1. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 2x-2, & \text{если } x \in [1,\,2], \\ 0, & \text{если } x \notin [1,\,2]. \end{cases}$$

Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\varphi_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится по вероятности к 2.

2. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, принимающих значения 1, 3 и 5 с равными вероятностями. Сходятся ли по вероятности при $n \to \infty$ последовательности $\varphi_n = \dfrac{\ln\xi_1 + \ldots + \ln\xi_n}{n}$ и $\psi_n = \ln\Big(\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\Big)$? Обосновать.

3. Доказать по определению, что имеет место слабая сходимость последовательности $\xi_n = -\dfrac{1}{n}$ к $\xi = 0$ при $n \to \infty$.

4. Имеется 1600 прямоугольников, у каждого из которых длина и ширина выбираются на отрезке [0, 1] наудачу (независимо друг от друга и независимо от длин сторон остальных прямоугольников). Пользуясь ЦПТ, указать симметричные относительно среднего значения границы, в которых с вероятностью 0,9 лежит сумма площадей всех прямоугольников.

5. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1, а последовательность ξ_1, ξ_2, ... задана равенством: $\xi_n = \xi$ при всех n. Проверить, выполняется ли для этой последовательности **утверждение** ЦПТ.

6.* Пусть при любом фиксированном $n \geqslant 1$ случайная величина ξ_n принимает n значений: $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., $\frac{n-1}{n}$, 1 с равными вероятностями. Найти предел последовательности ξ_n в смысле слабой сходимости при $n \to \infty$.

Ф.И.О.							Номер группы	
1	2а	2б	3	4	5а	5б	$\sum$	

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

---

1. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 4-2x, & \text{если } x \in [1,\,2], \\ 0, & \text{если } x \notin [1,\,2]. \end{cases}$$

Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\varphi_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится по вероятности к 2.

2. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, принимающих значения -1 и 3 с равными вероятностями. Сходятся ли по вероятности при $n \to \infty$ последовательности $\varphi_n = \dfrac{e^{\xi_1} + \ldots + e^{\xi_n}}{n}$ и $\psi_n = \exp\Big(\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\Big)$? Обосновать.

3. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1. Доказать по определению, что последовательность $\dfrac{\xi}{n}$ сходится по вероятности к нулю при $n \to \infty$.

4. Имеется 900 квадратов, для каждого из которых длина стороны выбираются на отрезке [0, 1] наудачу независимо от длин сторон остальных квадратов. Пользуясь ЦПТ, указать симметричные относительно среднего значения границы, в которых с вероятностью 0,95 лежит сумма площадей всех квадратов.

5. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [0, 1], а последовательность ξ_1, ξ_2, ... задана равенством: $\xi_n = \xi$ при всех n. Проверить, выполняется ли для этой последовательности **утверждение** ЦПТ.

6.* Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые и одинаково распределённые невырожденные случайные величины с конечной дисперсией и c — число. Доказать, что $\mathsf{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} < c\Big) \to \mathsf{P}(\mathsf{E}\xi_1 < c)$ при $n \to \infty$, если и только если $\mathsf{E}\xi_1 \neq c$.

Ф.И.О.							Номер группы	
1	2а	2б	3	4	5а	5б	$\sum$	

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4, & \text{если } x \in [2,\,3], \\ 0, & \text{если } x \notin [2,\,3]. \end{cases}$$

Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\varphi_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится по вероятности к 3.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, принимающих значения 0, $\pi/4$ и $\pi/3$ с равными вероятностями. Сходятся ли по вероятности при $n \to \infty$ последовательности $\varphi_n = \dfrac{\cos\xi_1 + \ldots + \cos\xi_n}{n}$ и $\psi_n = \cos\Bigl(\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\Bigr)$? Обосновать.

3. Доказать по определению, что имеет место слабая сходимость последовательности $\xi_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ к $\xi = 1$ при $n \to \infty$.

4. Имеется 2500 прямоугольников, у каждого из которых длина и ширина выбираются на отрезке $[0,\,1]$ наудачу (независимо друг от друга и независимо от длин сторон остальных прямоугольников). Пользуясь ЦПТ, указать симметричные относительно среднего значения границы, в которых с вероятностью 0,99 лежит суммарный периметр всех прямоугольников.

5. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 2, а последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ задана равенством: $\xi_n = \xi$ при всех n. Проверить, выполняется ли для этой последовательности **утверждение** ЦПТ.

