать величину перескока $\chi_b = S_{N_b} - b$, то отсюда следует

$$\mathbf{E}(z^{N_b}e^{\lambda\chi_b};\, N_b < \infty) = e^{-\lambda b}Q(z,\lambda) = \frac{\alpha - \lambda(z)}{\alpha}\, e^{-\lambda(z)b}\cdot \alpha\int\limits_0^\infty e^{(\lambda-\alpha)y}dy. \tag{38}$$

Проанализируем это соотношение. Во-первых, заметим, что функция $\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\};\ X > 0)$ существует при $-\infty < \lambda < \alpha$, а функция $\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\};\ X \leq 0)$ — при $\lambda \geq 0$, поэтому $\varphi(\lambda)$ существует при $0 \leq \lambda < \alpha$. Если $\mathbf{E}X \geq 0$, то, как нетрудно убедиться из рассмотрения графика функции $\varphi(\lambda)$, уравнение $\varphi(\lambda) = 1/z$ при $0 < z < 1$ имеет положительный корень $\lambda(z) < \alpha$, причем $\lambda(1) = 0$. Поэтому, полагая $\lambda = 0$ и устремляя $z \to 1$, находим, что в этом случае $\mathbf{P}(N_b < \infty) = 1$.

Далее, из (38) следует, что при $\mathbf{E}X \geq 0$ случайные величины χ_b и N_b независимы, χ_b имеет показательное распределение с параметром α, а производящая функция для N_b равна

$$\mathbf{E}z^{N_b} = \frac{\alpha - \lambda(z)}{\alpha}\, e^{-\lambda(z)b}, \qquad |z| \leq 1.$$

Для нахождения распределения N_b нужно разложить эту функцию в ряд по степеням переменной z. Коэффициенты этого разложения и будут задавать распределение N_b. Для решения этой задачи неизбежно придется искать $\lambda(z)$. Это легко сделать, если наряду с (35) предположить

$$\mathbf{P}(X < t) = r\exp\{\beta t\}, \qquad t \leq 0, \quad r + q = 1, \tag{39}$$

то есть распределение скачков блуждания является двусторонним экспоненциальным. Тогда легко вычислить, что

$$\varphi(\lambda) = \frac{r\beta}{\lambda+\beta} + \frac{q\alpha}{\alpha-\lambda} = \frac{r\beta(\alpha-\lambda) + q\alpha(\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)(\alpha-\lambda)}$$

и нахождение нулей функции $1 - z\varphi(\lambda)$ сведется к решению квадратного уравнения. При $z < 1$ один из корней будет отрицательным, а другой положительным, его мы как раз обозначили $\lambda(z)$. Однако аналитически задача разложения в ряд функции $\mathbf{E}z^{N_b}$ достаточно громоздка и мы не будем этим заниматься.

Если выполнено условие (31), то

$$Q(z,\lambda) = \mathbf{E}(z^{N_b}e^{\lambda S_{N_b}};\ N_b < \infty) = (\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda)$$

$$= \frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}\sum_{i=1}^k c_i(z)\left[\frac{1}{\lambda - \lambda_i(z)}\right]^{[b,\infty)} = \frac{\Lambda(z,\lambda)}{P(\lambda)}\sum_{i=1}^k \frac{c_i(z)}{\lambda-\lambda_i(z)}e^{(\lambda-\lambda_i(z))b}.$$

Полученные в этом разделе результаты одновременно дают нам точное выражение для распределения супремума траектории в случае, когда $\mathbf{E}X < 0$. Тогда с вероятностью единица конечна случайная величина $S = \sup_{n\ge 0} S_n$. Функция $\varphi(\lambda)$ выпукла вниз, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) < 0$. Если выполнено (35), то есть распределение скачка блуждания имеет экспоненциальную плотность на положительной полуоси, то $\varphi(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \alpha$. Поэтому найдется число h, $0 < h < \alpha$, такое, что $\varphi(h) = 1$, то есть $\lambda(1) = h$. Если же выполнено более общее условие (31), то, как уже отмечалось, уравнение $\varphi(h) = 1$ имеет k нулей $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_k(z)$, лежащих в правой полуплоскости. Очевидно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 7 *Предположим, что* $\mathbf{E}X < 0$. *Если выполнено* (35), *то*

$$\mathbf{P}(S \ge b) = \mathbf{P}(N_b < \infty) = \frac{\alpha - \lambda(1)}{\alpha} e^{-\lambda(1)b} = \frac{\alpha - h}{\alpha} e^{-hb}, \qquad b > 0,$$

где h *— положительный корень уравнения* $\varphi(\lambda) = 1$. *Если выполнено условие* (31), *то*

$$\mathbf{P}(S \ge b) = \mathbf{P}(N_b < \infty) = \frac{\Lambda(1,0)}{P(0)} \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i(1)}{(-\lambda_i(1))} e^{-\lambda_i(1))b}, \qquad b > 0.$$

5.10 Явные формулы в двуграничной задаче

Для двуграничной задачи, когда $N = \min\{n \ge 1 : \ S_n \notin (a, b)\}, \quad a < 0, \ b > 0$, мы получим явное выражение функции $Q_2(z, \lambda)$ в том случае, когда распределение скачков блуждания является двусторонним экспоненциальным, то есть выполнено (35) и (39). Обозначим $\lambda_-(z)$ единственное решение уравнения $1 - z\varphi(\lambda) = 0$ в левой полуплоскости, а единственное решение, лежащее в правой полуплоскости, станем обозначать $\lambda_+(z)$ (в предыдущих секциях для краткости индекс " + " у $\lambda_+(z)$ опускался).

Из соотношений (24) и (37) выводим

$$Q_2(z, \lambda) = (\mathcal{L}_+ e)(z, \lambda) - (\mathcal{L}_+ Q_1)(z, \lambda) = \frac{\lambda_+(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} e^{(\lambda - \lambda_+(z))b}(1 - Q_1(z, \lambda_+(z))). \quad (40)$$

Теперь нужно найти $Q_1(z, \lambda_+(z))$. Действуя аналогично (36), находим

$$R_-(z, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \beta},$$

$$(\mathcal{L}_- g)(z, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \beta} \left[\frac{\lambda + \beta}{\lambda - \lambda_-(z)} g(\lambda) \right]^{(-\infty, a]}$$

$$= \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \beta} \left[\frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda - \lambda_-(z)} g(\lambda) \right]^{(-\infty, a]} + \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \beta} \left[\frac{\lambda_-(z) + \beta}{\lambda - \lambda_-(z)} g(\lambda) \right]^{(-\infty, a]}$$

$$= \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \beta} \left[g(\lambda) \right]^{(-\infty, a]} + \frac{(\lambda_-(z) + \beta)(\lambda - \lambda_-(z))}{\lambda + \beta} \left[\frac{g(\lambda)}{\lambda - \lambda_-(z)} \right]^{(-\infty, a]}.$$

Если $g \in S([0, \infty)$, то с помощью леммы 1 получаем

$$(\mathcal{L}_- g)(z, \lambda) = \frac{\lambda_-(z) + \beta}{\lambda + \beta} g(\lambda_-(z)) e^{(\lambda - \lambda_-(z))a}.$$

