1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из нормального распределения с параметрами a и σ^2. Найти математическое ожидание выборочной дисперсии, построенной по этой выборке, и выяснить, как выборочная дисперсия ведёт себя при $n \to \infty$.
Примечание. Провести вычисления, не ссылаясь на соответствующие утверждения из лекций.

2. Пусть X_1, X_2, X_3 — выборка объёма 3 из биномиального распределения с параметрами 3 и 1/3, и $F^*(y)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по этой выборке. Найти таблицу распределения случайной величины $F^*(3) - F^*(1)$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, $H_2 = \{\, X_i$ имеют показательное распределение с параметром $1\,\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} 3/y^4, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $X_{(n)} \geqslant 2$. В противном случае принимается H_2. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\alpha = 7\}$ и $H_2 = \{\alpha = 2\}$.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 2 и p. Проверяется гипотеза $H_1 = \{p = 0.1\}$ против $H_2 = \{p = 0.9\}$. Критерий δ имеет критическую область $S = \left\{ \overline{X} > 1 + \dfrac{1}{n} \right\}$. Найти предел размера этого критерия при $n \to \infty$.

Фамилия студента						Номер группы
1	2	3	4	5		

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Вычислить математическое ожидание случайной величины $5(\overline{X})^2 + S^2$.
Примечание. Провести вычисления, не ссылаясь на соответствующие утверждения из лекций.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[-2, 2]$. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[0,\ 1]$. Найти дисперсию случайной величины $p^* = \nu_n/n$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_4$ объёма 4 и две простые гипотезы: H_1=$\{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$, H_2=$\{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} 3y^2, & \text{если } y \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_1, если не менее трёх элементов выборки попадёт в отрезок $[0.5,\ 1]$, и альтернативу H_2 — в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 9$. Построить наиболее мощный критерий размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{a = 4\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$.

5. Проверяется основная гипотеза о том, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью 0,75. Основная гипотеза отвергается, если после n экспериментов число упавших маслом вниз бутербродов отличается от $0{,}75n$ более чем на $0{,}75\sqrt{n}$. Найти предел размера этого критерия при $n \to \infty$.

Фамилия студента						Номер группы
1	2	3	4	5		

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из показательного распределения с параметром α. Найти математическое ожидание выборочной дисперсии, построенной по этой выборке, и выяснить, как выборочная дисперсия ведёт себя при $n \to \infty$.
Примечание. Провести вычисления, не ссылаясь на соответствующие утверждения из лекций.

2. Пусть X_1, X_2, X_3 — выборка объёма 3 из геометрического распределения с параметром $1/4$, и $F^*(y)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по этой выборке. Найти таблицу распределения случайной величины $F^*(3) - F^*(2)$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1(y) \,\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} 4y^3/3^4, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 3, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$H_2 = \{\, X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 5] \,\}$. Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $X_{(n)} \leqslant 3$. В противном случае принимается H_2. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\alpha = 2\}$ и $H_2 = \{\alpha = 7\}$.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Бернулли с параметром p. Проверяется гипотеза $H_1 = \{p = 0.8\}$ против $H_2 = \{p = 0.2\}$. Критерий δ имеет критическую область $S = \left\{ \overline{X} < 0.5 - \dfrac{1}{n} \right\}$. Найти предел мощности этого критерия при $n \to \infty$.

Фамилия студента						Номер группы
1	2	3	4	5		

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 2 и p. Вычислить математическое ожидание случайной величины $5\overline{X^2} + 3(\overline{X})^2$.
Примечание. Провести вычисления, не ссылаясь на соответствующие утверждения из лекций.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром α. Обозначим через ν_n число элементов выборки, **не** попавших в отрезок $[1,\ 3]$. Найти дисперсию случайной величины $p^* = \nu_n/n$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_4$ объёма 4 и две простые гипотезы: H_1=$\{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$, H_2=$\{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & \text{если } y > 0, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{если } y > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_1, если не менее двух элементов выборки попадут в интервал $(0,\ 1)$, и альтернативу H_2 — в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 9$. Построить наиболее мощный критерий размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = 4\}$.

5. Проверяется основная гипотеза о том, что вероятность выпуска бракованной лампочки равна $1/3$. Эта гипотеза принимается, если в партии из n лампочек число бракованных лампочек отличается от $n/3$ не более чем на $\sqrt{2n}$. Найти предел размера этого критерия при $n \to \infty$.