6.* Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, $\mathsf{E}\xi_1 = 0$, $\mathsf{D}\xi_1 = 1$. Найти, куда слабо сходится последовательность

$$\eta_n = \sqrt{n}\,\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}.$$

<table>
<tr><td colspan="7">Ф.И.О.</td><td colspan="2">Номер группы</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2а</td><td>2б</td><td>3</td><td>4</td><td>5а</td><td>5б</td><td>$\sum$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

---

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 6-2x, & \text{если } x \in [2,\,3], \\ 0, & \text{если } x \notin [2,\,3]. \end{cases}$$

Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\varphi_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится по вероятности к 3.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, принимающих значения 3 и 5 с равными вероятностями. Сходятся ли по вероятности при $n \to \infty$ последовательности $\varphi_n = \dfrac{\ln\xi_1 + \ldots + \ln\xi_n}{n}$ и $\psi_n = \ln\Bigl(\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\Bigr)$? Обосновать.

3. Доказать по определению, что имеет место слабая сходимость последовательности $\xi_n = -\dfrac{1}{2^n}$ к $\xi = 0$ при $n \to \infty$.

4. Имеется 6400 прямоугольных треугольников, у каждого из которых длины катетов выбираются на отрезке $[0,\,1]$ наудачу (независимо друг от друга и независимо от длин катетов остальных треугольников). Пользуясь ЦПТ, указать симметричные относительно среднего значения границы, в которых с вероятностью 0,98 лежит суммарная площадь всех треугольников.

5. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1,\,1]$, а последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ задана равенством: $\xi_n = \xi$ при всех n. Проверить, выполняется ли для этой последовательности **утверждение** ЦПТ.

6.* Доказать по определению предела, что числовая последовательность $\dfrac{1}{n^2}$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

<table>
<tr><td colspan="7">Ф.И.О.</td><td colspan="2">Номер группы</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2а</td><td>2б</td><td>3</td><td>4</td><td>5а</td><td>5б</td><td>$\sum$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

1. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с плотностью распределения
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0,\,1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0,\,1]. \end{cases}$$
Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\varphi_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится по вероятности к 1.

2. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, принимающих значения 1, 2 и 4 с равными вероятностями. Сходятся ли по вероятности при $n \to \infty$ последовательности $\varphi_n = \dfrac{2^{\xi_1} + \ldots + 2^{\xi_n}}{n}$ и $\psi_n = 2^{\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}}$? Обосновать.

3. Пусть случайная величина $\xi_n \equiv \xi$ имеет распределение Бернулли с параметром 1/2. Сходится ли по вероятности последовательность ξ_n к 1/2 при $n \to \infty$? Обосновать свой ответ по определению сходимости по вероятности.

4. Имеется 400 параллелепипедов, у каждого из которых длина одной из сторон равна 1, а длины двух других выбираются на отрезке [0, 1] наудачу (независимо друг от друга и независимо от длин сторон остальных параллелепипедов). Пользуясь ЦПТ, указать симметричные относительно среднего значения границы, в которых с вероятностью 0,97 лежит суммарный объём всех параллелепипедов.

5. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 3, а последовательность ξ_1, ξ_2, ... задана равенством: $\xi_n = \xi$ при всех n. Проверить, выполняется ли для этой последовательности **утверждение** ЦПТ.

6.* Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые и одинаково распределённые невырожденные случайные величины с конечной дисперсией и c — число. Доказать, что $\mathsf{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} < c\Big) \to \mathsf{P}(\mathsf{E}\xi_1 < c)$ при $n \to \infty$, если и только если $\mathsf{E}\xi_1 \neq c$.

Ф.И.О.							Номер группы	
1	2а	2б	3	4	5а	5б	$\sum$	

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.

---

1. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с плотностью распределения
$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & \text{если } x \in [0,\,1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0,\,1]. \end{cases}$$
Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\varphi_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится по вероятности к 1.

2. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, принимающих значения $\pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/2$ с равными вероятностями. Сходятся ли по вероятности при $n \to \infty$ последовательности $\varphi_n = \dfrac{\sin\xi_1 + \ldots + \sin\xi_n}{n}$ и $\psi_n = \sin\Big(\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\Big)$? Обосновать.

3. Доказать по определению, что имеет место слабая сходимость последовательности $\xi_n = -\dfrac{1}{n^2}$ к $\xi = 0$ при $n \to \infty$.

4. Имеется 1600 треугольников, у каждого из которых длина основания и длина высоты, проведенной к этому основанию, выбираются на отрезке [0, 1] наудачу (независимо друг от друга и независимо от остальных треугольников). Пользуясь ЦПТ, указать симметричные относительно среднего значения границы, в которых с вероятностью 0,9 лежит суммарная площадь всех треугольников.

5. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [0, 2], а последовательность ξ_1, ξ_2, ... задана равенством: $\xi_n = \xi$ при всех n. Проверить, выполняется ли для этой последовательности **утверждение** ЦПТ.

6.* Вывести закон больших чисел в форме Чебышёва из центральной предельной теоремы.

Ф.И.О.							Номер группы	
1	2а	2б	3	4	5а	5б	$\sum$	

Примечание. При использовании любых утверждений сформулировать эти утверждения и проверить выполнение их условий.