Тогда (25) можно переписать в виде

$$Q_1(z, \lambda) = (\mathcal{L}_- e)(z, \lambda) - (\mathcal{L}_- Q_2)(z, \lambda) = \frac{\lambda_-(z) + \beta}{\lambda + \beta} (1 - Q_2(z, \lambda_-(z)) e^{(\lambda - \lambda_-(z))a}.$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = \lambda_+(z)$ и, обозначая $\mu(z) = e^{\lambda_-(z)-\lambda_+(z)}$, получим

$$Q_1(z, \lambda_+(z)) = \frac{\lambda_-(z)+\beta}{\lambda_+(z)+\beta}(1 - Q_2(\lambda_-(z))\mu^{-a}(z).$$

Теперь подставим это выражение в (40):

$$Q_2(z,\lambda) = \frac{\lambda_+(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}\, e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}\left(1 - \frac{\lambda_-(z)+\beta}{\lambda_+(z)+\beta}(1 - Q_2(\lambda_-(z))\mu^{-a}(z)\right). \tag{41}$$

Полагая в (41) $\lambda = \lambda_-(z)$ и, обозначив для краткости,

$$v_1(z) = \frac{\lambda_+(z)-\alpha}{\lambda_-(z)-\alpha}, \qquad v_2(z) = \frac{\lambda_-(z)+\beta}{\lambda_+(z)+\beta}$$

получим равенство

$$Q_2(z,\lambda_-(z)) = v_1(z)\mu^b(z)(1 - v_2(z)\mu^{-a}(z)) + v_1(z)v_2(z)\mu^{b-a}(z)Q_2(z,\lambda_-(z))$$

откуда находим

$$Q_2(z,\lambda_-(z)) = \frac{v_1(z)\mu^b(z)(1 - v_2(z)\mu^{-a}(z))}{1 - v_1(z)v_2(z)\mu^{b-a}(z)}.$$

Осталось подставить это выражение в (41). В итоге получаем

$$\begin{aligned} Q_2(z,\lambda) &= \mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N};\ S_N \geq b) \\ &= \frac{\lambda_+(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}\, e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}\left(1 - v_2(z)\mu^{-a}(z)\frac{1 - v_1(z)\mu^b(z)}{1 - v_1(z)v_2(z)\mu^{b-a}(z)}\right) \\ &= \frac{\lambda_+(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}\, e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}\frac{1 - v_2(z)\mu^{-a}(z)}{1 - v_1(z)v_2(z)\mu^{b-a}(z)}. \end{aligned} \tag{42}$$

Аналогичным способом устанавливается, что

$$Q_1(z,\lambda) = \mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N};\ S_N \leq a) = \frac{\lambda_-(z)+\beta}{\lambda+\beta}\, e^{(\lambda-\lambda_-(z))a}\frac{1 - v_1(z)\mu^b(z)}{1 - v_1(z)v_2(z)\mu^{b-a}(z)}.$$

Далее мы будем устремлять $z \to 1$ в (42), чтобы найти распределение $\mathbf{P}(S_N \in dy,\ S_N \geq b)$. Для этого нам понадобится выяснить предельное поведение функций $\lambda_\pm(z)$ и $v_i(z)$ при $z \to 1$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\mathbf{E}X < 0$. В этом случае уравнение $\varphi(\lambda) = 1$ имеет два корня $\lambda_-(1) = 0$ и $\lambda_+(1) = h$ для некоторого $0 < h < \alpha$. Тогда

$$\mu(1) = e^{-h}, \qquad v_1(1) = \frac{\alpha-h}{\alpha}, \qquad v_2(1) = \frac{\beta}{h+\beta},$$

$$\mathbf{E}(e^{\lambda S_N};\ S_N \geq b) = \frac{\alpha-h}{\alpha-\lambda}\, e^{(\lambda-h)b}\frac{1 - \frac{\beta}{h+\beta}e^{ha}}{1 - \frac{\alpha-h}{\alpha}\frac{\beta}{h+\beta}e^{-h(b-a)}}.$$

Полагая $\lambda = 0$, получим вероятность разорения:

$$\mathbf{P}(S_N \geq b) = \frac{\alpha-h}{\alpha}\, e^{-hb}\frac{1 - \frac{\beta}{h+\beta}e^{ha}}{1 - \frac{\alpha-h}{\alpha}\frac{\beta}{h+\beta}e^{-h(b-a)}},$$

эта вероятность убывает экспоненциально быстро с ростом числа b для блуждания с отрицательным сносом.

Распределение величины перескока $\chi = S_N - b$ через верхнюю границу является экспоненциальным с параметром α:

$$\mathbf{E}(e^{\lambda\chi};\ S_N \ge b) = \frac{\alpha - h}{\alpha - \lambda}\, e^{-hb} \frac{1 - \frac{\beta}{h+\beta} e^{ha}}{1 - \frac{\alpha-h}{\alpha} \frac{\beta}{h+\beta} e^{-h(b-a)}}$$

$$= \frac{\alpha - h}{\alpha}\, e^{-hb} \frac{1 - \frac{\beta}{h+\beta} e^{ha}}{1 - \frac{\alpha-h}{\alpha} \frac{\beta}{h+\beta} e^{-h(b-a)}} \cdot \alpha \int\limits_0^\infty e^{(\lambda-\alpha)y} dy = \mathbf{P}(S_N \ge b) \mathbf{E}\, e^{\lambda\chi}.$$

2. Пусть теперь $\mathbf{E}X = 0$. Это значит, что $\varphi'(0) = 0$, $\lambda_+(z) \to 0$, $\lambda_-(z) \to 0$ при $z \to 1$, и $v_1(1) = v_2(1) = 1$. Таким образом, при $z \to 1$ последняя дробь в (42) являет собой неопределенность вида $0/0$.

Проанализируем более подробно структуру функций $\lambda_\pm(z)$. Они являются ветвями двузначной функции, имеющей точку ветвления $z = 1$. Это значит, что в окрестности точки $z = 1$, разрезанной по лучу $z \ge 1$, имеют место разложения вида

$$\lambda_+(z) = -\psi_1 i(z-1)^{1/2} - \psi_2(z-1) - \cdots,$$

$$\lambda_-(z) = \psi_1 i(z-1)^{1/2} - \psi_2(z-1) + \cdots,$$

где, как можно вычислить,

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}, \quad \psi_2 = \frac{\mu_3}{3\sigma^4}, \quad \mu_k = E\, X_1^k, \quad \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Здесь функция $t = i(z-1)^{1/2}$ переводит полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ в область $\pi/2 < \arg t < \pi$.