Фамилия студента						Номер группы
1	2	3	4	5		

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из распределения Пуассона с параметром λ. Найти математическое ожидание выборочной дисперсии, построенной по этой выборке, и выяснить, как выборочная дисперсия ведёт себя при $n \to \infty$.
Примечание. Провести вычисления, не ссылаясь на соответствующие утверждения из лекций.

2. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — выборка объёма 4 из распределения Пуассона с параметром 2, и $F^*(y)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по этой выборке. Найти таблицу распределения случайной величины $F^*(4) - F^*(2)$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 5] \,\}$, $H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y) \,\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} e^{1-y}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $X_{(n)} \geqslant 3$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\alpha = 1\}$ и $H_2 = \{\alpha = 4\}$.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром α. Проверяется гипотеза $H_1 = \{\alpha = 1\}$ против $H_2 = \{\alpha = 0.5\}$. Критерий δ имеет критическую область $S = \left\{\overline{X} > 3 + \dfrac{1}{n}\right\}$. Найти предел размера этого критерия при $n \to \infty$.

Фамилия студента						Номер группы
1	2	3	4	5		

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром α. Вычислить математическое ожидание случайной величины $2(\overline{X})^2 - 5S^2$.
Примечание. Провести вычисления, не ссылаясь на соответствующие утверждения из лекций.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[1,\ 4]$. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[2,\ 3]$. Найти дисперсию случайной величины $p^* = \nu_n/n$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_5$ объёма 5 и две простые гипотезы: H_1=$\{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$, H_2=$\{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} 2y, & \text{если } y \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2-2y, & \text{если } y \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_1, если не более двух элементов выборки попало в отрезок $[0,\ 0.5]$, и альтернативу H_2 — в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 4$. Построить наиболее мощный критерий размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{a = 6\}$ и $H_2 = \{a = 3\}$.

5. Проверяется основная гипотеза о том, что стрелок попадает по мишени с вероятностью 0,9. Основная гипотеза принимается, если после n выстрелов число попаданий отличается от $0{,}9n$ не более чем на $0{,}9\sqrt{n}$. Найти предел мощности этого критерия при $n \to \infty$.

Фамилия студента						Номер группы
1	2	3	4	5		

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из равномерного распределения на отрезке $[0, a]$. Найти математическое ожидание выборочной дисперсии, построенной по этой выборке, и выяснить, как выборочная дисперсия ведёт себя при $n \to \infty$.
Примечание. Провести вычисления, не ссылаясь на соответствующие утверждения из лекций.

2. Пусть $X_1,\ X_2,\ X_3$ — выборка объёма 3 из геометрического распределения с параметром $2/3$, и $F^*(y)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по этой выборке. Найти таблицу распределения случайной величины $F^*(5) - F^*(3)$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1(y)\,\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} 3y^2/4^3, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$H_2 = \{\, X_i$ имеют показательное распределение с параметром $3\,\}$. Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $X_{(n)} \leqslant 3$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\alpha = 6\}$ и $H_2 = \{\alpha = 3\}$.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Бернулли с параметром p. Проверяется гипотеза $H_1 = \{p = 0.2\}$ против $H_2 = \{p = 0.9\}$. Критерий δ имеет критическую область $S = \left\{ \overline{X} > 0.6 + \dfrac{1}{n} \right\}$. Найти предел мощности этого критерия при $n \to \infty$.

Фамилия студента						Номер группы
1	2	3	4	5		

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[-a, a]$. Вычислить математическое ожидание случайной величины $3\overline{X^2} - 7(\overline{X})^2$.
Примечание. Провести вычисления, не ссылаясь на соответствующие утверждения из лекций.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[1,\ 7]$. Обозначим через ν_n число элементов выборки, **не** попавших в отрезок $[2,\ 4]$. Найти дисперсию случайной величины $p^* = \nu_n/n$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_4$ объёма 4 и две простые гипотезы: H_1=$\{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$, H_2=$\{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{если } y > 0, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & \text{если } y > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_1, если не менее двух элементов выборки попадут в интервал $(1, \infty)$, и альтернативу H_2 — в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 9$. Построить наиболее мощный критерий размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{a = 8\}$ и $H_2 = \{a = 2\}$.

5. Основная гипотеза о том, что 40% взрослого населения составляют пенсионеры, проверяется по выборке объема n. Эта гипотеза принимается, если число пенсионеров в выборке отличается от $0{,}4n$ не более чем на $0{,}6\sqrt{6n}$. Найти предел размера этого критерия при $n \to \infty$.

Фамилия студента						Номер группы
1	2	3	4	5		