1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } x \in [1,\, 2], \\ 0, & \text{если } x \notin [1,\, 2]. \end{cases}$$

Доказать, что $\min(\xi_1, \ldots, \xi_n) \xrightarrow{\text{p}} 1$.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots \Subset \mathrm{U}_{0,1}$ — независимые случайные величины,

$$\varphi_n = \frac{\xi_1^7 + \ldots + \xi_n^7}{n} \quad \text{и } \psi_n = \left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\right)^7.$$

Проверить, существуют ли $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\varphi_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\psi_n$ (если да, найти их).

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots \Subset \mathrm{U}_{1,\,2}$ — независимые случайные величины. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности $n \cdot \bigl(2 - \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)\bigr)$ при $n \to \infty$.

4. Правильную монету подбрасывают 900 раз. Найти вероятность того, что выпадет от 426 до 480 гербов.

5. Пусть $\xi_n \Subset \Pi_{1+1/n}$ для $n = 1, 2, \ldots$, и случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы. Проверить, удовлетворяет ли эта последовательность ЗБЧ.

6.* Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет равномерное распределение в отрезке $[-2,\, 4]$. Выяснить, как ведёт себя при $n \to \infty$ последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_{2i-1} - \xi_{2i})^2 - 6\sqrt{n}.$$

Ф.И.О.						Номер группы
1	2	3	4	5	6	$\sum$

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

---

1. Привести пример последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин таких, что $\xi_n \xrightarrow{\text{p}} 1$, но $\mathsf{E}\xi_n$ не сходятся к единице.

2. Пусть $\xi_n \Subset \mathrm{E}_n$ для $n = 1, 2, \ldots$, и случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы.

Сходится ли по вероятности (и куда, если сходится) последовательность $\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$?

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots \Subset \mathrm{U}_{0,\,2}$ — независимые случайные величины. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности $n \cdot \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при $n \to \infty$.

4. Монета выпадает гербом с вероятностью $2/3$. Найти вероятность получить от 1140 до 1240 гербов при 1800 бросках.

5. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ случайная величина η_n равна 1, если $\xi_n < 2$, и равна 0, если $\xi_n \geqslant 2$. Привести пример последовательности c_n такой, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{n} < c_n\right) \longrightarrow 0{,}1.$$

6.* Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром 1. Показать, что для любых $a > 0$, $t > 0$ верно неравенство $\mathsf{P}(\xi > a) \leqslant e^{-ta}\mathsf{E}e^{t\xi}$, вычислить правую часть и найти ее минимум по $t > 0$.

Ф.И.О.						Номер группы
1	2	3	4	5	6	$\sum$

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

1. Пусть ξ_1, ξ_2, … — последовательность случайных величин, и ξ — случайная величина. Пусть $\mathsf{E}(\xi_n - \xi)^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что ξ_n сходится по вероятности к ξ.

2. Пусть $\xi_n \Subset \Pi_{2/n}$ для $n = 1, 2, \ldots$, и случайные величины ξ_1, ξ_2, … независимы.

Сходится ли по вероятности (и куда, если сходится) последовательность $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$?

3. Пусть ξ_1, ξ_2, … $\Subset \mathrm{U}_{0,\,2}$ — независимые случайные величины. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности $n \cdot \bigl(2 - \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)\bigr)$ при $n \to \infty$.

4. Монета выпадает гербом с вероятностью $4/7$. Найти, в каких границах с вероятностью 0,8 лежит число выпавших гербов после 588 бросков.

5. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots \Subset \mathrm{E}_5$ независимы. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ случайная величина η_n равна 1, если $\xi_n > 2$, и равна 0, если $\xi_n \leqslant 2$. Привести пример последовательности c_n такой, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{n} < c_n\right) \longrightarrow 0{,}1.$$

6.* Пусть ν_n — число единиц при n бросаниях правильной игральной кости, а μ_n — число шестёрок. Выяснить, как ведёт себя при $n \to \infty$ последовательность $\dfrac{\nu_n - \mu_n}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$.

