

Вариант 1

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \theta, \quad P(X_1 = 2) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y = 2)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$.
- Для какого параметра $\theta = \theta(\tau)$ оценка $\theta^* = \ln(2\bar{X})$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
3. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[1, \theta + 1]$, $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1} \cdot I(y \in (0, 1))$, где $\theta > 1$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ .

Фамилия студента										Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 2

1. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение $P(X_1 = -2) = \theta$, $P(X_1 = 0) = 1 - 2\theta$, $P(X_1 = 1) = \theta$, где $\theta \in [0, 1/2]$.
- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по третьему моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y \neq 0)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[-\theta, 2\theta]$, $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Найти ОММ для параметра θ по первому моменту.
3. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют нормальное распределение $N_{a,1}$, где $a \neq 0$.
- Для какого параметра $\theta = \theta(a)$ оценка $\theta^* = e^{-(\bar{X})^2}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Доказать, что оценка θ^* является асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ .
4. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = \bar{X} e^{-\bar{X}}$ асимптотически несмещённой оценкой для параметра $\theta = P(X_1 = 1)$.

Фамилия студента										Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 3

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = \theta, \quad P(X_1 = 1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 2) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y = 1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - д) Найти ОМП для параметра θ .
2. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$.
- а) Для какого параметра $\theta = \theta(\alpha)$ оценка $\theta^* = -\ln \bar{X}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - б) Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
3. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[2, \theta + 2]$, $\theta > 0$.
- а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - в) Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = 3\theta y^2 e^{-\theta y^3} \cdot I(y > 0)$, где $\theta > 0$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 4

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = \theta, \quad P(X_1 = -1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 1) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по 4-му моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y \neq -1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - д) Найти ОМП для параметра θ .
2. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[-\theta, 3\theta]$, где $\theta > 0$.
- а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
3. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$.
- а) Для какого параметра $\theta = \theta(\alpha)$ оценка $\theta^* = e^{-\bar{X}}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - б) Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
 - в) Сравнить в асимптотическом смысле две оценки $\mu_1^* = \bar{X} \cdot \ln 2$ и $\mu_2^* = X_{([n/2])}$ для медианы μ этого распределения.
4. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = \frac{1}{\bar{X}} e^{-\bar{X}}$ асимптотически несмещённой оценкой для параметра $\theta = \alpha e^{-1/\alpha}$.

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 5

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = \theta, \quad P(X_1 = 1) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y = 1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют биномиальное распределение с параметрами m и p .
- Для какого параметра $\theta = \theta(m, p)$ оценка $\theta^* = e^{\bar{X}}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
3. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[3, \theta + 3]$, $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1} \cdot I(y \in (0, 1))$, где $\theta > 1$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 6

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 0) = \theta, \quad P(X_1 = 2) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по третьему моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y \neq 2)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[-2\theta, \theta]$, где $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Найти ОММ для параметра θ по первому моменту.
3. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.
- Для какого параметра $\theta = \theta(p)$ оценка $\theta^* = e^{-(\bar{X})^3}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Доказать асимптотическую несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение Пуассона с параметром λ . Проверить, является ли оценка $\theta^* = \frac{n}{n\bar{X} + 1}$ асимптотически несмещённой оценкой для параметра $\theta = \frac{1}{\lambda}$.

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 7

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = -1) = \theta, \quad P(X_1 = 1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 0) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y = 1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[\tau/2, \tau]$, $\tau > 0$.
- Для какого параметра $\theta = \theta(\tau)$ оценка $\theta^* = \ln(4\bar{X}/3)$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
3. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[4, \theta + 4]$, $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = 4\theta y^3 e^{-\theta y^4} \cdot I(y > 0)$, где $\theta > 0$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 8

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = -2) = \theta, \quad P(X_1 = 1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 0) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по второму моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y \neq 1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Дана выборка X_1, \dots, X_n из равномерного распределения на отрезке $[\theta, 3\theta]$, где $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Сравнить в асимптотическом смысле оценки $\theta_1^* = \frac{1}{2}\bar{X}$ и $\theta_2^* = \frac{1}{2}X_{([n/2])}$ для параметра θ .
3. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$.
- Для какого параметра $\theta = \theta(\alpha)$ оценка $\theta^* = e^{1/\bar{X}}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = e^{-\bar{X}}$ асимптотически несмещённой оценкой для параметра $\theta = e^{-1/\alpha}$.

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 9

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 3) = \theta, \quad P(X_1 = 2) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y = 2)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и σ^2 .
- Для какого параметра $\theta = \theta(\sigma^2)$ оценка $\theta^* = e^{\bar{X}^2}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
3. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[5, \theta + 5]$, $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1} \cdot I(y \in (0, 1))$, где $\theta > 1$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 10

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \theta, \quad P(X_1 = 0) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/2.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по второму моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y = 0)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[-\theta, 2\theta]$, $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Найти ОММ для параметра θ по первому моменту.
3. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют нормальное распределение $N_{a,1}$, где $a \in \mathbb{R}$, $2a^2 \neq 1$.
- Для какого параметра $\theta = \theta(a)$ оценка $\theta^* = \bar{X} e^{-(\bar{X})^2}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Доказать асимптотическую несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = e^{-\bar{X}}$ асимптотически несмещённой оценкой для параметра $\theta = e^{-\lambda}$.

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 11

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = 0) = \theta, \quad P(X_1 = -1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 2) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y = -1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[\tau, 2\tau]$, $\tau > 0$.
- Для какого параметра $\theta = \theta(\tau)$ оценка $\theta^* = \ln(2\bar{X}/3)$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
3. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют равномерное распределение на отрезке $[6, \theta + 6]$, $\theta > 0$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Проверить состоятельность полученной оценки.
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = 5\theta y^4 e^{-\theta y^5} \cdot I(y > 0)$, где $\theta > 0$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ .

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	3а	3б	3в	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).

Вариант 12

1. Дана выборка X_1, \dots, X_n из следующего распределения:

$$P(X_1 = 1) = \theta, \quad P(X_1 = -1) = 1 - 3\theta, \quad P(X_1 = 0) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1/3.$$

- Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по третьему моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = I(y \neq -1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
 - Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
 - Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^* , найти коэффициенты асимпт. нормальности.
 - Найти ОМП для параметра θ .
2. Дана выборка X_1, \dots, X_n из равномерного распределения на отрезке $[0, 2\theta]$.
- Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .
 - Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
 - Сравнить в асимптотическом смысле оценки $\theta_1^* = \bar{X}$ и $\theta_2^* = X_{([n/2])}$ для параметра θ .
3. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$.
- Для какого параметра $\theta = \theta(\alpha)$ оценка $\theta^* = \frac{1}{(\bar{X})^4}$ будет АНО? Найти коэффициент.
 - Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ .
4. Пусть элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение Пуассона с параметром λ . Проверить, является ли оценка $\theta^* = \frac{n}{n\bar{X} + 1}$ асимптотически несмещённой оценкой для параметра $\theta = \frac{1}{\lambda}$.

Фамилия студента											Номер группы
1а	1б	1в	1г	1д	2а	2б	2в	3а	3б	4	

Все пункты — по 2 балла. Полное решение задачи 4 оценивается 4 баллами (частичное — нулём).