Имеем

$$\mu^{-a}(z) = \exp\{(\lambda_+(z) - \lambda_-(z))a\} = \exp\{a(-2\psi_1 t) + O(t^2)\} = 1 - 2a\psi_1 t + O(t^2),$$

$$\mu^{b-a}(z) = 1 + 2(b-a)\psi_1 t + O(t^2),$$

$$v_1(z) = \frac{\lambda_+(z) - \alpha}{\lambda_-(z) - \alpha} = 1 - \frac{\lambda_-(z) - \lambda_+(z)}{\lambda_-(z) - \alpha} = 1 + \frac{2\psi_1 t}{\alpha} + O(t^2),$$

$$v_2(z) = \frac{\lambda_-(z) + \beta}{\lambda_+(z) + \beta} = 1 + \frac{\lambda_-(z) - \lambda_+(z)}{\lambda_+(z) + \beta} = 1 + \frac{2\psi_1 t}{\beta} + O(t^2),$$

$$v_1(z)v_2(z) = \left(1 + \frac{2\psi_1 t}{\alpha} + O(t^2)\right)\left(1 + \frac{2\psi_1 t}{\beta} + O(t^2)\right) = 1 + \left(\frac{2\psi_1}{\alpha} + \frac{2\psi_1}{\beta}\right)t + O(t^2).$$

Поэтому

$$\frac{1 - v_2(z)\mu^{-a}(z)}{1 - v_1(z)v_2(z)\mu^{b-a}(z)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{2\psi_1 t}{\beta} + O(t^2)\right)(1 - 2a\psi_1 t + O(t^2))}{1 - \left(1 + \left(\frac{2\psi_1}{\alpha} + \frac{2\psi_1}{\beta}\right)t + O(t^2)\right)(1 + 2(b-a)\psi_1 t + O(t^2))}$$

$$= \frac{2a\psi_1 t - \frac{2\psi_1 t}{\beta} + O(t^2)}{-2(b-a)\psi_1 t - \left(\frac{2\psi_1}{\alpha} + \frac{2\psi_1}{\beta}\right)t + O(t^2)} \to \frac{|a| + \frac{1}{\beta}}{b - a + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$$

при $t \to 0$. Таким образом, для величины перескока $\chi = S_N - b$ через верхнюю границу имеем

$$\mathbf{E}(e^{\lambda\chi};\ S_N \ge b) = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda} \cdot \frac{|a| + \frac{1}{\beta}}{b - a + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = \int\limits_0^\infty e^{\lambda y} \alpha e^{-\alpha y} dy \cdot \mathbf{P}(S_N \ge b).$$

Если распределение скачков блуждания удовлетворяет условию (31), то нахождение функций $Q_i(z,\lambda)$ в явном виде будет проводиться по тому же алгоритму, но это является чрезвычайно громоздкой задачей. Этого никто не делает. Оказывается, что в широких условиях главные члены асимптотики операторов $\mathcal{L}_\pm$ при условии, что $b-a\to\infty$, зависят только от ближайших к нулю вещественных корней уравнения $1-z\varphi(\lambda)=0$. Этим мы и воспользуемся в следующем разделе.

5.11 Асимптотический анализ при $a\to-\infty$, $b\to\infty$.

Коль скоро точные решения в тех или иных граничных задачах в общем случае найти не удается, приходится довольствоваться различными приближениями. Чаще всего аппроксимационные формулы являются результатом асимптотического анализа в тех ситуациях, где он возможен. Здесь прослеживаются две тенденции. Во-первых, при одних и тех же границах можно рассмотреть схему серий случайных блужданий, в которой размеры скачков уменьшаются (см., например, [11]). Другая возможность — при фиксированном случайном блуждании изучать асимптотику распределений граничных функционалов в условиях удаляющейся границы, то есть здесь присутствует на самом деле последовательность граничных задач, соответствующих разным положениям границы. При решении граничных задач весьма затрудняющим фактором является наличие эффекта перескока через границу. Задачи, где перескока нет, решаются достаточно просто. В обоих перечисленных вариантах асимптотического анализа влияние перескока уменьшается.

Второй вариант асимптотических исследований, связанный с удаляющимися границами, более популярен, и мы тоже будем ему следовать. Но первоначально исследуем асмптотическое поведение операторов $\mathcal{L}_\pm$ при $|a|\to\infty$, $b\to\infty$.

5.11.1 Асимптотический анализ операторов $\mathcal{L}_\pm$.

Будем предполагать везде в этом пункте, что выполнено следующее условие.

(C) Распределение X содержит абсолютно непрерывную (относительно меры Лебега) компоненту.

Это условие сильнее требования неарифметичности. Оно помогает в дальнейшем получить равномерные оценки по z в леммах 3 и 4, хотя в деталях докаазательство этих лемм приводиться не будет.

Займемся сначала исследованием асимптотики оператора $\mathcal{L}_+$ при $b\to\infty$. Дополнительно к условию (C) нам потребуется одностороннее условие Крамера (C_+).

(C_+) $\mathbf{E}\,e^{\lambda X}<\infty$ при $0\le\lambda\le\alpha$, $\alpha>0$. Если $\mathbf{E}\,X<0$, то дополнительно предполагаем, что $\mathbf{E}\,e^{\alpha X}>1$.

Разумеется, основную трудность вызывает исследование поведения величины $[R_+^{-1}(z,\lambda)g(\lambda)]^{[b,\infty)}$. Мы приведем здесь только схему рассуждений, не вдаваясь в детали. Подробности можно найти в [13].

Обозначим через V совокупность всех функций g, представимых при $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ в виде

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \qquad \|g\| := \int\limits_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty. \tag{43}$$

Функция g в этом определении может зависеть от z.

Будем писать также $g \in V(t)$, если $g(\lambda + t)$ принадлежит V как функция переменной λ. Другими словами, для функции $g \in V(t)$ выполняется

$$\|g\|_t := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ty} |dG(y)| < \infty. \tag{44}$$

Обозначим далее через $V_+(t)$ совокупность функций $g \in V(t)$, для которых все изменение функции G в представлении (43) сосредоточено на множестве $[0, \infty)$. Аналогично, пусть $V_-(t)$ соответствует тем функциям $g \in V(t)$, для которых вариация функции G на множестве $(0, \infty)$ в представлении (43) равна нулю.

Отметим важное свойство: если $g \in V(t)$, то

$$\|[g(\lambda)]^{[b,\infty)}\| = \int\limits_{b}^{\infty} |dG(y)| \le e^{-tb} \int\limits_{b}^{\infty} e^{ty} |dG(y)| \le e^{-tb} \|g\|_t = O(e^{-tb}), \qquad b \to \infty.$$

Вне зависимости от наложенных условий (C) и (C_+) компоненты факторизации $R_+^{\pm 1}(z, \lambda)$ как функции переменной λ при $|z| < 1$ принадлежат $V_+(0)$, также $R_-^{\pm 1}(z, \lambda) \in V_-(0)$. Более того, $R_-^{-1}(z, \lambda) \in V_-(t)$ при всех $t \ge 0$, и из условия (C_+) следует, что $1 - z\varphi(\lambda) \in V(t)$ при всех $t \in [0, \alpha]$, поэтому

$$R_+(z, \lambda) = (1 - z\varphi(\lambda)) R_-^{-1}(z, \lambda) \in V(\alpha)$$

и, неизбежно, $R_+(z, \lambda) \in V_+(\alpha) \subset V(\alpha)$.

