1. Из списка, в котором 4 первокурсника, 5 второкурсников и 3 третьекурсника, выбирают наугад четверых. Найти вероятность того, будут выбраны две пары студентов с двух разных курсов.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке [0, 1], и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке [0, 2].
а) Проверить, являются ли три события $\{\xi + \eta < 1\}$, $\{\xi > \eta\}$ и $\{\eta = 1/2\}$ независимыми в совокупности.
б) Найти вероятность события $\{\max(2\xi, \eta) < 1\}$.

3. Поступающие по конвейеру детали нестандартны с вероятностью 0,1. Проверить независимость следующих событий: $A = \{$первой нестандартной оказалась 5-я деталь$\}$, $B = \{$второй нестандартной оказалась 8-я деталь$\}$.

4. В первой урне — 5 белых и 3 чёрных шара, во второй — 2 белых и 1 чёрный. Из первой урны наудачу берут три шара. Если все они одного цвета, их опускают во вторую урну и перемешивают, иначе — выбрасывают. Затем из второй урны дважды **с возвращением** берут шар.

Какова вероятность того, что шары, вынутые из первой урны, были разных цветов, если оба раза из второй урны был вынут белый шар?

5. Найти вероятность того, что при десяти бросаниях двух правильных монет два герба на монетах выпадут не менее трёх раз.

6*. Подбрасывают две игральных кости. Найти три различные сигма-алгебры $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ такие, что

$$\{\emptyset, \Omega\} \neq \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_3 \neq 2^{\Omega}.$$

---

1. Любая попытка общения между студентами (в **любой** форме и **по любому** поводу) оценивается в 0,5 балла штрафа. Выход из аудитории до окончательной сдачи работы категорически воспрещён.

2. Задача **не** является решённой, если приводится только ответ, если решение недостаточно объяснено или если правильный ответ неверно аргументирован.

ФИО студента						Номер группы	
1	2	3	4	5	6	$\sum$	

---

1. Из колоды в 52 карты (4 масти по 13 карт в каждой) наудачу выбирают четыре карты. Найти вероятность, что среди них окажется две пары карт двух разных мастей.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке [0, 2], и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке [0, 3].
а) Проверить, являются ли три события $\{\xi + \eta < 2\}$, $\{\eta = 1\}$ и $\{\xi > \eta\}$ независимыми в совокупности.
б) Найти вероятность события $\{\min(\xi, \eta) < 1\}$.

3. Каждый день, начиная с 1-го сенября, в общежитии может не быть горячей воды с вероятностью 0,2 независимо от остальных дней. Проверить независимость следующих событий: $A = \{$впервые горячую воду отключат 3-го сентября$\}$, $B = \{$второй раз горячую воду отключат 10-го сентября$\}$.

4. В первой урне — 3 белых и 6 чёрных шаров, во второй — 1 белый и 1 чёрный. Из первой урны наудачу берут три шара. Если вынутые шары одного цвета, их выбрасывают, в противном случае — опускают во вторую урну и перемешивают. Затем из второй урны дважды **с возвращением** берут шар.

Какова вероятность того, что шары, вынутые из первой урны, были одноцветные, если оба раза из второй урны был вынут белый шар?

5. Три симметричные монеты подбрасывают пять раз. Какова вероятность того, что три решки на монетах выпали не менее четырёх раз?

6*. Дано вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P} \rangle$. Пусть $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{F} : \mathsf{P}(A) = 0 \text{ или } \mathsf{P}(A) = 1\}$. Доказать, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

---

1. Любая попытка общения между студентами (в **любой** форме и **по любому** поводу) оценивается в 0,5 балла штрафа. Выход из аудитории до окончательной сдачи работы категорически воспрещён.

2. Задача **не** является решённой, если приводится только ответ, если решение недостаточно объяснено или если правильный ответ неверно аргументирован.

ФИО студента						Номер группы	
1	2	3	4	5	6	$\sum$	

1. В коробке 5 красных, 7 синих и 2 белых пуговицы. Найти вероятность того, что среди четырёх наугад вынутых пуговиц окажутся по две пуговицы двух разных цветов.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке $[0,\,1]$, и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке $[-1,\,1]$.
а) Проверить, являются ли три события $\{\eta = 0\}$, $\{\xi < \eta\}$ и $\{\xi + \eta < 1\}$ независимыми в совокупности.
б) Найти вероятность события $\{\max(\xi, \eta) > 1/2\}$.

