

СПИСОК ВОПРОСОВ¹ к ЭКЗАМЕНУ
по теории вероятностей, 2007-2008 уч. год

Раздел 1. События и их вероятности

1. Пространство элементарных исходов. Определение события. Операции над событиями: объединение, пересечение, дополнение одного события до другого, противоположное событие. Достоверное и невозможное события. Вероятность на дискретном пространстве элементарных исходов. Классическое определение вероятности.
2. Теорема о перемножении шансов². Урновые схемы: выбор с возвращением и без, с учётом порядка и без. Число возможных результатов в каждой из схем выбора (без док-ва в схеме выбора с возвращением без учёта порядка). Урновые схемы, удовлетворяющие и не удовлетворяющие классическому определению вероятности. Гипергеометрическое распределение.
3. Геометрическая вероятность. Задача о встрече.
4. Определение и свойства алгебры и σ -алгебры событий. Примеры алгебр и σ -алгебр (в т. ч. борелевская σ -алгебра на прямой). Определение меры. Свойство непрерывности меры. Мера Лебега. Определение вероятностной меры. Свойства вероятности. Вероятность объединения n событий.
5. Условная вероятность. Теорема умножения для n событий. Независимость пары событий. Связь независимости и несовместности. Независимость событий, противоположных к независимым. Независимость в совокупности. Пример Бернштейна. Полная группа событий. Формулы полной вероятности и Байеса.
6. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Распределение номера первого успешного испытания в схеме Бернулли. Свойство «нестарения» геометрического распределения.

Раздел 2. Случайные величины и их распределения

1. Определение случайной величины. Эквивалентность двух определений случайной величины. Примеры отображений, являющихся и не являющихся случайными величинами.
2. Распределение случайной величины. Типы распределений: дискретное, абсолютно непрерывное (и для него свойства плотности распределения, существование случайной величины с заданной плотностью распределения), сингулярное распределения. Смешанное распределение.
3. Дискретные распределения: вырожденное, Бернулли, биномиальное, Пуассона, геометрическое.
4. Абсолютно непрерывные распределения: равномерное, показательное (и для него свойство «нестарения»), гамма, нормальное распределение.
5. Функция распределения. Взаимно-однозначное соответствие распределений и их функций распределения. Свойства функций распределения (с доказательством монотонности и одного из предельных свойств). Свойства функции распределения дискретного распределения. Свойства функции распределения абсолютно непрерывного закона распределения.
6. Свойства нормального распределения: связь со стандартным нормальным распределением, свойства функции распределения, правило «трёх сигм».
7. Изменение плотности при линейных преобразованиях случайных величин. Примеры: показательное, равномерное, нормальное распределения. Квантильное преобразование.
8. Функция распределения случайного вектора. Абсолютно непрерывные многомерные распределения. Свойства функции совместного распределения (без док-ва). Свойства плотности совместного распределения. Нахождение частных плотностей по плотности совместного распределения. Вычисление распределения функции от пары случайных величин по плотности совместного распределения. Примеры многомерных распределений: равномерное, нормальное. Влияние совместного распределения на распределение суммы случайных величин.
9. Определения независимости случайных величин: через совместное распределение, через функцию совместного распределения. Независимость случайных величин с дискретным распределением. Независимость случайных величин с абсолютно непрерывным совместным распределением (эквивалентность определений без док-ва).

¹Разбиение по вопросам неравномерное и не соответствует будущему разбиению по билетам

²Все факты и свойства требуется уметь доказывать, если в вопросе не оговорено противное

10. Формула свёртки. Распределения, обладающие свойством устойчивости по суммированию: биномиальное, гамма, распределение Пуассона, нормальное распределение (с док-вом для распределения Пуассона).
11. Математическое ожидание и его свойства (с док-вом в дискретном случае). Пример распределения, у которого не существует математического ожидания. Пример некоррелированных, но зависимых случайных величин.
12. Определения моментов. Определение и свойства дисперсии. Теорема о существовании моментов. Неравенство Йенсена и его следствия. Неравенства для моментов разных порядков.
13. Подсчёт математических ожиданий и дисперсий стандартных распределений.
14. Ковариация и коэффициент корреляции. Их свойства.

Раздел 3. Предельные теоремы

1. Неравенства Маркова и Чебышёва. Обобщённое неравенство Чебышёва. Доказательство вырожденности в нуле распределения с нулевым абсолютным первым моментом.
2. Определение сходимости «почти наверное». Сходимость по вероятности. Предел суммы и произведения (без док-ва для произведения). Связь сходимости по вероятности со сходимостью «п. н.» (без док-ва). Применение непр. функции к сходящейся последовательности (с док-вом для сходимости к постоянной). Применение непрерывной функции к двум сходящимся последовательностям.
3. Определение закона больших чисел как свойства последовательности случайных величин. Законы больших чисел в формах Чебышёва, Маркова, Бернулли, Хинчина. УЗБЧ Колмогорова (без док-ва).
4. Сходимость по распределению (слабая сходимость). Свойства слабой сходимости: сходимость произведения или суммы (без док-ва). Связь слабой сходимости со сходимостью по вероятности (с док-вом в обе стороны). Теорема о двойном пределе. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра — Лапласа. Неравенство Берри — Эссеена (без док-ва).
5. Характеристические функции. Вычисление х.ф. основных распределений. Свойства х.ф.: существование, х.ф. линейного преобразования, х.ф. суммы, связь моментов и производных х.ф. (без док-ва), разложение в ряд (без док-ва). Теорема непрерывности (без док-ва). Доказательство ЗБЧ в форме Хинчина. Доказательство ЦПТ. Доказательство свойств устойчивости относительно суммирования для распределений Пуассона, гамма, биномиального и нормального.

Определения и утверждения, уверенное знание которых необходимо (но не достаточно) для получения удовлетворительной оценки

1. Классическое определение вероятности. Что вычисляют комбинаторные формулы C_n^k , A_n^k , n^k .
2. Аксиоматическое определение вероятности: определения сигма-алгебры событий, меры и вероятностной меры. Свойства вероятности, вытекающие из аксиом.
3. Определение независимости двух событий. Определение независимости в совокупности.
4. Формула полной вероятности (с док-вом).
5. Понятие схемы Бернулли. Формула Бернулли (с док-вом).
6. Определение случайной величины. Определение и свойства функции распределения.
7. Определение дискретного и абсолютно непрерывного распределений. Свойства плотности.
8. Основные распределения: вырожденное, Бернулли, биномиальное, Пуассона, геометрическое, равномерное, показательное, гамма, нормальное.
9. Свойства нормального распределения (в том числе вычисление его матем. ожидания и дисперсии).
10. Определения независимости случайных величин.
11. Определение и свойства математического ожидания, определение и свойства дисперсии.
12. Определение и свойства коэффициента корреляции.
13. Определение сходимости по вероятности. Неравенства Маркова и Чебышёва.
14. Закон больших чисел в форме Чебышёва (с док-вом). Закон больших чисел Хинчина.
15. Определение сходимости по распределению (слабой сходимости).
16. Центральная предельная теорема.