Найдем и выделим сначала особенность функции $R_+^{-1}(z, \lambda)$. Анализируя график функции $\varphi(\lambda)$ нетрудно видеть, что уравнение $1 - z\varphi(\lambda)) = 0$ имеет единственный положительный корень для $z \in (1 - \delta, 1)$ при некотором малом $\delta > 0$. Обозначим его $\lambda_+(z)$. Он же будет обращать в нуль положительную компоненту факторизации, коль скоро отрицательная компонента в нуль не обращается в правой полуплоскости по λ. Значит, $\lambda_+(z)$ будет простым полюсом для $R_+^{-1}(z, \lambda)$. Введем функцию

$$w_z(\lambda) := R_+^{-1}(z, \lambda) - \frac{A(z)}{\lambda - \lambda_+(z)}, \quad A(z) = \left(R'_+(z, \lambda_+(z))\right)^{-1}.$$

Здесь производная у $R_+(z, \lambda)$ берется по второму аргументу, существование производных этой функции обеспечивается ее аналитичностью в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$. Имеем теперь

$$[R_+^{-1}(z, \lambda) g(\lambda)]^{[b,\infty)} = A(z) \left[\frac{g(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(z)} \right]^{[b,\infty)} + [w_z(\lambda) g(\lambda)]^{[b,\infty)}.$$

При некотором $\varepsilon > 0$ функция $1 - z\varphi(\lambda)$ не имеет других нулей при $\operatorname{Re} \lambda \le \lambda_+(z) + \varepsilon$. Значит, кроме простого полюса в точке $\lambda = \lambda_+(z)$ функция $R_+^{-1}(z, \lambda)$ не имеет других особенностей в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \le \lambda_+(1) + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, следовательно, функция $w_z(\lambda)$ не имеет особенностей в той же полуплоскости. Можно показать, что при выполнении условий (C) и (C_+) имеет место $w_z(\lambda) \in V_+(\lambda_+(1) + \varepsilon)$

и $\|w_z(\lambda)\|_{\lambda_+(1)+\varepsilon} \le C$ равномерно по $z \in (1-\delta, 1)$. Если $g \in V_-(0)$, то $g \in V_-(\lambda_+(1)+\varepsilon)$ и $w_z(\lambda)g(\lambda) \in V(\lambda_+(1)+\varepsilon)$. Поэтому в равенстве

$$(\mathcal{L}_+ g)(z,\lambda) = R_+(z,\lambda)[R_+^{-1}(z,\lambda)g(\lambda)]^{[b,\infty)}$$

$$= R_+(z,\lambda)A(z)\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\lambda_+(z)}\right]^{[b,\infty)} + R_+(z,\lambda)[w_z(\lambda)g(\lambda)]^{[b,\infty)}$$

последнее слагаемое принадлежит $V_+(\lambda_+(1)+\varepsilon)$ и потому представимо в виде

$$R_+(z,\lambda)[w_z(\lambda)g(\lambda)]^{[b,\infty)} = \int\limits_b^\infty e^{\lambda y}\,dG_z(y), \qquad \int\limits_b^\infty |dG_z(y)| = O(e^{-b(\lambda_+(1)+\varepsilon)}), \quad b\to\infty.$$

Значение величины $\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\lambda_+(z)}\right]^{[b,\infty)}$ найдено в лемме 2, оно имеет порядок $O\big(e^{-b\lambda_+(1)}\big)$ и является главным членом асимптотики при $b\to\infty$. В итоге получаем следующее утверждение.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия* (C) *и* (C_+). *Тогда для всякой функции* $g(\lambda) \in V_-(0)$ *при некотором* $\varepsilon > 0$, $z \in (1-\delta,1)$, $\mathrm{Re}\lambda \le \lambda_+(1)$ *имеет место представление*

$$(\mathcal{L}_+ g)(z,\lambda) = v_z(\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}g(\lambda_+(z))\big(1+O\big(e^{-\varepsilon b}\big)\big), \quad b\to\infty, \tag{45}$$

равномерно по z, *здесь* $v_z(\lambda) = R_+(z,\lambda)\left(\big(\lambda-\lambda_+(z)\big)R'_+(z,\lambda_+(z))\right)^{-1}$.

От соответствующего утверждения (37), полученного в случае правостороннего экспоненциального распределения, соотношение (45) отличается наличием экспоненциально малого остаточного члена и более общим выражением для функции $v_z(\lambda)$. В формуле (37) имело место $v_z(\lambda) = \frac{\lambda_+(z)-\alpha}{\lambda-\alpha}$.

Аналогично выглядит асимптотическое представление для оператора $\mathcal{L}_-$. Здесь дополнительно к условию (C) потребуется условие (C_-).

(C_-) $\quad \mathbf{E}\,e^{\lambda X} < \infty$ при $-\beta \le \lambda \le 0$, $\beta > 0$. Если $\mathbf{E}\,X > 0$, то предполагаем, что $\mathbf{E}\,e^{-\beta X} > 1$.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия* (C) *и* (C_-). *Тогда для всякой функции* $g(\lambda) \in V_+(0)$ *при при некотором* $\varepsilon > 0$, $z \in (1-\delta,1)$, $\mathrm{Re}\lambda \ge \lambda_-(1)$ *имеет место представление*

$$(\mathcal{L}_- g)(z,\lambda) = u_z(\lambda)e^{(\lambda-\lambda_-(z))a}g(\lambda_-(z))\big(1+O\big(e^{\varepsilon a}\big)\big), \quad a\to-\infty,$$

равномерно по z, *здесь* $u_z(\lambda) = R_-(z,\lambda)\left(\big(\lambda-\lambda_-(z)\big)R'_-(z,\lambda_-(z))\right)^{-1}$.

5.11.2 Асимптотический анализ в однограничной и двуграничной задачах

Вернемся теперь к однограничной задаче. Пусть, как и выше,

$$N_b = \min\{n\ge 1:\ S_n \ge b\}, \qquad b>0,$$

и выполнены условия (C) и (C_+). Из леммы 3 следует

$$Q(z,\lambda) = (\mathcal{L}_+ e)(z,\lambda) = v_z(\lambda) e^{(\lambda-\lambda_+(z))b}\bigl(1+O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr)\bigr), \qquad b\to\infty.$$

Если вместо S_{N_b} рассматривать величину перескока $\chi_b = S_{N_b} - b$, то отсюда следует

$$\mathbf{E}(z^{N_b} e^{\lambda\chi_b};\, N_b<\infty) = e^{-\lambda b} Q(z,\lambda) = v_z(\lambda) e^{-\lambda_+(z)b}\bigl(1+O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr)\bigr).$$

Пусть $\mathbf{E}\,X < 0$, тогда, очевидно, найдется число h, $0<h<\alpha$, такое, что $\varphi(h)=1$. В этом случае $\lambda_+(1)=h$, и в условиях леммы 3 имеет место

$$\mathbf{P}(S\ge b) = \mathbf{P}(N_b<\infty) = v_1(0)e^{-hb}\bigl(1+O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr)\bigr), \qquad b\to\infty.$$

Рассмотрим теперь двуграничную задачу. Здесь мы будем предполагать, что наряду с условием (C) выполняются условия (C_+) и (C_-) одновременно.

