**1.** На полке семь учебников по теории вероятностей (ТВ), семь — по математическому анализу и девять — по микроэкономике. Наудачу выбирают шесть книг. Найти вероятности следующих событий:
а) {среди выбранных книг есть не менее трёх книг по ТВ};
б) {среди выбранных книг есть не менее трёх книг по ТВ или не менее трёх книг по микроэкономике}.

**2.** На отрезок $[0,\ 8]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\max(\xi,\eta) < 4\}$ и $\{\xi + \eta > 2\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{2 < \eta < 6\}$, $\{3 < \eta < 7\}$ и $\{\eta < 4\}$ независимыми в совокупности.

**3.** Из колоды карт $n$ раз с возвращением выбирается карта. Какова вероятность того, что ни разу не появится пиковая карта? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** В первой урне семь белых и два чёрных шара, во второй — четыре белых и пять чёрных. Из каждой урны наудачу выбирается шар. Известно, что один шар оказался белым и один шар — чёрным. Найти (условную) вероятность того, что из второй урны был выбран белый шар.

**5.** Известно, что $A \cap B$ влечёт $C$. Доказать, что тогда $-1 \leqslant \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(C) \leqslant 1$.

**6.** Пусть события $A$, $B$, $C$, $D$ независимы в совокупности. Доказать, что события $\overline{A}$, $B$, $C$, $D$ также независимы в совокупности.

---

**1.** Из урны, содержащей по десять красных, синих и белых шаров, наудачу и без возвращения выбираются пять шаров. Найти вероятности следующих событий:
а) {среди вынутых шаров окажутся хотя бы два синих шара};
б) {среди вынутых шаров окажутся хотя бы два синих шара и хотя бы два белых}.

**2.** На отрезок $[-1,\ 1]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\max(\xi,\ \eta) < 1/2\}$ и $\{\eta < 0\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{\xi \leqslant 0\}$, $\{\xi \geqslant 0\}$ и $\{\xi = 0\}$ независимыми в совокупности.

**3.** Симметричная игральная кость подбрасывается $n$ раз. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпадет шесть очков? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** Есть три урны с шарами. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй и в третьей — по 2 белых и по 4 чёрных. Наудачу выбирается урна, и из нее пять раз вынимается шар, который каждый раз возвращается обратно, и шары в урне перемешиваются. Найти вероятность того, что была выбрана первая урна, если ровно три раза из пяти был вынут белый шар.

**5.** Пусть $A$ и $B$ — произвольные события, и $\mathsf{P}(A) > 0$. Доказать, что $1 - \dfrac{\mathsf{P}(\overline{B})}{\mathsf{P}(A)} \leqslant \mathsf{P}(B \,|\, A) \leqslant \dfrac{\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)}$.

**6.** Пусть $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$ и $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Построить какую-нибудь меру $\mu$ на $(\Omega,\ \mathcal{F})$ такую, что $\mu(\Omega) = 10$.

---

**1.** Из колоды в 36 карт (4 масти по 9 карт, от шестёрки до туза) наудачу и без возвращения выбираются 5 карт. Найти вероятности следующих событий:
а) {попадётся не менее двух тузов};
б) {попадётся не менее двух тузов или не менее трёх королей}.

**2.** На отрезок $[-1,\ 11]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\min(\xi,\ \eta) \geqslant 5\}$ и $\{\xi > 9\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{0 < \eta < 6\}$, $\{\eta > 5\}$ и $\{3 < \eta < 7\}$ независимыми в совокупности.

**3.** В коробке три шара — два белых и чёрный. Из коробки $n$ раз с возвращением вынимается шар. Какова вероятность того, что ни разу не появится чёрный шар? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** Есть 4 шестигранных кубика. На трёх из них окрашены белым 4 грани, а на четвертом кубике всего одна грань белая. Наудачу выбранный кубик подбрасывается пять раз. Найти вероятность того, что был выбран четвёртый кубик, если при пяти подбрасываниях белая грань выпала ровно единожды.

**5.** Доказать формулу включения-исключения для четырёх событий $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$.

**6.** Построить какое-нибудь вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P} \rangle$, если $\Omega = \mathbb{Z}$ (множество целых чисел).