3. Преподаватель проводит перекличку студентов по списку. Каждый студент может отсутствовать на семинаре с вероятностью 0,1 независимо от остальных. Проверить независимость следующих событий: $A = \{$первый отсутствующий студент имеет номер 3 по списку$\}$, $B = \{$второй отсутствующий студент имеет номер 12 по списку$\}$.

4. В первой урне — 4 белых и 3 чёрных шара, во второй — 1 белый и 2 чёрных. Из первой урны наудачу извлекают три шара. Если все они одного цвета, их опускают во вторую урну и перемешивают, иначе — выбрасывают. Затем из второй урны дважды **с возвращением** берут шар.

Какова вероятность того, что шары, вынутые из первой урны, были белыми, если оба раза из второй урны был вынут белый шар?

5. Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. Какова вероятность, что из восьми семей с тремя детьми не менее чем в двух семьях окажется по три мальчика?

6.* Пусть Ω — произвольное непустое множество, $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — σ-алгебры подмножеств Ω. Является ли множество $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ σ-алгеброй? Если «да» — доказать, если «нет» — привести контрпример.

---

1. Любая попытка общения между студентами (в **любой** форме и **по любому** поводу) оценивается в 0,5 балла штрафа. Выход из аудитории до окончательной сдачи работы категорически воспрещён.

2. Задача **не** является решённой, если приводится только ответ, если решение недостаточно объяснено или если правильный ответ неверно аргументирован.

ФИО студента						Номер группы	
1	2	3	4	5	6	$\sum$	

---

1. На полке 3 учебника Б. В. Гнеденко, 5 задачников В. Е. Гмурмана и 6 учебников А. А. Боровкова. Найти вероятность того, что среди четырёх наудачу вынутых книг окажутся две пары книг двух разных авторов.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке $[-1,\,1]$, и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке $[0,\,2]$.
а) Проверить, являются ли три события $\{\xi+\eta < 0\}$, $\{\xi = 0\}$ и $\{\xi+1 > \eta\}$ независимыми в совокупности.
б) Найти вероятность события $\{\min(\xi, \eta) > 1/2\}$.

3. Вероятность выпадения герба при броске монеты равна p. Найти вероятности событий $A = \{$впервые герб выпадет при третьем броске$\}$ и $B = \{$второй раз герб выпадет при девятом броске$\}$, найти $\mathsf{P}(A \cap B)$. Проверить, будут ли события A и B независимы при $p = \frac{1}{2}$.

4. В первой урне — 3 белых и 5 чёрных шаров, во второй — 1 белый и 1 чёрный. Из первой урны наудачу извлекают три шара. Если вынутые шары одного цвета, их выбрасывают, в противном случае — опускают во вторую урну и перемешивают. Затем из второй урны дважды **с возвращением** берут шар.

Какова вероятность того, что из первой урны извлекли два белых шара и один чёрный, если оба раза из второй урны был вынут чёрный шар?

5. Найти вероятность того, что при десяти бросаниях трёх игральных костей не менее двух раз появится сумма очков, равная четырём.

6*. Пусть Ω — произвольное непустое множество, $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — σ-алгебры подмножеств Ω. Доказать, что $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ также является σ-алгеброй.

---

1. Любая попытка общения между студентами (в **любой** форме и **по любому** поводу) оценивается в 0,5 балла штрафа. Выход из аудитории до окончательной сдачи работы категорически воспрещён.

2. Задача **не** является решённой, если приводится только ответ, если решение недостаточно объяснено или если правильный ответ неверно аргументирован.

ФИО студента						Номер группы	
1	2	3	4	5	6	$\sum$	

1. На тарелке 4 пирожных «картошка», 5 бисквитных и 3 заварных. Найти вероятность того, что среди четырёх наудачу взятых пирожных окажется две пары пирожных двух разных видов.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке $[0,\,1]$, и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке $[0,\,2]$.
а) Проверить, являются ли три события $\{\eta = 1\}$, $\{\xi < \eta\}$ и $\{\xi + \eta < 1\}$ независимыми в совокупности.
б) Найти вероятность события $\{\max(\xi, \eta) < 1/2\}$.