Нетрудно видеть что в этом случае используемая нами факторизация справедлива и в более широкой области $-\beta \le \mathrm{Re}\,\lambda \le \alpha$.

Для z, близких к единице, $z\le 1$, условия (C_+) и (C_-) обеспечивают наличие двух вещественных нулей $\lambda_-(z)\le 0$ и $\lambda_+(z)\ge 0$ функции $1-z\varphi(\lambda)$ (если $\mathbf{E}\,X=0$, то $\lambda_-(1)=\lambda_+(1)=0$ являет собой корень кратности два). Это легко понять, поскольку график выпуклой вниз функции $\varphi(\lambda)$ дважды пересекает горизонтальную прямую на уровне $1/z\ge 1$. При некотором $\varepsilon>0$ функция $1-z\varphi(\lambda)$ не имеет других нулей в полосе $\lambda_-(z)-\varepsilon \le \mathrm{Re}\,\lambda \le \lambda_+(z)+\varepsilon$. Здесь с необходимостью $R_+(z,\lambda_+(z)) = R_-(z,\lambda_-(z)) = 0$. Это объясняется просто: при $z<1$ функция $R_+(z,\lambda)$ не обращается в ноль в левой полуплоскости, а $R_-(z,\lambda)$ не обращается в ноль в правой полуплоскости. Более подробно аналитические свойства компонент факторизации в условиях Крамера исследованы в [12].

Переменная λ везде рассматривается как основная, z можно воспринимать как параметр.

Перейдем теперь сразу к формулировке теоремы. Обозначим

$$v_1(z) = v_z(\lambda_-(z)), \qquad v_2(z) = u_z(\lambda_+(z)), \qquad \mu(z) = \exp\{\lambda_-(z)-\lambda_+(z)\}.$$

Утверждение следующей теоремы получается по той же схеме, которая применялась для случайных блужданий с двусторонним экспоненциальным распределением скачков. Дополнительные сложности возникают лишь при получении равномерных по z оценок остаточных членов (см. детали в [13]).

Теорема 8 *Пусть выполнены условия (C), (C_+) и (C_-), тогда существуют числа $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что для любых $z\in(1-\delta,1)$ при $a\to-\infty$, $b\to\infty$ равномерно по z*

$$\mathbf{E}\bigl(z^N e^{\lambda S_N}; S_N\ge b\bigr) = v_z(\lambda) e^{\lambda-\lambda_+(z)b}\frac{1-v_2(z)\mu^a(z)}{1-v_1(z)v_2(z)\mu^{a+b}(z)}\bigl(1+O\bigl(e^{-\varepsilon b)}\bigr)\bigr), \tag{46}$$

$$\mathbf{E}\bigl(z^N e^{\lambda S_N}; S_N\le a\bigr) = u_z(\lambda) e^{(\lambda-\lambda_-(z))a}\frac{1-v_1(z)\mu^b(z)}{1-v_1(z)v_2(z)\mu^{a+b}(z)}\bigl(1+O\bigl(e^{\varepsilon a)}\bigr)\bigr). \tag{47}$$

Устремляя $z\to 1$ в этих соотношениях, получим асимптотические представления для распределения перескока в ту и другую сторону через границу, а заодно и для вероятности разорения. Еще раз отметим, что эти соотношения (без экспоненциально малых остаточных членов) ранее были получены нами в случае двустороннего экспоненциального распределения X.

5.11.3 О распределении числа пересечений полосы

Вернемся к задаче о распределении числа пересечений полосы $a < y < b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n)\}_{n=0}^{\infty}$. Напомним некоторые определения из п. 5.2. Пусть

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n \ge \tau_{i-1}^+ \colon S_n \le a\}, \quad \tau_i^+ = \inf\{n \ge \tau_i^- \colon S_n \ge b\}, \quad i \ge 1.$$

Мы будем здесь предполагать, что выполнены условия (C), (C_+) и (C_-) из предыдущего раздела и $\mathbf{E}X < 0$. Тогда конечна случайная величина η, равная числу пересечений указанной полосы снизу вверх траекторией $\{(n, S_n), n \ge 0\}$. Очевидно, $\mathbf{P}(\eta \ge k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$. Мы уже установили в (29), что при $|z| < 1$ и $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_k^+} \exp\{\lambda S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty\right) = \left((\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^k e\right)(z, \lambda),$$

то есть

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty) = \lim_{z\to 1}\left((\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^k e\right)(z, 0). \tag{48}$$

Воспользуемся далее леммами 3 и 4. Имеем

$$(\mathcal{L}_- g)(z, \lambda) = u_z(\lambda) e^{(\lambda - \lambda_-(z))a} g(\lambda_-(z))\bigl(1 + O\bigl(e^{\varepsilon a}\bigr)\bigr),$$

$$(\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- g)(z, \lambda) = v_z(\lambda) e^{(\lambda-\lambda_+(z))b} (\mathcal{L}_- g)(z, \lambda_+(z))\bigl(1 + O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr)\bigr)$$
$$= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\lambda_+(z))b} u_z(\lambda_+(z)) e^{(\lambda_+(z)-\lambda_-(z))a} g(\lambda_-(z))\bigl(1 + O\bigl(e^{\varepsilon a}\bigr)\bigr)\bigl(1 + O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr)\bigr).$$

$$((\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^k e)(z, \lambda) = ((\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)(\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^{k-1} e)(z, \lambda)$$
$$= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\lambda_+(z))b} u_z(\lambda_+(z)) e^{(\lambda_+(z)-\lambda_-(z))a} ((\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^{k-1} e)(z, \lambda_-(z))\bigl(1+O\bigl(e^{\varepsilon a}\bigr)\bigr)\bigl(1+O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr)\bigr).$$

Приступим к вычислениям. В наших условиях $\lambda_+(1) = h > 0$, $\lambda_-(1) = 0$. Обозначим

$$r = \lim_{z\to 1} v_z(\lambda_-(z)), \quad l = \lim_{z\to 1} u_z(\lambda_+(z)),$$

тогда при $a \to -\infty, b \to \infty$

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = (lr)^k e^{-kh(b-a)}\bigl(1 + O\bigl(e^{\varepsilon a}\bigr) + O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr)\bigr), \qquad k \ge 1.$$

Мы обнаружили тем самым, что в условиях (C), (C_+) и (C_-) случайная величина η имеет геометрическое распределение с точностью до экспоненциально малых добавок. Добавки $O\bigl(e^{\varepsilon a}\bigr) + O\bigl(e^{-\varepsilon b}\bigr)$ будут отсутствовать в этой формуле, если распределение скачков блуждания является двусторонним экспоненциальным.

