

Вариант 1

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \theta, \quad P(X_1 = 2) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- а) Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - б) Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y = 2)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - в) Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - г) Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - д) Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[0, \tau]$ ,  $\tau > 0$ .
- а) Для какого параметра  $\theta = \theta(\tau)$  оценка  $\theta^* = \ln(2\bar{X})$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - б) Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
3. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[1, \theta + 1]$ ,  $\theta > 0$ .
- а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - в) Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение с плотностью  $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1} \cdot I(y \in (0, 1))$ , где  $\theta > 1$ . Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 2

1. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение  $P(X_1 = -2) = \theta$ ,  $P(X_1 = 0) = 1 - 2\theta$ ,  $P(X_1 = 1) = \theta$ , где  $\theta \in [0, 1/2]$ .
- а) Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по третьему моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - б) Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y \neq 0)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - в) Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - г) Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - д) Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[-\theta, 2\theta]$ ,  $\theta > 0$ .
- а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - в) Найти ОММ для параметра  $\theta$  по первому моменту.
3. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют нормальное распределение  $N_{a, 1}$ , где  $a \neq 0$ .
- а) Для какого параметра  $\theta = \theta(a)$  оценка  $\theta^* = e^{-(\bar{X})^2}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - б) Доказать, что оценка  $\theta^*$  является асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta$ .
4. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ . Проверить, является ли оценка  $\theta^* = \bar{X} e^{-\bar{X}}$  асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta = P(X_1 = 1)$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 3

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = \theta, \quad P(X_1 = 1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 2) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y = 1)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют показательное распределение с параметром  $\alpha > 0$ .
- Для какого параметра  $\theta = \theta(\alpha)$  оценка  $\theta^* = -\ln \bar{X}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
3. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[2, \theta + 2]$ ,  $\theta > 0$ .
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение с плотностью  $f_\theta(y) = 3\theta y^2 e^{-\theta y^3} \cdot I(y > 0)$ , где  $\theta > 0$ . Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 4

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = \theta, \quad P(X_1 = -1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 1) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по 4-му моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y \neq -1)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[-\theta, 3\theta]$ , где  $\theta > 0$ .
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
3. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют показательное распределение с параметром  $\alpha > 0$ .
- Для какого параметра  $\theta = \theta(\alpha)$  оценка  $\theta^* = e^{-\bar{X}}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
  - Сравнить в асимптотическом смысле две оценки  $\mu_1^* = \bar{X} \cdot \ln 2$  и  $\mu_2^* = X_{([n/2])}$  для медианы  $\mu$  этого распределения.
4. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют показательное распределение с параметром  $\alpha > 0$ . Проверить, является ли оценка  $\theta^* = \frac{1}{\bar{X}} e^{-\bar{X}}$  асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta = \alpha e^{-1/\alpha}$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 5

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = \theta, \quad P(X_1 = 1) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y = 1)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют биномиальное распределение с параметрами  $m$  и  $p$ .
- Для какого параметра  $\theta = \theta(m, p)$  оценка  $\theta^* = e^{\bar{X}}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
3. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[3, \theta + 3]$ ,  $\theta > 0$ .
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение с плотностью  $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1} \cdot I(y \in (0, 1))$ , где  $\theta > 1$ . Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 6

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 0) = \theta, \quad P(X_1 = 2) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по третьему моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y \neq 2)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[-2\theta, \theta]$ , где  $\theta > 0$ .
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - Найти ОММ для параметра  $\theta$  по первому моменту.
3. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение Бернулли с параметром  $p \in (0, 1)$ .
- Для какого параметра  $\theta = \theta(p)$  оценка  $\theta^* = e^{-(\bar{X})^3}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - Доказать асимптотическую несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ . Проверить, является ли оценка  $\theta^* = \frac{n}{n\bar{X} + 1}$  асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta = \frac{1}{\lambda}$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 7

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = -1) = \theta, \quad P(X_1 = 1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 0) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y = 1)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[\tau/2, \tau]$ ,  $\tau > 0$ .
- Для какого параметра  $\theta = \theta(\tau)$  оценка  $\theta^* = \ln(4\bar{X}/3)$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
3. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[4, \theta + 4]$ ,  $\theta > 0$ .
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение с плотностью  $f_\theta(y) = 4\theta y^3 e^{-\theta y^4} \cdot I(y > 0)$ , где  $\theta > 0$ . Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 8