3. Штирлиц шел по коридору, последовательно стреляя по лампочкам и попадая в каждую лампочку с вероятностью 0,3 независимо от остальных. Проверить независимость следующих событий: $A = \{$первой от входа разбитой лампочкой окажется лампочка номер 3$\}$, $B = \{$второй от входа разбитой лампочкой окажется лампочка номер 7$\}$.

4. В первой урне — 5 белых и 4 чёрных шара, во второй — 1 белый и 1 чёрный шар. Из первой урны наудачу извлекают три шара. Если все они одного цвета, их опускают во вторую урну и перемешивают, иначе — выбрасывают. После этого из второй урны дважды **с возвращением** берут шар.

Какова вероятность того, что шары, вынутые из первой урны, были чёрными, если оба раза из второй урны был вынут чёрный шар?

5. Семь раз подбрасывают три правильные монеты. Какова вероятность того, что не более двух раз появится набор из двух гербов и решки?

6*. Доказать следующее утверждение или привести контрпример: *события $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, если $\forall\, k = 1, \ldots, n$ имеет место равенство*: $\mathsf{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_k\right) = \mathsf{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_k)$.

---

1. Любая попытка общения между студентами (в **любой** форме и **по любому** поводу) оценивается в 0,5 балла штрафа. Выход из аудитории до окончательной сдачи работы категорически воспрещён.

2. Задача **не** является решённой, если приводится только ответ, если решение недостаточно объяснено или если правильный ответ неверно аргументирован.

ФИО студента						Номер группы	
1	2	3	4	5	6	$\sum$	

---

1. На полке 4 тома А. Дюма, 2 тома Р. Брэдбери и 6 томов А. С. Пушкина. Найти вероятность, что среди четырёх наудачу вынутых книг окажется две пары книг двух разных авторов.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке $[0,\,3]$, и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке $[0,\,2]$.
а) Проверить, являются ли три события $\{\xi < \eta\}$, $\{\xi = 1\}$ и $\{\xi + \eta < 2\}$ независимыми в совокупности.
б) Найти вероятность события $\{\min(\xi, \eta) < 1\}$.

3. Каждый день марта может быть тёплым с вероятностью 0,2 независимо от остальных дней. Проверить независимость следующих событий: $A = \{$первым теплым днем будет 4-е марта$\}$, $B = \{$вторым теплым днем будет 11-е марта$\}$.

4. В первой урне — 4 белых и 4 чёрных шара, во второй — 3 белых и 1 чёрный. Из первой урны наудачу извлекают три шара. Если вынутые шары одного цвета, их выбрасывают, в противном случае — опускают во вторую урну и перемешивают. После этого из второй урны дважды **с возвращением** берут шар.

Какова вероятность того, что шары, вынутые из первой урны, были одноцветные, если оба раза из второй урны был вынут белый шар?

5. Вероятность рождения мальчика и девочки одинакова. Какова вероятность, что из 10 семей с тремя детьми не менее чем в трёх семьях окажется по три девочки?

6*. Пусть $\mathcal{A}$ — совокупность всех подмножеств $\mathbb{R}^2$, имеющих вид $B_1 \times B_2$ (декартово произведение), где $B_1,\, B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — борелевские множества. Проверить, является ли $\mathcal{A}$ σ-алгеброй подмножеств $\mathbb{R}^2$.

---

1. Любая попытка общения между студентами (в **любой** форме и **по любому** поводу) оценивается в 0,5 балла штрафа. Выход из аудитории до окончательной сдачи работы категорически воспрещён.

2. Задача **не** является решённой, если приводится только ответ, если решение недостаточно объяснено или если правильный ответ неверно аргументирован.

ФИО студента						Номер группы	
1	2	3	4	5	6	$\sum$	

1. Из колоды в 52 карты (4 масти по 13 карт в каждой) наугад выбирают восемь карт. Найти вероятности событий $A = \{$среди выбранных карт будет по четыре карты каких-то двух мастей$\}$ и $B = \{$среди выбранных карт будет хотя бы одна дама$\}$.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке $[0,\ 3]$, и независимо от неё точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке $[0,\ 2]$.