Заметим попутно, что вероятности $\mathbf{P}(\eta \ge k)$ всегда могут быть оценены сверху соответствующими вероятностями для геометрического распределения. Более точно, если $\mathbf{E}X < 0$, то

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) \le \bigl(\mathbf{P}(S \ge b - a)\bigr)^k,$$

где по-прежнему $S = \sup_{n\ge 0} S_n$. Действительно, используя обозначение $\eta_-^0(t) = \inf\{n \ge 1 : S_n \le t\}$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\eta \ge k) &= \int_b^\infty \mathbf{P}(S_{\tau_{k-1}^+} \in dy) \int_{(-\infty, a-y]} \mathbf{P}(S \ge b - x)\mathbf{P}(S_{\eta_-^0(a-y)} \in dx) \\
&\le \mathbf{P}(S \ge b - a) \int_b^\infty \mathbf{P}(S_{\eta_-^0(a-y)} \le a - y)\mathbf{P}(S_{\tau_{k-1}^+} \in dy) \\
&= \mathbf{P}(S \ge b - a)\mathbf{P}(\eta \ge k - 1) \le \bigl(\mathbf{P}(S \ge b - a)\bigr)^k.
\end{aligned}$$

6 Общие свойства траекторий

Полученные выше факторизационные представления позволяют выяснить ряд общих свойств траекторий случайных блужданий. Приведем некоторые из них. Материал взят из [1, гл 12].

Следствие 2 *Устремляя в* (14) $z \to 1$, *получим*

$$1-\varphi(\lambda) = \big(1-\mathbf{E}\,(e^{\lambda\chi_+};\,\eta_+<\infty)\big)\big(1-\mathbf{E}\,(e^{\lambda\chi_-^0};\,\eta_-^0<\infty)\big). \tag{49}$$

Здесь мы тоже получаем факторизационное представление, но данная факторизация не является канонической по той причине, что левая и правая части (49) обращаются в нуль при $\lambda = 0$.

Далее будут использоваться обозначения $\zeta = \sup_{n\ge 1} S_n$, $\gamma = \inf_{n\ge1} S_n$.

Следствие 3 *Если существует* $\mathbf{E}\,X = m < 0$, *то* $\mathbf{P}(\eta_-^0 < \infty) = 1$, *существует* $\mathbf{E}\,\chi_-^0$ *и* $\mathbf{P}(\zeta \le 0) = m/\mathbf{E}\,\chi_-^0 > 0$.

Доказательство. Первое соотношение следует из закона больших чисел, так как

$$\mathbf{P}(\eta_-^0 > n) < \mathbf{P}(S_n > 0) \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\mathbf{E}\,(e^{\lambda\chi_-^0};\eta_-^0<\infty) = \mathbf{E}\,e^{\lambda\chi_-^0}.$$

Существование $\mathbf{E}\,\chi_-^0$ следует из тождества Вальда $\mathbf{E}\,\chi_-^0 = m\mathbf{E}\,\eta_-^0$; здесь $\mathbf{E}\,\eta_-^0 \le \mathbf{E}\,\eta_- < \infty$, поскольку $\mathbf{E}\,\eta_-$ есть значение в 0 соответствующей функции восстановления.

Наконец, поделив обе части тождества в следствии (49) на λ и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$m = \big(1-\mathbf{P}(\eta_+<\infty)\big)\mathbf{E}\,\chi_-^0 = \mathbf{P}(\zeta\le 0)\mathbf{E}\,\chi_-^0.$$

Следствие 4

1. *Всегда* $\sum \frac{\mathbf{P}(S_k=0)}{k} < \infty$.
2. *Три следующие условия эквивалентны:*
а) $\mathbf{P}(\zeta < \infty) = 1$,
б) $\mathbf{P}(\zeta \le 0) = \mathbf{P}(\eta_+ = \infty) > 0$,
в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_k>0)}{k} < \infty$ *или* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_k\ge0)}{k} < \infty$.

Доказательство. Чтобы получить первое утверждение, надо в первом равенстве (12) устремить z к 1 и вспомнить, что

$$R_0(1) = 1-\mathbf{P}(\chi_+^0=0,\eta_+^0<\infty) > \mathbf{P}(X>0) > 0.$$

Эквивалентность б) и в) вытекает из равенства

$$1-\mathbf{P}(\eta_+<\infty) = \mathbf{P}(\zeta\le 0) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}(S_k>0}{k}\right\},$$

которое получится, если в тождестве (10), относящемся к $R_+(z,\lambda)$, положить $\lambda = 0$ и устремить z к 1.

Установим эквивалентность а) и б). Если $\zeta \le 0) > 0$, то $\mathbf{P}(\zeta < \infty) > 0$, и, стало быть, $\mathbf{P}(\zeta < \infty) = 1$, так как событие $\{\zeta < \infty\}$ остаточно. Это следует из закона нуля и единицы А.Н. Колмогорова, который утверждает, что если A — остаточное событие, то $\mathbf{P}(A) = 0$ или $\mathbf{P}(A) = 1$. Более подробно об этом см. [1, гл. 11, Теорема 1.2].

Наоборот, пусть теперь ζ — собственная величина. Выберем N так, чтобы $\mathbf{P}(\zeta \le N) > 0$, и $b > 0$ так, чтобы $k = N/b$ было целое и $\mathbf{P}(X < -b) > 0$. Тогда

$$\{\zeta \le 0\} \supset \left\{X_1 < -b, \dots, X_k < -b,\ \sup_{j\ge 1}(-bk + X_{k+1} + \ldots + X_{k+j}) \le 0\right\}.$$

Так как последовательность $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots$ распределена так же, как $X_1, X_2, \ldots$, то

$$\mathbf{P}(\zeta \le 0) \ge [\mathbf{P}(X < -b)]^k\, \mathbf{P}(\zeta \le bk) > 0.$$

Следствие 5

1. $\mathbf{P}(\zeta < \infty, \gamma > -\infty) = 0$.
2. *Если существует* $\mathbf{E}\,X = m < 0$, *то* $\mathbf{P}(\eta_+ < \infty) < 1$,

$$\mathbf{P}(\zeta < \infty, \gamma = -\infty) = 1,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_k > 0)}{k} < \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_k < 0)}{k} = \infty\right).$$

3. *Если существует* $\mathbf{E}\,X = m = 0$, *то*

$$\mathbf{P}(\zeta = \infty, \gamma = -\infty) = 1,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_k > 0)}{k} = \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_k < 0)}{k} = \infty\right).$$

Случай $m > 0$ мы здесь не рассматриваем, поскольку он является симметричным к случаю $m < 0$.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что по крайней мере один из двух рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_k<0)}{k}$ или $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(S_k\ge 0)}{k}$ расходится. Значит, по следствию 4 либо $\mathbf{P}(\gamma = -\infty) = 1$, либо $\mathbf{P}(s = \infty) = 1$.

Второе и третье утверждения очевидным образом вытекают из следствий 3–4.

6.1 О распределении $S = \sup\limits_{k\ge 0} S_k$ в общем случае.

Мы приведем здесь соотношение, позволяющее выразить ПЛС (а значит и характеристическую функцию) распределения супремума траектории через положительную компоненту факторизации (разумеется, в тех случаях, когда $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$). Как мы видели, это распределение представляет интерес во многих приложениях.