**1.** Из колоды в 52 карты (4 масти по 13 карт) наудачу и без возвращения выбираются 7 карт. Найти вероятности следующих событий:
а) {попадётся не менее четырёх карт бубновой масти};
б) {попадётся не менее четырёх карт бубновой масти и не менее двух карт пиковой масти}.

**2.** На отрезок $[-1,\ 1]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\eta > 0\}$ и $\{\min(\xi,\ \eta) \leqslant 0\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{\xi < 0\}$, $\{\xi > 1/2\}$ и $\{\xi = 0\}$ независимыми в совокупности.

**3.** Монета, которая с равными вероятностями выпадает гербом, решкой или встаёт на ребро, подбрасывается $n$ раз. Какова вероятность того, что хотя бы раз монета встанет на ребро? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** Один из двух студентов правильно решает задачу с вероятностью 0,8, второй — 0,5. При проверке их решений оказалось, что из двух решений ровно одно правильное. Найти (условную) вероятность того, что второй студент правильно решил задачу.

**5.** Пусть $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = 1$. Доказать, что $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A \cup B) = 1$.

**6.** Пусть $\Omega$ — произвольное непустое множество, $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — $\sigma$-алгебры подмножеств $\Omega$. Доказать, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ является $\sigma$-алгеброй.

---

**1.** В коробке — по 7 желтых, синих и красных шаров. Наудачу и без возвращения выбирают 5 шаров. Найти вероятности следующих событий:
а) {среди вынутых шаров попадутся не менее двух синих шаров};
б) {среди вынутых шаров попадутся не менее двух синих шаров или не менее трёх красных}.

**2.** На отрезок $[0,\ 8]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\max(\xi,\ \eta) \leqslant 4\}$ и $\{\eta > 2\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{\eta < 4\}$, $\{3 < \eta < 7\}$ и $\{2 < \eta < 6\}$ независимыми в совокупности.

**3.** Правильный тетраэдр, грани которого помечены цифрами от 1 до 4, подбрасывается $n$ раз. Какова вероятность того, что ни разу не выпадет цифра 1? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** Есть три урны с шарами. В первой и второй урнах по 3 белых и по 2 чёрных шара, в третьей урне — 5 белых и 1 чёрный. Наудачу выбирается урна, и из нее трижды вынимается шар, который каждый раз возвращается обратно, и шары в урне перемешиваются. Найти вероятность того, что была выбрана третья урна, если ровно два раза из трёх был вынут белый шар.

**5.** Доказать теорему умножения для $n$ событий.

**6.** Построить какое-нибудь вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P} \rangle$, если $\Omega = \mathbb{N}$ (натуральный ряд).

---

**1.** В новогоднем подарке по десять ирисок, карамелек, соевых батончиков и леденцов. Через дырочку мышке удалось достать шесть конфет. Найти вероятности следующих событий:
а) {среди них есть хотя бы две ириски};
б) {среди них есть хотя бы две ириски и хотя бы четыре леденца}.

**2.** На отрезок $[0,\ 2]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\xi \leqslant 1\}$ и $\{\min(\xi,\ \eta) > 1/2\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{\xi < 1\}$, $\{\xi > 1\}$ и $\{\xi = 1\}$ независимыми в совокупности.

**3.** Из колоды в 52 карты (4 масти по 13 карт) $n$ раз с возвращением выбирается карта. Какова вероятность того, что хотя бы раз появится туз? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** В первой урне пять белых и четыре чёрных шара, во второй — три белых и шесть чёрных. Из каждой урны наудачу выбирается шар. Известно, что один шар оказался белым и один шар — чёрным. Найти (условную) вероятность того, что из второй урны был выбран белый шар.

**5.** Известно, что $\mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$. Доказать, что $\mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) > 0$ для любого $k = 1, \ldots, n-1$.

**6.** Множество $\Omega$ состоит из 15 элементов. Доказать, что количество элементов в множестве $2^\Omega$ равно $2^{15}$.

**1.** На складе 15 мешков муки высшего сорта, 18 — первого и 7 — второго сорта. Кладовщик наудачу выбирает и выдает восемь мешков. Найти вероятности следующих событий:
а) {попадётся не менее пяти мешков муки высшего сорта};
б) {попадётся не менее пяти мешков муки высшего сорта или не менее трёх мешков — первого}.

