1. (9 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\theta(y) = \begin{cases} \dfrac{3y^2}{\theta^3}, & \text{если } y \in [0,\ \theta], \\ 0, & \text{если } y \notin [0,\ \theta], \end{cases} \qquad \text{где } \theta > 0.$$

а) Найти оценку метода моментов для параметра θ с помощью функции $g(y) = y^4$.
б) Проверить несмещенность полученной оценки.
в) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

2. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$.
а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра λ.
б) Сравнить полученную оценку с оценкой $\lambda^{**} = (3X_1 - X_2)/2$ в среднеквадратическом смысле.

3. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-2\theta,\ 0]$.
а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.
б) Доказать, что полученная оценка не является асимптотически нормальной.

4. (5 баллов) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Сравнить в асимптотическом смысле две оценки для медианы μ этого распределения: $\mu_1^* = \overline{X} \cdot \ln 2$ и $\mu_2^* = X_{([n/2])}$.

5. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение Пуассона с параметром λ. Проверить, является ли оценка $\theta^* = \dfrac{n}{n\overline{X} + 1}$ асимптотически несмещенной оценкой для параметра $\theta = \dfrac{1}{\lambda}$, т. е. имеет ли место сходимость $\mathsf{E}\theta^*$ к θ при $n \to \infty$.

ФИО студента									Номер группы
1а	1б	1в	2а	2б	3а	3б	4	5	

---

1. (9 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\theta(y) = \begin{cases} -\dfrac{2y}{\theta^2}, & \text{если } y \in [-\theta,\ 0], \\ 0, & \text{если } y \notin [-\theta,\ 0], \end{cases} \qquad \text{где } \theta > 0.$$

а) Найти оценку метода моментов для параметра θ с помощью функции $g(y) = y^3$.
б) Проверить несмещенность полученной оценки.
в) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

2. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют нормальное распределение $\mathbf{N}_{a,\,1}$, где $a > 0$.
а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра a.
б) Сравнить полученную оценку с оценкой $a^{**} = (5X_1 - X_2)/4$ в среднеквадратическом смысле.

3. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 3\theta]$.
а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.
б) Доказать, что полученная оценка не является асимптотически нормальной.

4. (5 баллов) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из равномерного распределения на отрезке $[\theta,\ 3\theta]$. Сравнить в асимптотическом смысле две оценки для параметра θ этого распределения: $\theta_1^* = \frac{1}{2}\overline{X}$ и $\theta_2^* = \frac{1}{2}X_{([n/2])}$.

5. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = e^{-\overline{X}}$ асимптотически несмещенной оценкой для параметра $\theta = e^{-1/\alpha}$, т. е. имеет ли место сходимость $\mathsf{E}\theta^*$ к θ при $n \to \infty$.

ФИО студента									Номер группы
1а	1б	1в	2а	2б	3а	3б	4	5	

1. (9 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\theta(y) = \begin{cases} \dfrac{4y^3}{\theta^4}, & \text{если } y \in [0,\ \theta], \\ 0, & \text{если } y \notin [0,\ \theta], \end{cases} \qquad \text{где } \theta > 0.$$

а) Найти оценку метода моментов для параметра θ с помощью функции $g(y) = y^3$.
б) Проверить несмещенность полученной оценки.
в) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

2. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение $\mathbf{E}_{1/\alpha}$ с параметром $1/\alpha$.
а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра α.
б) Сравнить полученную оценку с оценкой $\alpha^{**} = (4X_1 - X_2)/3$ в среднеквадратическом смысле.

3. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-3\theta,\ 0]$.
а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.
б) Доказать, что полученная оценка не является асимптотически нормальной.

4. (5 баллов) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из «отрицательного показательного» распределения с функцией распределения $F(y) = e^{\alpha y}$, $y < 0$, $\alpha > 0$. Сравнить в асимптотическом смысле две оценки для медианы μ этого распределения: $\mu_1^* = \overline{X} \cdot \ln 2$ и $\mu_2^* = X_{([n/2])}$.

5. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = e^{-\overline{X}}$ асимптотически несмещенной оценкой для параметра $\theta = e^{-\lambda}$, т. е. имеет ли место сходимость $\mathsf{E}\theta^*$ к θ при $n \to \infty$.

ФИО студента									Номер группы
1а	1б	1в	2а	2б	3а	3б	4	5	

---

1. (9 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\theta(y) = \begin{cases} \dfrac{5y^4}{\theta^5}, & \text{если } y \in [-\theta,\ 0], \\ 0, & \text{если } y \notin [-\theta,\ 0], \end{cases} \qquad \text{где } \theta > 0.$$

а) Найти оценку метода моментов для параметра θ с помощью функции $g(y) = y^6$.
б) Проверить несмещенность полученной оценки.
в) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

2. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют биномиальное распределение $B_{2,\,p}$ с параметрами 2 и p.
а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра p.
б) Сравнить полученную оценку с оценкой $p^{**} = (2X_1 - X_2)/2$ в среднеквадратическом смысле.

3. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 2\theta]$.
а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.
б) Доказать, что полученная оценка не является асимптотически нормальной.

4. (5 баллов) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из равномерного распределения на отрезке $[0,\ 2\theta]$. Сравнить в асимптотическом смысле две оценки для параметра θ этого распределения: $\theta_1^* = \overline{X}$ и $\theta_2^* = X_{([n/2])}$.

5. (6 баллов) Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = e^{-\overline{X}}$ асимптотически несмещенной оценкой для параметра $\theta = e^{-1/\alpha}$, т. е. имеет ли место сходимость $\mathsf{E}\theta^*$ к θ при $n \to \infty$.

ФИО студента									Номер группы
1а	1б	1в	2а	2б	3а	3б	4	5	