Ф.И.О.						Номер группы
1	2	3	4	5	6	$\sum$

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

---

1. Пусть ξ_1, ξ_2, … — независимые случайные величины с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & \text{если } x \in [1,\,2], \\ 0, & \text{если } x \notin [1,\,2]. \end{cases}$$

Доказать, что $\max(\xi_1, \ldots, \xi_n) \xrightarrow{\mathrm{p}} 2$.

2. Пусть ξ_1, ξ_2, … $\Subset \mathrm{E}_2$ — независимые случайных величины,

$$\varphi_n = \frac{e^{\xi_1} + \ldots + e^{\xi_n}}{n} \quad \text{и} \quad \psi_n = e^{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}}.$$

Доказать, что φ_n и ψ_n сходятся по вероятности и найти пределы.

3. Пусть ξ_1, ξ_2, … $\Subset \mathrm{U}_{1,\,3}$ — независимые случайные величины. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности $n \cdot \bigl(\min(\xi_1, \ldots, \xi_n) - 1\bigr)$ при $n \to \infty$.

4. Вероятность появления события A в каждом из 100 независимых опытов постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A произойдёт не менее 75, но не более 90 раз.

5. Пусть $\xi_n \Subset \mathrm{B}_{p(n)}$, где $p(n) \in (0,\,1)$ — произвольные вероятности, и случайные величины ξ_1, ξ_2, … независимы. Проверить, удовлетворяет ли эта последовательность ЗБЧ.

6.* Пусть ν_n — число единиц при n бросаниях правильной игральной кости, а μ_n — число шестёрок. Выяснить, как ведёт себя при $n \to \infty$ последовательность $\dfrac{\nu_n - \mu_n}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$.

Ф.И.О.						Номер группы
1	2	3	4	5	6	$\sum$

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

1. Пусть ξ_1, ξ_2, … — независимые случайные величины с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4, & \text{если } x \in [2,\,3], \\ 0, & \text{если } x \notin [2,\,3]. \end{cases}$$

Доказать, что $\min(\xi_1,\ldots,\xi_n) \xrightarrow{\text{p}} 2$.

2. Пусть ξ_1, ξ_2, … $\in \Pi_3$ — независимые случайные величины. Доказать, что $\varphi_n = \dfrac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n}$ и $\psi_n = \left(\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right)^2$ сходятся по вероятности и найти пределы.

3. Пусть ξ_1, ξ_2, … $\in \mathrm{U}_{1,\,4}$ — независимые случайные величины. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности $n\cdot\big(4-\max(\xi_1,\ldots,\xi_n)\big)$ при $n\to\infty$.

4. Симметричную игральную кость бросают 12 000 раз. Найти вероятность того, что число выпавших единиц заключено между 1 918 и 2 082.

5. Пусть $\xi_n \in \mathrm{N}_{1/n,\,2/n}$, и случайные величины ξ_1, ξ_2, … независимы. Проверить, удовлетворяет ли эта последовательность ЗБЧ.

6.* Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots \in \Pi_\lambda$ — независимые случайные величины. Выяснить, как ведёт себя при $n\to\infty$ последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\xi_{2i-1}-\xi_{2i}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_{2i-1}-\xi_{2i}).$$

Ф.И.О.						Номер группы
1	2	3	4	5	6	$\sum$

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

---

1. Пусть ξ_1, ξ_2, … — независимые случайные величины с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 6-2x, & \text{если } x \in [2,\,3], \\ 0, & \text{если } x \notin [2,\,3]. \end{cases}$$

Доказать, что $\max(\xi_1,\ldots,\xi_n) \xrightarrow{\text{p}} 3$.