Проверить, являются ли события $\{\xi + \eta < 2\}$, $\{1 < \xi < 5/2\}$ и $\{\eta < 1\}$ независимыми в совокупности.

3. Брошены 8 игральных костей. Проверить независимость событий: $A = \{$выпали ровно три шестёрки$\}$ и $B = \{$при первых трёх бросках выпали единицы$\}$.

4. В первой урне 8 белых и 3 черных шара, во второй — 5 белых и 3 черных, третья — пустая. Из первой урны наудачу выбирают два шара, а из второй — один шар. Эти три шара складывают в третью урну. После этого из третьей урны четырежды с возвращением берут шар, и всякий раз он оказывается белым. Найти вероятность того, что из первой и второй урн достали лишь белые шары.

5. Известно, что $\mathsf{P}(A \cap C) = 0{,}3$, $\mathsf{P}(B \cap C) = 0{,}2$, $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}1$, $\mathsf{P}(C) = 0{,}5$. Найти $\mathsf{P}(A \mid \overline{B} \cap C)$.

6*. Пусть τ — время безотказной работы прибора, принимающее значения $1, 2, 3, \ldots$ с некоторыми вероятностями $p_k = \mathsf{P}(\tau = k)$. Пусть для любых натуральных чисел n и m имеет место равенство

$$\mathsf{P}(\tau > n + m \,|\, \tau > n) = \mathsf{P}(\tau > m).$$

Доказать, что тогда $\mathsf{P}(\tau > k) = (1 - p_1)^k$ и выразить p_k через p_1.

---

1. Любая попытка общения между студентами (в **любой** форме и **по любому** поводу) оценивается в 0,5 балла штрафа. Выход из аудитории до окончательной сдачи работы категорически воспрещён.

2. Задача **не** является решённой, если приводится только ответ, если решение недостаточно объяснено или если правильный ответ неверно аргументирован.

ФИО студента						Номер группы	
1	2	3	4	5	6	$\sum$	

---

1. Из колоды в 52 карты (4 масти по 13 карт в каждой) наугад выбирают шесть карт. Найти вероятности событий $A = \{$среди выбранных карт будет не менее двух пиковых карт и не менее трёх крестовых карт$\}$ и $B = \{$все выбранные карты будут одной масти$\}$.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке $[0,\ 1]$, и независимо от неё точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке $[-1,\ 1]$.

Проверить, являются ли три события $\{\eta > 0\}$, $\{\xi > 1/2\}$ и $\{\xi + \eta > 1\}$ независимыми в совокупности.

3. Брошены 7 игральных костей. Проверить независимость событий: $A = \{$выпали ровно две пятёрки$\}$ и $B = \{$при последних трёх бросках выпали шестёрки$\}$.

4. Есть три кубика. На первом две грани из шести белые, на втором белых граней четыре, а на третьем — пять. Наудачу выбранный кубик подбрасывается пять раз. Найти вероятность того, что выбран первый кубик, если при пяти подбрасываниях белая грань выпала ровно трижды раза.

5. Известно, что $\mathsf{P}(A \cap B) = 0{,}2$, $\mathsf{P}(A \cap C) = 0{,}2$, $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}1$, $\mathsf{P}(A) = 0{,}5$. Найти $\mathsf{P}(B \mid A \cap \overline{C})$.

6*. Пусть τ — время безотказной работы прибора, принимающее значения $1, 2, 3, \ldots$ с некоторыми вероятностями $p_k = \mathsf{P}(\tau = k)$. Пусть для любых натуральных чисел n и m имеет место равенство

$$\mathsf{P}(\tau > n + m \,|\, \tau > n) = \mathsf{P}(\tau > m).$$

Доказать, что тогда $\mathsf{P}(\tau > k) = (1 - p_1)^k$ и выразить p_k через p_1.

---

1. Любая попытка общения между студентами (в **любой** форме и **по любому** поводу) оценивается в 0,5 балла штрафа. Выход из аудитории до окончательной сдачи работы категорически воспрещён.

2. Задача **не** является решённой, если приводится только ответ, если решение недостаточно объяснено или если правильный ответ неверно аргументирован.

ФИО студента						Номер группы	
1	2	3	4	5	6	$\sum$	