1. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathsf{P}_p(X_1 = -1) = p$, $\mathsf{P}_p(X_1 = 2) = 1 - p$ с параметром $p \in [0, 1]$. Найти оценку метода моментов для параметра p по второму моменту.

2. Является ли, в условиях задачи **1**, оценка $(8 - \overline{X^3})/9$ несмещенной? состоятельной?

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение с параметром α. Является ли оценка $\sqrt{1/\overline{X}}$ асимптотически нормальной оценкой для параметра $\sqrt{\alpha}$? Если «да», то с каким коэффициентом?

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[\theta,\, 4\theta{+}1]$, где $\theta \geqslant -1/3$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

5. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 2$ имеют распределение Пуассона с параметром λ.

а) Являются ли оценки X_1, $(X_1 + X_2)/2$ и $\overline{X}$ параметра λ несмещенными? состоятельными?

б) Сравнить все три оценки в среднеквадратическом смысле.

6.* Найти ОМП для параметра p из задачи **1** и показать, что она совпадает с оценкой метода моментов, полученной по первому моменту.

Фамилия студента							Номер группы
1	2	3	4	5а	5б	6	

---

1. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathsf{P}_p(X_1 = 1) = 1 - p$, $\mathsf{P}_p(X_1 = -2) = p$ с параметром $p \in [0, 1]$. Найти оценку метода моментов для параметра p по третьему моменту.

2. Является ли, в условиях задачи **1**, оценка $(\overline{X^2} - 1)/2$ несмещенной? состоятельной?

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$. Является ли оценка $\left(2\overline{X}\right)^4$ асимптотически нормальной оценкой для параметра θ^4? Если «да», то с каким коэффициентом?

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[\theta + 1,\, 2\theta + 2]$, где $\theta \geqslant -1$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

5. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 3$ имеют распределение Бернулли с параметром p.

а) Являются ли оценки X_2, $(X_2 + X_3)/2$ и $\overline{X}$ параметра p несмещенными? состоятельными?

б) Сравнить все три оценки в среднеквадратическом смысле.

6.* Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\, \theta]$. Найти предел при $k \to \infty$ (в смысле сходимости почти наверное) последовательности оценок метода моментов для параметра θ, полученных по k-му моменту.

Фамилия студента							Номер группы
1	2	3	4	5а	5б	6	

1. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathsf{P}_p(X_1 = -2) = p$, $\mathsf{P}_p(X_1 = -1) = 1 - p$ с параметром $p \in [0, 1]$. Найти оценку метода моментов для параметра p по второму моменту.

2. Является ли, в условиях задачи **1**, оценка $(\overline{X^4} - 1)/15$ несмещенной? состоятельной?

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение Пуассона с параметром λ. Является ли оценка $\left(\overline{X}\right)^3$ асимптотически нормальной оценкой для параметра λ^3? Если «да», то с каким коэффициентом?

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[\theta + 2,\, 4\theta]$, где $\theta \geqslant 2/3$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

5. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 4$ имеют нормальное распределение с параметрами a и 1.

а) Являются ли оценки X_3, $(X_3 + X_4)/2$ и $\overline{X}$ параметра a несмещенными? состоятельными?

б) Сравнить все три оценки в среднеквадратическом смысле.

6.* Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$. Доказать, что оценка метода моментов для параметра θ, полученная по пятому моменту, является смещенной.

Фамилия студента							Номер группы
1	2	3	4	5а	5б	6	

---

1. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathsf{P}_p(X_1 = -3) = 1 - p$, $\mathsf{P}_p(X_1 = 1) = p$ с параметром $p \in [0, 1]$. Найти оценку метода моментов для параметра p по третьему моменту.

2. Является ли, в условиях задачи **1**, оценка $(9 - \overline{X^2})/8$ несмещенной? состоятельной?

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют биномиальное распределение с параметрами 5 и p, где $0 < p < 1$. Является ли оценка $\sqrt{1 - (\overline{X}/5)}$ асимптотически нормальной оценкой для параметра $\sqrt{1 - p}$? Если «да», то с каким коэффициентом?

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[\theta,\, 2\theta + 3]$, где $\theta \geqslant -3$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

5. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 5$ имеют показательное распределение с параметром $1/\alpha$.

а) Являются ли оценки X_4, $(X_4 + X_5)/2$ и $\overline{X}$ параметра α несмещенными? состоятельными?

б) Сравнить все три оценки в среднеквадратическом смысле.

6.* Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$. Доказать, что на каждом элементарном исходе имеет место неравенство $\sqrt[k]{\overline{X^k}} \leqslant \sqrt[m]{\overline{X^m}}$ при $k \leqslant m$.

Фамилия студента							Номер группы
1	2	3	4	5а	5б	6	

1. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathsf{P}_p(X_1 = 0) = p$, $\mathsf{P}_p(X_1 = 3) = 1 - p$ с параметром $p \in [0, 1]$. Найти оценку метода моментов для параметра p по четвертому моменту.

2. Является ли, в условиях задачи **1**, оценка $1 - (\overline{X^3})/27$ несмещенной? состоятельной?

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют нормальное распределение с параметрами a и 1. Является ли оценка $\sqrt[3]{\overline{X}}$ асимптотически нормальной оценкой для параметра $\sqrt[3]{a}$? Если «да», то с каким коэффициентом?

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[\theta - 1, 2\theta + 1]$, где $\theta \geqslant -2$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

5. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 6$ равномерно распределены на отрезке $[0,\, 2\theta]$.

а) Являются ли оценки X_5, $(X_5 + X_6)/2$ и $\overline{X}$ параметра θ несмещенными? состоятельными?

б) Сравнить все три оценки в среднеквадратическом смысле.

6.* Доказать с помощью неравенства Чебышёва, что асимптотически несмещенная оценка, дисперсия которой стремится к нулю, является состоятельной.

Фамилия студента							Номер группы
1	2	3	4	5а	5б	6	

---

1. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathsf{P}_p(X_1 = -2) = 1 - p$, $\mathsf{P}_p(X_1 = 2) = p$ с параметром $p \in [0, 1]$. Найти оценку метода моментов для параметра p по третьему моменту.

2. Является ли, в условиях задачи **1**, оценка $(\overline{X^5} + 32)/64$ несмещенной? состоятельной?

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение Бернулли с параметром p. Является ли оценка $\left(\overline{X}\right)^4$ асимптотически нормальной оценкой для параметра p^4? Если «да», то с каким коэффициентом?

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[\theta - 1,\, 3\theta + 1]$, где $\theta \geqslant -1$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

5. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 7$ имеют нормальное распределение с параметрами α и $\sigma^2 = 4$.

а) Являются ли оценки X_6, $(X_6 + X_7)/2$ и $\overline{X}$ параметра α несмещенными? состоятельными?

б) Сравнить все три оценки в среднеквадратическом смысле.

6.* Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\, \theta]$. Найти предел в смысле сходимости по распределению (слабой сходимости) последовательности случайных величин $\dfrac{n}{\theta}\left(\theta - X_{(n)}\right)$ при $n \to \infty$.

Фамилия студента							Номер группы
1	2	3	4	5а	5б	6	