2. Пусть ξ_1, ξ_2, … $\in \mathrm{U}_{0,\,\pi/2}$ — независимые случайные величины, и пусть $\varphi_n = \dfrac{\cos\xi_1+\ldots+\cos\xi_n}{n}$ и $\psi_n = \cos\Big(\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\Big)$. Проверить, существуют ли $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\varphi_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\psi_n$ (если да, найти их).

3. Пусть ξ_1, ξ_2, … $\in \mathrm{U}_{2,\,5}$ — независимые случайные величины. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности $n\cdot\big(\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)-2\big)$ при $n\to\infty$.

4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что при 900 выстрелах произойдёт от 315 до 390 попаданий.

5. Пусть $\xi_n \in \Pi_{1/n^2}$, и случайные величины ξ_1, ξ_2, … независимы. Проверить, удовлетворяет ли эта последовательность ЗБЧ.

6.* Пусть ξ_1,ξ_2, … $\in \mathrm{U}_{0,\,4}$ — независимые случайные величины. Выяснить, как ведёт себя при $n\to\infty$ последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \sum_{i=n+1}^{2n}\xi_i\right).$$

Ф.И.О.						Номер группы
1	2	3	4	5	6	$\sum$

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

1. Пусть при $n = 1, 2, \ldots$ случайные величины ξ_n имеют распределения $\mathsf{P}(\xi_n = 3) = 1 - \mathsf{P}(\xi_n = 2) = \dfrac{1}{n}$. Выяснить, сходится ли последовательность случайных величин ξ_n по вероятности.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с функцией распределения $F(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \in [0, 1]$. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности

$$\eta_n = n^3 \cdot \min(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром 3. Выяснить, сходятся ли при $n \to \infty$ математические ожидания $\mathsf{E}\varphi_n$ (и если сходятся, то куда), где $\varphi_n = \cos\left(\frac{1}{n}(e^{\xi_1} + \ldots + e^{\xi_n})\right)$.

4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots \Subset U_{0,3}$ — независимые случайные величины. Доказать, что $\max(\xi_1, \ldots, \xi_n) \xrightarrow{\text{p}} 3$.

5. Количество воды, расходуемое жителями одной квартиры в сутки, имеет показательное распределение со средним значением 20 литров. Найти, с какой вероятностью для удовлетворения потребностей жильцов 400 квартир будет достаточно 8 400 литров воды.

6.* Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет биномиальное распределение с параметрами 5 и 1/2. Выяснить, сходится ли слабо при $n \to \infty$ последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_{2i-1} - \xi_{2i}).$$

Ф.И.О.						Номер группы
1	2	3	4	5	6	$\sum$

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

---

1. Пусть при $n = 1, 2, \ldots$ случайные величины ξ_n имеют распределения $\mathsf{P}(\xi_n = 1) = 1 - \mathsf{P}(\xi_n = -1) = \dfrac{1}{n}$. Выяснить, сходится ли последовательность случайных величин ξ_n по вероятности.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с функцией распределения $F(x) = x^4$ при $x \in [0, 1]$. Найти предел (в смысле слабой сходимости) последовательности

$$\eta_n = \sqrt[4]{n} \cdot \min(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке [1, 2]. Выяснить, сходятся ли при $n \to \infty$ математические ожидания $\mathsf{E}\varphi_n$ (и если сходятся, то куда), где $\varphi_n = e^{\frac{1}{n}(\xi_1^5 + \ldots + \xi_n^5)}$.

4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots \Subset U_{0,2}$ — независимые случайные величины. Доказать, что $\max(\xi_1, \ldots, \xi_n) \xrightarrow{\text{p}} 2$.

5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Производят 400 выстрелов. Найти вероятность того, что произойдёт от 304 до 344 попаданий.

6.* Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение Пуассона с параметром 3. Выяснить, сходится ли слабо при $n \to \infty$ последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_{2i-1} - \xi_{2i}).$$

Ф.И.О.						Номер группы
1	2	3	4	5	6	$\sum$

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.