Заметим, прежде всего, что случайная величина η_+ является марковской. Для таких величин, как легко установить, последовательность $X_1^* = X_{\eta_+ +1}, X_2^* = X_{\eta_+ +2}, \ldots$

на множестве $\{\omega : \eta_+ < \infty\}$ (или при условии $\eta_+ < \infty$) распределена так же, как $X_1, X_2, \ldots$, и не зависит от $(\eta_+, X_1, \ldots, X_{\eta_+})$. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1^* \in B_1, \ldots, X_k^* \in B_k \,|\, \eta_+ = j, X_1 \in A_1, \ldots, X_{\eta_+} \in A_{\eta_+}) = \\ = \mathbf{P}(X_{j+1} \in B_1, \ldots, X_{j+k} \in B_k \,|\, X_1 \in A_1, \ldots, X_j \in A_j;\ \eta_+ = j) = \\ = \mathbf{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_k \in B_k).\end{aligned}$$

Рассматривая новую последовательность $\{X_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, мы опять замечаем, что для нее уровень 0 (уровень χ_+ для исходной последовательности) будет превзойден лишь с вероятностью $p = \mathbf{P}(\eta_+ < \infty)$, а распределение $\zeta^* = \sup\limits_{k\geq 1}(X_1^* + \ldots + X_k^*)$ будет совпадать с распределением $\zeta = \sup\limits_{k\geq 1} S_k$.

Таким образом, обозначив $S^* = \max(0, \zeta^*)$, можно записать, что

$$S = S(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad \{\omega : \eta_+ = \infty\}, \\ S_{\eta_+} + S^* = \chi_+ + S^* & \text{на} \quad \{\omega : \eta_+ < \infty\}. \end{cases}$$

Так как S^*, как уже отмечалось, не зависит от χ_+ и η_+, и распределение S^* совпадает с распределением S, то

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda S} = \mathbf{P}(\eta_+ = \infty) + \mathbf{E}\,(e^{\lambda(\chi_+ + S^*)};\ \eta_+ < \infty) = (1-p) + \mathbf{E}\, e^{\lambda S}\mathbf{E}\,(e^{\lambda \chi_+};\ \eta_+ < \infty).$$

Отсюда вытекает

Теорема 9 *Если* $\sum \frac{\mathbf{P}(S_k > 0)}{k} < \infty$ *или, что то же, если* $p = \mathbf{P}(\eta_+ < \infty) < 1$, *то*

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda S} = \frac{1-p}{1 - \mathbf{E}\,(e^{\lambda\chi_+}, \eta_+ < \infty)}.$$

Совершенно аналогичным образом можно было бы получить соотношение

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda S} = \frac{1-p_0}{1 - \mathbf{E}\,(e^{\lambda\chi_+^0}, \eta_+^0 < \infty)},$$

где $p_0 = \mathbf{P}(\eta_+^0 < \infty) < 1$.

Факторизационное тождество (49) в этом случае можно записать в виде

$$1 - \varphi(\lambda) = \frac{(1-p_0)(1 - \mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_-})}{\mathbf{E}\, e^{\lambda S}} = \frac{(1-p)(1 - \mathbf{E}\, e^{\lambda\chi_-^0})}{\mathbf{E}\, e^{\lambda S}}.$$

6.2 Тождество Поллачека–Спитцера.

Приведем еще одно тождество, которое играет важную роль при исследовании распределения

$$\overline{S}_n = \max(0, \zeta_n) = \max(0, S_1, \ldots, S_n).$$

Это так называемое тождество Поллачека–Спитцера, связывающее двойное ПЛС распределения величины $\overline{S}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, с функционалом известного вида от более доступных для изучения распределений случайных величин $\max(0, S_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 10 *При* $|z| < 1$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}\, e^{\lambda \overline{S}_n} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\, \mathbf{E}\, e^{\lambda \max(0, S_k)}\right\} = \frac{R_+(z, 0)}{(1-z)R_+(z, \lambda)}.$$

Доказательство этого тождества мы здесь не приводим, его можно найти в [1].

6.3 Распределение $\eta_+^0(t)$ для непрерывных сверху целочисленных блужданий.

Целочисленное блуждание называется непрерывным сверху, если $p_1 > 0$, $p_k = 0$ при $k \geq 2$, где $p_k = \mathbf{P}(X = k)$). Термин «непрерывное блуждание сверху» возник в связи с тем, что блуждание $\{S_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, не может «перескочить» ни один целочисленный уровень $t > 0$: если $S_n > t$, то обязательно найдется $k < n$ такое, что $S_k = t$.

Для блужданий, непрерывных сверху, распределение S при $\mathbf{E}\,X < 0$ является геометрическим:

$$\mathbf{P}(S = k) = (1 - p)p^k, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где $p = \mathbf{P}(\eta_+^0 < \infty)$. Как и в теореме 7, этот результат сразу же следует из явного вида для $\mathbf{E}(z^{\eta_+^0(t)}\mu^{S_{\eta_+^0(t)}};\ \eta_+^0(t) < \infty)$.

Оказывается, что для блужданий, непрерывных сверху, могут быть найдены и многие другие явные формулы. В этом разделе нас будет интересовать распределение максимума $\overline{S}_n = \max(0, S_1, \ldots, S_n)$, знание которого, как уже отмечалось, бывает важным для многих задач математической статистики, теории систем обслуживания (теории очередей) и др. Отметим, что найти распределение $\overline{S}_n$ — это то же самое, что найти распределение $\eta_+^0(t)$, так как

$$\{\overline{S}_n < t\} = \big\{\eta_+^0(t) > n\big\}. \tag{50}$$

Здесь мы считаем $\eta_+^0(t) = \infty$, если $S < t$.

Тождество Поллачека–Спитцера дает двойное преобразование над распределением $\overline{S}_n$. Исследования этого тождества показывают, что само распределение $\overline{S}_n$ (или $\eta_+^0(t)$), как правило, в явном виде через распределение X не выражается. Однако оказывается, что для целочисленных непрерывных сверху блужданий имеют место замечательные «двойственные» соотношения, которые мы сейчас с помощью тождества Поллачека–Спитцера докажем.

