1. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 5$ имеют распределение Пуассона с параметром λ, где $\lambda > 0$. Для какого параметра $\theta = \theta(\lambda)$ оценка $\theta^* = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_5$ будет несмещенной оценкой? Является ли эта оценка состоятельной оценкой для того же параметра θ?

2. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют распределение Бернулли с параметром p, где $0 < p < 1$. Для какого параметра $\theta = \theta(p)$ оценка $\theta^* = \arcsin\sqrt{\overline{X}}$ будет асимптотически нормальной оценкой? Найти коэффициент асимптотической нормальности.

3. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют биномиальное распределение с параметрами 5 и p, где $0 < p < 1$. Проверить, выполнены ли условия неравенства Рао − Крамера и доказать, что оценка $p^* = \dfrac{n+1}{5n}\,\overline{X}$ неизвестного параметра p эффективна в некотором классе. В каком именно?

4. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, где $a < b$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = X_{(n)} - X_{(1)}$ а) несмещенной; б) состоятельной; в) асимптотически нормальной оценкой параметра $\theta = b - a$.

5. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\theta(y) = \begin{cases} 2y/\theta^2, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant \theta, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

6. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют распределение Пуассона с параметром λ, где $\lambda > 0$. Для какого параметра $\theta = \theta(\lambda)$ оценка а) $\theta_1^* = \overline{X} e^{-\overline{X}}$; б) $\theta_2^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{I}\{X_i = 1\}$ будет состоятельной оценкой? Проверить, будет ли оценка θ_1^* несмещенной оценкой того же параметра.

Указание. Для нахождения распределения $n\overline{X}$ воспользоваться свойством устойчивости распределения Пуассона относительно суммирования.

1. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 3$ имеют распределение Пуассона с параметром λ, где $\lambda > 0$. Для какого параметра $\theta = \theta(\lambda)$ оценка $\theta^* = \mathbf{I}\{X_1 = 0\} \cdot \mathbf{I}\{X_2 = 0\} \cdot \mathbf{I}\{X_3 = 0\}$ будет несмещенной оценкой? Является ли эта оценка состоятельной оценкой для того же параметра θ?

2. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$, где $a > 0$. Для какого параметра $\theta = \theta(a)$ оценка $\theta^* = \ln \overline{X}$ будет асимптотически нормальной оценкой? Найти коэффициент асимптотической нормальности.

3. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\alpha(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\alpha^2}\, e^{-\frac{y}{\alpha}}, & \text{если } \ y > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\alpha > 0$. Проверить, выполнены ли условия неравенства Рао − Крамера и доказать, что оценка $\alpha^* = 2\dfrac{n+2}{n}\ \overline{X}$ неизвестного параметра α эффективна в некотором классе. В каком именно?

Указание. Если $\xi \Subset \Gamma_{\alpha,\lambda}$, *то* $\mathsf{E}\xi = \dfrac{\lambda}{\alpha}$, $\mathsf{D}\xi = \dfrac{\lambda}{\alpha^2}$

4. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-\theta, 2\theta]$, где $\theta > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = \dfrac{X_{(n)} - 3X_{(1)}}{5}$ а) несмещенной; б) состоятельной оценкой параметра θ.

5. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\theta(y) = \begin{cases} (\theta+1)\dfrac{(\ln y)^\theta}{y}, & \text{если } \ 1 \leqslant y \leqslant e, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\theta > -1$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

6. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют биномиальное распределение с параметрами 2 и p, где $0 < p < 1$. Найти оценку метода моментов (по первому моменту) для параметра $\theta = e^{2p}$. Проверить ее несмещенность, состоятельность.

1. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 4$ имеют распределение Бернулли с параметром p, где $0 < p < 1$. Для какого параметра $\theta = \theta(p)$ оценка $\theta^* = X_1 \cdot X_2 \cdot (1 - X_3) \cdot (1 - X_4)$ будет несмещенной оценкой? Является ли эта оценка состоятельной оценкой для того же параметра θ?

2. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют распределение Пуассона с параметром λ, где $\lambda > 0$. Для какого параметра $\theta = \theta(\lambda)$ оценка $\theta^* = \overline{X} e^{-\overline{X}}$ будет асимптотически нормальной оценкой? Найти коэффициент асимптотической нормальности.

3. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют геометрическое распределение с параметром $1/p$, где $p > 1$. Проверить, выполнены ли условия неравенства Рао − Крамера и доказать, что оценка $p^* = \dfrac{n-2}{n}\,\overline{X}$ неизвестного параметра p эффективна в некотором классе. В каком именно?

Указание. Если ξ имеет геометрическое распределение $\mathbf{G}_s$ с параметром s, то $\mathsf{E}_s \xi = \dfrac{1}{s}$, $\mathsf{D}_s \xi = \dfrac{1-s}{s^2}$

4. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, где $a < b$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = X_{(1)} + X_{(n)}$ а) несмещенной; б) состоятельной оценкой параметра $\theta = a + b$.

5. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\theta(y) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\sqrt{2\pi y^3}}\, e^{-\theta^2/2y}, & \text{если} \quad y > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

6. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют биномиальное распределение с параметрами 2 и p, где $0 < p < 1$. Найти оценку метода моментов (по первому моменту) для параметра $\theta = \mathsf{E}_p \, \mathrm{I}\{X_1 = 0\}$. Проверить ее несмещенность, состоятельность, асимптотическую нормальность.

1. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объема $n \geqslant 2$ имеют геометрическое распределение с параметром p, где $0 < p < 1$. Для какого параметра $\theta = \theta(p)$ оценка $\theta^* = \mathbf{I}\{X_1 = 1\} \cdot \mathbf{I}\{X_2 = 2\}$ будет несмещенной оценкой? Является ли эта оценка состоятельной оценкой для того же параметра θ?

2. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют биномиальное распределение с параметрами 3 и p, где $0 < p < 1$. Для какого параметра $\theta = \theta(p)$ оценка $\theta^* = e^{\overline{X}}$ будет асимптотически нормальной оценкой? Найти коэффициент асимптотической нормальности.

3. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение с параметром $1/\alpha$, где $\alpha > 0$.

Проверить, выполнены ли условия неравенства Рао $-$ Крамера и доказать, что оценка $\alpha^* = \dfrac{n-1}{n}\,\overline{X}$ неизвестного параметра α эффективна в некотором классе. В каком именно?

4. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-3\theta, \theta]$, где $\theta > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = 4X_{(n)} + X_{(1)}$ а) несмещенной; б) состоятельной оценкой параметра θ.

5. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью

$$f_\theta(y) = \begin{cases} \dfrac{\theta - 1}{y^\theta}, & \text{если } \ y \geqslant 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\theta > 1$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ.

6. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение с параметром α, где $\alpha > 0$. Найти оценку метода моментов (по первому моменту) для параметра $\theta = e^{-\frac{1}{\alpha}}$. Проверить ее несмещенность, состоятельность.

Указание: 1) $\int\limits_0^\infty t^k\, e^{-t}\, dt = k!$ 2) *распределение* $\Gamma_{\alpha,n}$ *имеет плотность* $\begin{cases} \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!}\, y^{n-1}\, e^{-\alpha y}, & \text{если } \ y \geqslant 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$