**2.** На отрезок $[0,\ 12]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\eta > 3\}$ и $\{\max(\xi,\ \eta) \geqslant 6\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{1 < \xi < 7\}$, $\{\xi > 6\}$ и $\{5 < \xi < 9\}$ независимыми в совокупности.

**3.** В кармане 5 ключей, из которых к замку подходит ровно один. Человек достаёт ключ из кармана $n$ раз, возвращая всякий раз ключ обратно в карман. Какова вероятность того, что ни разу не будет вынут нужный ключ? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** Есть 4 кубика. На трех из них окрашена белым половина граней, а на четвёртом кубике всего одна грань из шести белая. Наудачу выбранный кубик подбрасывается семь раз. Найти вероятность того, что был выбран четвёртый кубик, если при семи подбрасываниях белая грань выпала ровно один раз.

**5.** Доказать, что $\mathsf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) - \mathsf{P}(\overline{A})\mathsf{P}(\overline{B}) = \mathsf{P}(A \cap B) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$ для любых событий $A$ и $B$.

**6.** Построить какое-нибудь вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P} \rangle$, если $\Omega = \{a,\ b,\ c\}$.

---

**1.** В коробке — 4 красных и по 8 белых и синих шаров. Наудачу и без возвращения выбирают 6 шаров. Найти вероятности следующих событий:
а) {попадутся хотя бы три красных шара};
б) {попадутся хотя бы три красных шара и хотя бы два синих}.

**2.** На отрезок $[0,\ 2]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\max(\xi,\ \eta) < 1\}$ и $\{\eta > 1/2\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{\eta < 1/2\}$, $\{\eta > 1\}$ и $\{\eta = 1\}$ независимыми в совокупности.

**3.** Баскетболист, попадающий мячом в корзину в 80% случаев, кидает мяч $n$ раз. Какова вероятность того, что он попадёт хотя бы раз? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** В первой урне восемь белых и один чёрный шар, во второй — три белых и шесть чёрных. Из каждой урны наудачу выбирается шар. Известно, что один шар оказался белым и один шар — чёрным. Найти (условную) вероятность того, что из первой урны был выбран белый шар.

**5.** Доказать, что если $\mathsf{P}(A \,|\, B) = \mathsf{P}(A \,|\, \overline{B})$, то события $A$ и $B$ независимы.

**6.** Пусть $\Omega = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$, и $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ — $\sigma$-алгебра. Задать на $(\Omega, \mathcal{F})$ какую-нибудь меру $\mu$ так, чтобы $\mu(\{\spadesuit, \clubsuit\})$ равнялось 8.

---

**1.** Из колоды в 36 карт (4 масти по 9 карт) наудачу и без возвращения выбираются 8 карт. Найти вероятности следующих событий:
а) {попадётся не менее пяти бубновых карт};
б) {попадётся не менее пяти бубновых карт или не менее трёх крестовых карт}.

**2.** На отрезок $[-3,\ 5]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами $\xi$ и $\eta$.
а) Проверить, являются ли события $\{\xi \geqslant 0\}$ и $\{\max(\xi,\ \eta) < 1\}$ независимыми.
б) Проверить, являются ли события $\{\xi < 1\}$, $\{0 < \xi < 4\}$ и $\{-1 < \xi < 2\}$ независимыми в совокупности.

**3.** Симметричная игральная кость подбрасывается $n$ раз. Какова вероятность того, что ни разу не выпадет числа очков, кратного трём? Как себя ведёт эта вероятность при $n \to \infty$?

**4.** Каждый из четырёх стрелков попадает по мишени с вероятностью 0,4, и результаты их выстрелов независимы. После того, как каждый выстрелил по разу, в мишени оказалось три пробоины. Найти (условную) вероятность того, что первый стрелок не попал.

**5.** Доказать, что $\mathsf{P}(A \cup B \cup C) \leqslant \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C)$ для любых событий $A$, $B$ и $C$.

**6.** Даны $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}(C)$, $\mathsf{P}(AB)$, $\mathsf{P}(AC)$, $\mathsf{P}(BC)$ и $\mathsf{P}(ABC)$. Найти $P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$.