Теорема 11 *Если X целочисленна, то условие $\mathbf{P}(X \geq 2) = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы*

$$n\mathbf{P}\big(\eta_+^0(t) = n\big) = t\mathbf{P}(S_n = t), \qquad t \geq 1. \tag{51}$$

С помощью тождества Вальда нетрудно убедиться также, что если существует $\mathbf{E}\,X = a > 0$, то *блуждание $\{S_n\}$ будет непрерывным сверху тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\,\eta_+^0(t) = t/a$.*

Доказательство. Обозначим для краткости $\eta(t) := \eta_+^0(t)$,

$$\begin{aligned} r_t &= \mathbf{P}\big(\eta(t) = \infty\big) = \mathbf{P}(S < t), \qquad q_{t,n} = \mathbf{P}\big(\eta(t) = n\big), \\ Q_{t,n} &= \mathbf{P}\big(\eta(t) > n\big) = \sum_{k=n+1}^{\infty} q_{t,k} + r_t. \end{aligned}$$

Так как для каждого y, $0 \leq y \leq t$,

$$\big\{\eta(t) = n\big\} \subset \bigcup_{k=0}^{n} \big\{\eta(y) = k\big\},$$

то, используя непрерывность сверху, можно написать по формуле полной вероятности

$$q_{t,n} = \sum_{k=0}^{n} q_{y,k} q_{t-y,n-k},$$

где $q_{0,0} = 1$, $q_{y,0} = 0$ при $y > 0$. Следовательно, при $|z| \le 1$ по правилу свертки

$$q_t(z) := \sum_{k=0}^{\infty} q_{t,n} z^n = \mathbf{E}\left(z^{\eta(t)};\ \eta(t) < \infty\right) = q_y(z) q_{t-y}(z).$$

Полагая $y = 1$, $q_1(z) = q(z)$, получим

$$q_t(z) = q(z) q_{t-1}(z) = q^t(z), \qquad t \ge 0.$$

Отсюда можно найти производящую функцию $Q_t(z)$ последовательности $Q_{t,n}$:

$$\begin{aligned} Q_t(z) : &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Big(r_t + \sum_{k=n+1}^{\infty} q_{t,k} \Big) = \frac{r_t}{1-z} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{t,n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \\ &= \frac{r_t}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} q_{t,n} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{r_t}{1-z} + \frac{q_t(1) - q_t(z)}{1-z} = \frac{1-q_t(z)}{1-z} = \frac{1-q^t(z)}{1-z}. \end{aligned}$$

Заметим, что здесь число $q_t(1) = \mathbf{P}\big(\eta(t) < \infty\big) = \mathbf{P}(S \ge t)$ может быть и меньшим, чем 1. Получаем далее

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\overline{S}_n = t) &= \mathbf{P}\big(\eta(t+1) > n\big) - \mathbf{P}\big(\eta(t) > n\big), \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\overline{S}_n = t) &= \frac{\big(1 - q^{t+1}(z)\big) - \big(1 - q^t(z)\big)}{1-z} = \frac{q^t(z)\big(1-q(z)\big)}{1-z}. \end{aligned}$$

Наконец, пользуясь абсолютной сходимостью фигурирующих ниже рядов, находим при $|v| < 1$, $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}\, v^{\overline{S}_n} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\overline{S}_n = t) = \frac{1-q(z)}{(1-z)\big(1-vq(z)\big)}.$$

Обращаясь теперь к формуле Поллачека–Спитцера, можно записать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\, v^{\max(0,S_n)} = \ln \frac{1-q(z)}{1-z} - \ln\big(1 - vq(z)\big) = \ln \frac{1-q(z)}{1-z} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\big(vq(z)\big)^t}{t}.$$

Сравнивая здесь коэффициенты при v^t, $t \ge 1$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}(S_n = t) = \frac{q^t(z)}{t}, \qquad t \ge 1. \tag{52}$$

Учитывая, что $q^t(z) = q_t(z)$ и сравнивая в (52) коэффициенты при z^n, $n \ge 1$, получим

$$\frac{1}{n} \mathbf{P}(S_n = t) = \frac{1}{t} \mathbf{P}(\eta(t) = n), \qquad t \ge 1, \qquad n \ge 1.$$

Достаточность утверждения теоремы доказана.

Необходимость условия $\mathbf{P}(X \ge 2) = 0$ следует из равенства (51) при $t = n = 1$:

$$p_1 = q_{1,1} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} p_k = \mathbf{P}(X \ge 2) = 0.$$

Теорема доказана.

6.4 Распределение η_+ для блужданий с симметричным распределением приращений

Выделим теперь важный класс симметричных распределений. Будем говорить, что распределение величины X симметрично, если оно совпадает с распределением $-X$, и называть распределение X непрерывным, если функция распределения X непрерывна. Для таких величин $\mathbf{E}\,X = 0$, распределения S_n при всех n также симметричны и непрерывны и

$$\mathbf{P}(S_n > 0) = \mathbf{P}(S_n < 0) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(S_n = 0) = 0,$$

и, стало быть, здесь $R_0(z) \equiv 1$, $\mathbf{P}(\chi_+^0 = 0) = 0$ и $\eta_+ = \eta_+^0$, $\chi_+ = \chi_+^0$ с вероятностью 1.

Теорема 12 *Если распределение X симметрично и непрерывно, то*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_+ = n) &= \mathbf{P}(\eta_-^0 = n) = \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 2^{2n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}, \qquad (53) \\ \mathbf{P}(\gamma_n > 0) &= \mathbf{P}(\zeta_n < 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

при $n \to \infty$ (γ_n и ζ_n определены выше).

Доказательство. Так как $\mathbf{E}\,z^{\eta_-^0} = \mathbf{E}\,z^{\eta_+}$, то в силу (15)

$$1 - \mathbf{E}\,z^{\eta_+} = \sqrt{1-z}.$$

Разлагая $\sqrt{1-z}$ в ряд, получим первое соотношение в (53). Второе получается, если воспользоваться формулой Стирлинга.

Второе утверждение теоремы вытекает из первого и равенства

$$\mathbf{P}(\zeta_n < 0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_+ = k).$$

Утверждения для η_-^0 и γ_n получаются из соображений симметрии.

Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы распределения величин η_+, η_-, γ_n, ζ_n от распределения X не зависят. Отметим также, что асимптотика

$$\mathbf{P}(\eta_+ = n) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}$$

сохраняется и в случае несимметричных распределений, если $\mathbf{E}\,X = 0$, $\mathbf{E}\,X^2 < \infty$.

Список литературы

[1] Боровков А.А. Теория вероятностей. Учебное пособие. Издание 5-е. Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009, 656 с.

[2] Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960.

[3] Page E. S. (1954). Continuous inspection schemes. Biometrika, 1954, V.41, p. 100–115.

[4] Takacs L. On the classical ruin problem. Journal of the American Statistical Association. 1969, V. 64, No. 327, p. 889-907.

[5] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1-2. Пер. с англ. 1984, М.: Мир.

[6] Гнеденко Б.В., Королюк В.С. О максимальном расхождении двух эмпирических распределений. ДАН СССР, 1951, т. 80, № 4, с. 525.

[7] Siegmund D. Sequential Analysis. New York: Springer, 1985, 272 p.

[8] Лотов В.И. Об одном подходе в двуграничных задачах. Статистика и управление случайными процессами. Сборник статей под ред. А.Н. Ширяева. Москва, 1989, с.117-121.

[9] Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. 1972, М.: Наука.

[10] Lotov V.I. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks. The Annals of Probability, 1996, V.24, N4, p.2154-2171.

[11] Нагаев С.В. Оценка скорости сходимости для вероятности поглощения. Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, вып. 1, с. 140–148.

[12] Боровков А.А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. Сибирский математический журнал, 1962, т. 3, № 5, с. 645–694.

[13] В.И. Лотов. Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий. Сибирский математический журнал, 1999, т. 40, № 5, с. 1095–1108.