1. (6 баллов) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 3\theta^3 y^{-4}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$.

а) Найти теоретическую характеристику $a(\theta)$ данного распределения, для которой $F_n^*(3\theta) - F_n^*(2\theta)$ является несмещённой и состоятельной оценкой. Обосновать.

б) Найти при $n = 3$ распределение случайной величины $F_n^*(3\theta) - F_n^*(2\theta)$.

в) Проверить, является ли $F_n^*(3\theta) - F_n^*(2\theta)$ асимптотически нормальной оценкой для $a(\theta)$.

2. (4 балла) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ.

а) Найти математическое ожидание случайной величины $\overline{g(X)} + S^2$, где $g(y) = 2^y$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$. Критерий δ имеет критическую область $\{X_{(1)} \geqslant 3/2\}$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. (5 баллов) Дана выборка объёма $n = 36$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,16}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = -1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 0{,}2$?

5. (5 баллов) Для проверки симметричности монеты её подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если число выпадений герба заключено в границах $n/2 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-3)$. Проверить симметричность монеты, если после 10 000 бросков герб выпал 5 400 раз.

ФИО												Номер группы
1			2		3		4		5			

---

1. (6 баллов) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ.

а) Найти теоретическую характеристику $\theta(\lambda)$ данного распределения, для которой $F_n^*(3) - F_n^*(1)$ является несмещённой и состоятельной оценкой. Обосновать.

б) Найти при $n = 4$ распределение случайной величины $F_n^*(3) - F_n^*(1)$.

в) Проверить, является ли $F_n^*(3) - F_n^*(1)$ асимптотически нормальной оценкой для $\theta(\lambda)$.

2. (4 балла) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 5\theta^5 y^{-6}$ на интервале $[\theta, +\infty)$.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $\overline{X^3} - S^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы: $H_1 = \{\, \mathcal{F} = \mathrm{E}_1 \,\}$, $H_2 = \{\, \mathcal{F} = \mathrm{U}_{2,3} \,\}$. Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ имеет критическую область $\{2 \leqslant X_{(n)} \leqslant 3\}$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. (5 баллов) Дана выборка объёма $n = 16$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,9}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-3)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = -1\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 0{,}2$?

5. (5 баллов) Гипотеза о правильности игральной кости принимается, если после n подбрасываний кости число выпавших шестерок отличается от $n/6$ не более, чем на Δ. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить правильность игральной кости, если после 1 200 бросков шестёрка выпала 250 раз.

ФИО												Номер группы
1			2		3		4		5			

1. (6 баллов) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 4y^3\theta^{-4}$ на интервале $[0,\, \theta]$, где $\theta > 0$.

а) Найти теоретическую характеристику $a(\theta)$ данного распределения, для которой $F_n^*(\theta/2) - F_n^*(\theta/3)$ является несмещённой и состоятельной оценкой. Обосновать.

б) Найти при $n = 5$ распределение случайной величины $F_n^*(\theta/2) - F_n^*(\theta/3)$.

в) Проверить, является ли $F_n^*(\theta/2) - F_n^*(\theta/3)$ асимптотически нормальной оценкой для $a(\theta)$.

2. (4 балла) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и p.

а) Найти математическое ожидание случайной величины $\overline{g(X)} + 3S^2$, где $g(y) = 2^y$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$. Критерий δ имеет критическую область $\{X_{(1)} \leqslant 3/2\}$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. (5 баллов) Дана выборка объёма $n = 16$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,4}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-3)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 0\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1{,}8$?

5. (5 баллов) Для проверки симметричности игральной кости её подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если количество раз, когда выпало одно или два очка, заключено в границах $n/3 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить симметричность кости, если после 3 600 бросков одно или два очка выпали в общей сложности 1100 раз.

ФИО												Номер группы
1			2		3		4		5			

---

1. (6 баллов) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 4 и p.

а) Найти теоретическую характеристику $\theta(p)$ данного распределения, для которой $F_n^*(4) - F_n^*(2)$ является несмещённой и состоятельной оценкой. Обосновать.

б) Найти при $n = 3$ распределение случайной величины $F_n^*(4) - F_n^*(2)$.

в) Проверить, является ли $F_n^*(4) - F_n^*(2)$ асимптотически нормальной оценкой для $\theta(p)$.

2. (4 балла) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = y^3/(4\theta^4)$ на интервале $[0,\, 2\theta]$.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $\overline{g(X)} + S^2$, где $g(y) = \sqrt{y}$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$. Критерий δ имеет критическую область $\{X_{(1)} \notin [1/2,\, 3/2]\}$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. (5 баллов) Дана выборка объёма $n = 4$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,16}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-3)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 0\}$ и $H_2 = \{a = 2\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 0{,}8$?

5. (5 баллов) Проверяется основная гипотеза о том, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью $3/4$. Основная гипотеза отвергается, если после n экспериментов число упавших маслом вниз бутербродов отличается от $3n/4$ более, чем на Δ. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить основную гипотезу, если из 1000 бутербродов 700 упали маслом вниз.

ФИО												Номер группы
1			2		3		4		5			

1. (6 баллов) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 5\theta^5 y^{-6}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$.

а) Найти теоретическую характеристику $a(\theta)$ данного распределения, для которой $F_n^*(4\theta) - F_n^*(3\theta)$ является несмещённой и состоятельной оценкой. Обосновать.

б) Найти при $n = 4$ распределение случайной величины $F_n^*(4\theta) - F_n^*(3\theta)$.

в) Проверить, является ли $F_n^*(4\theta) - F_n^*(3\theta)$ асимптотически нормальной оценкой для $a(\theta)$.

2. (4 балла) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ.

а) Найти математическое ожидание случайной величины $\overline{g(X)} - S^2$, где $g(y) = 3^y$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{2,5}\}$. Критерий δ имеет критическую область $\{X_{(1)} \geqslant 2\}$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. (5 баллов) Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,4}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2{,}5)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1{,}6$?

5. (5 баллов) Для проверки гипотезы о симметричности тетраэдра его подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если число выпадений помеченной грани заключено в границах $n/4 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить симметричность тетраэдра, если после 1 600 бросков помеченная грань выпала 450 раз.

ФИО												Номер группы
1			2		3		4		5			

---

1. (6 баллов) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ.

а) Найти теоретическую характеристику $\theta(\lambda)$ данного распределения, для которой $F_n^*(4) - F_n^*(2)$ является несмещённой и состоятельной оценкой. Обосновать.

б) Найти при $n = 3$ распределение случайной величины $F_n^*(4) - F_n^*(2)$.

в) Проверить, является ли $F_n^*(4) - F_n^*(2)$ асимптотически нормальной оценкой для $\theta(\lambda)$.

2. (4 балла) Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 4\theta^4 y^{-5}$ на интервале $[\theta, +\infty)$.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $\overline{g(X)} + 2S^2$, где $g(y) = 1/y$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,4}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{E}_1\}$. Критерий δ имеет критическую область $\{X_{(1)} \notin (2, 3)\}$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. (5 баллов) Дана выборка объёма $n = 25$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,9}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-1{,}5)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = 2\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1{,}5$?

5. (5 баллов) Проверяется основная гипотеза о том, что вероятность выпуска бракованной лампочки равна $1/5$. Эта гипотеза принимается, если в партии из n лампочек число бракованных лампочек отличается от $n/5$ не более, чем на Δ. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить основную гипотезу, если в партии из 1000 лампочек обнаружилось 220 бракованных.

ФИО												Номер группы
1			2		3		4		5			