1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 3\theta^3 y^{-4}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(3\theta) - F_n^*(2\theta)$.

б) Найти при $n = 5$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $5(\overline{X})^2 + S^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$. Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_2, если $X_{(1)} \geqslant 3/2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,16}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = -1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = -1$?

5. Для проверки симметричности монеты её подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если число выпадений герба заключено в границах $n/2 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-3)$. Проверить симметричность монеты, если после 10 000 бросков герб выпал 5 400 раз.

6. Доказать теорему Гливенко — Кантелли для выборки из распределения Бернулли $B_{0{,}25}$.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Пусть ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\, 3]$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{\nu_n}{n}$.

б) Найти при $n = 5$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 3y^{-4}$ на интервале $[1,\, +\infty)$.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $3(\overline{X})^2 - S^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют показательное распределение с параметром $1\,\}$, $H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f(y)$ из задачи **2**$\}$.

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $2 \leqslant X_{(n)} \leqslant 3$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\alpha = 2\}$ и $H_2 = \{\alpha = 1\}$ Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$, $n = 400$, $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$?

5. Основная гипотеза о правильности игральной кости принимается, если после n подбрасываний кости число выпавших шестерок отличается от $n/6$ не более, чем на $\sqrt{5n}/2$. Иначе принимается альтернатива: кость неправильная, и вероятность выпадения шестерки не равна $1/6$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

6. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Проверить независимость статистик $X_1 + X_2$ и $X_{(1)}$.

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 4y^3\theta^{-4}$ на интервале $[0,\,\theta]$, где $\theta > 0$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(\theta/2) - F_n^*(\theta/3)$.

б) Найти при $n = 6$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 2 и p.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $5\overline{X^2} + 3(\overline{X})^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$. Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_2, если $X_{(1)} \leqslant 3/2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. Дана выборка объёма $n = 16$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,9}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-3)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 0\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 0$?

5. Для проверки симметричности игральной кости её подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если количество выпадений единички заключено в границах ${}^{n}\!/_{6} \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить симметричность кости, если после 3 600 бросков единица выпала 540 раз.

6. Дана выборка из показательного распределения с параметром 1. Выяснить, куда слабо сходится последовательность $\sqrt{n}\,|F_n^*(3) - F(3)|$ при $n \to \infty$.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 3 и p. Пусть ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\,2]$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{\nu_n}{n}$.

б) Найти при $n = 4$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = y^3/4$ на интервале $[0,\,2]$.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $5\overline{X^2} + (\overline{X})^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \big\{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f(y)$ из задачи **2** $\big\}$, $H_2 = \big\{\, X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 2]\,\big\}$. Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $1/2 \leqslant X_{(1)} \leqslant 3/2$. В противном случае принимается H_2. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром β. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\beta = 6\}$ и $H_2 = \{\beta = 3\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 4$, $n = 900$, $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-3)$?

5. Проверяется основная гипотеза о том, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью ${}^{3}\!/_{4}$. Основная гипотеза отвергается, если после n экспериментов число упавших маслом вниз бутербродов отличается от ${}^{3n}\!/_{4}$ более, чем на ${}^{3\sqrt{3n}}\!/_{4}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

6. Пусть $X_1,\ \ldots,\ X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha = 1$. Проверить независимость статистик $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$.

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 5\theta^5 y^{-6}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$.
а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(4\theta) - F_n^*(3\theta)$.
б) Найти при $n = 4$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром α.
а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $2(\overline{X})^2 - 5S^2$.
б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{2,5}\}$. Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_2, если $X_{(1)} \geqslant 2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,4}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2{,}5)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$?

5. Для проверки гипотезы о симметричности тетраэдра его подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если число выпадений помеченной грани заключено в границах $n/4 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить симметричность тетраэдра, если после 1 600 бросков помеченная грань выпала 430 раз.

6. Доказать асимптотическую нормальность несмещённой выборочной дисперсии, построенной по выборке из распределения Пуассона.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Пусть ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[2,\, 3]$.
а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{\nu_n}{n}$.
б) Найти при $n = 4$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 5y^{-6}$ на интервале $[1, +\infty)$.
а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $(\overline{X})^2 - 3S^2$.
б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,4}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F}$ имеет распределение с плотностью $f(y)$ из задачи **2**$\}$. Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_1, если $2 < X_{(1)} < 3$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром γ. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\gamma = 4\}$ и $H_2 = \{\gamma = 2\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$, $n = 1600$, $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2, 5)$?

5. Проверяется основная гипотеза о том, что вероятность выпуска бракованной лампочки равна $1/3$. Эта гипотеза принимается, если в партии из n лампочек число бракованных лампочек отличается от $n/3$ не более, чем на $\sqrt{2n}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

6. Сформулировать утверждение об асимптотической нормальности выборочной медианы, построенной по выборке из показательного распределения с параметром α и выписать коэффициент асимптотической нормальности (дисперсию предельного распределения).