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = -2) = \theta, \quad P(X_1 = 1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 0) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по второму моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y \neq 1)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из равномерного распределения на отрезке  $[\theta, 3\theta]$ , где  $\theta > 0$ .
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - Сравнить в асимптотическом смысле оценки  $\theta_1^* = \frac{1}{2}\bar{X}$  и  $\theta_2^* = \frac{1}{2}X_{([n/2])}$  для параметра  $\theta$ .
3. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют показательное распределение с параметром  $\alpha > 0$ .
- Для какого параметра  $\theta = \theta(\alpha)$  оценка  $\theta^* = e^{1/\bar{X}}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют показательное распределение с параметром  $\alpha > 0$ . Проверить, является ли оценка  $\theta^* = e^{-\bar{X}}$  асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta = e^{-1/\alpha}$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 9

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 3) = \theta, \quad P(X_1 = 2) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- а) Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - б) Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y = 2)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - в) Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - г) Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - д) Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют нормальное распределение с параметрами  $a = 0$  и  $\sigma^2$ .
- а) Для какого параметра  $\theta = \theta(\sigma^2)$  оценка  $\theta^* = e^{\overline{X}^2}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - б) Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
3. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[5, \theta + 5]$ ,  $\theta > 0$ .
- а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - в) Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение с плотностью  $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1} \cdot I(y \in (0, 1))$ , где  $\theta > 1$ . Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 10

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \theta, \quad P(X_1 = 0) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- а) Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по второму моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - б) Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y = 0)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - в) Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - г) Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - д) Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[-\theta, 2\theta]$ ,  $\theta > 0$ .
- а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - в) Найти ОММ для параметра  $\theta$  по первому моменту.
3. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют нормальное распределение  $N_{a,1}$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $2a^2 \neq 1$ .
- а) Для какого параметра  $\theta = \theta(a)$  оценка  $\theta^* = \overline{X} e^{-(\overline{X})^2}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - б) Доказать асимптотическую несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ . Проверить, является ли оценка  $\theta^* = e^{-\overline{X}}$  асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta = e^{-\lambda}$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 11

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = \theta, \quad P(X_1 = -1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 2) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- а) Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - б) Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y = -1)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - в) Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - г) Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - д) Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[\tau, 2\tau]$ ,  $\tau > 0$ .
- а) Для какого параметра  $\theta = \theta(\tau)$  оценка  $\theta^* = \ln(2\bar{X}/3)$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - б) Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
3. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[6, \theta + 6]$ ,  $\theta > 0$ .
- а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - в) Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение с плотностью  $f_\theta(y) = 5\theta y^4 e^{-\theta y^5} \cdot I(y > 0)$ , где  $\theta > 0$ . Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 12

1. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из следующего распределения:

$$P(X_1 = 1) = \theta, \quad P(X_1 = -1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 0) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- а) Найти ОММ  $\theta_1^*$  для параметра  $\theta$  по третьему моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
  - б) Найти ОММ  $\theta_2^*$  для параметра  $\theta$  по функции  $g(y) = I(y \neq -1)$ , проверить её несмещённость и состоятельность.
  - в) Сравнить  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  в среднеквадратичном смысле.
  - г) Проверить асимптотическую нормальность  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
  - д) Найти ОМП для параметра  $\theta$ .
2. Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из равномерного распределения на отрезке  $[0, 2\theta]$ .
- а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра  $\theta$ .
  - б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
  - в) Сравнить в асимптотическом смысле оценки  $\theta_1^* = \bar{X}$  и  $\theta_2^* = X_{([n/2])}$  для параметра  $\theta$ .
3. Элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют показательное распределение с параметром  $\alpha > 0$ .
- а) Для какого параметра  $\theta = \theta(\alpha)$  оценка  $\theta^* = \frac{1}{(\bar{X})^4}$  будет АНО? Найти коэффициент.
  - б) Проверить несмещённость оценки  $\theta^*$  для параметра  $\theta$ .
4. Пусть элементы выборки  $X_1, \dots, X_n$  имеют распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ . Проверить, является ли оценка  $\theta^* = \frac{n}{n\bar{X} + 1}$  асимптотически несмещённой оценкой для параметра  $\theta = \frac{1}{\lambda}$ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2,5 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).