1. Пусть $X_1,\ \ldots,\ X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha = 1/\sqrt{\theta}$, где $\theta > 0$. Проверить несмещённость и состоятельность следующей оценки параметра θ:

$$\theta^* = (\overline{X})^2 - \frac{S_0^2}{n}.$$

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1;\ 2]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}\!/_{n}$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1,\ldots,X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют показательное распределение с параметром $1\,\}$, $\quad H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} {}^{3}\!/_{y^4}\,, & \text{если } y \geqslant 1,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1,\ldots,X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $1 \leqslant X_{(n)} \leqslant 3$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(n)} = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

4. Основная гипотеза о правильности игральной кости принимается, если после n подбрасываний кости число выпавших шестерок отличается от ${}^{n}\!/_{6}$ не более, чем на ${}^{\sqrt{5n}}\!/_{2}$. Иначе принимается альтернатива: кость неправильная, и вероятность выпадения шестерки не равна ${}^{1}\!/_{6}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка объёма $n = 16$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,9}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,\,1}(-3)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 0\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 0$?

Фамилия студента										Номер группы
1		2			3		4		5	

---

1. Производится n измерений неизвестной длины диагонали a квадрата. Измерения $X_1,\ \ldots,\ X_n$ независимы и имеют нормальное распределение со средним a и неизвестной дисперсией σ^2. Проверить несмещённость и состоятельность следующей оценки площади квадрата:

$$s^* = \frac{1}{2}\left((\overline{X})^2 - \frac{S_0^2}{n}\right).$$

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 5 и p. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1{,}5;\ 3]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\theta^* = {}^{\nu_n}\!/_{n}$. Выяснить, как себя ведет θ^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1,\ldots,X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1(y)\,\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} {}^{4y^3}\!/_{3^4}\,, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 3,\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases}$$

$H_2 = \{\, X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 4]\,\}$. Критерий $\delta(X_1,\ldots,X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $2 \leqslant X_{(1)} \leqslant 3$. В противном случае принимается H_2. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(1)} = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$.

4. Основная гипотеза о правильности монеты принимается, если после n подбрасываний монеты число выпавших гербов отличается от ${}^{n}\!/_{2}$ не более, чем на ${}^{3\sqrt{n}}\!/_{2}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,16}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,\,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = -1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = -1$?

Фамилия студента										Номер группы
1		2			3		4		5	

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из распределения Пуассона с параметром $\lambda = \sqrt{\theta}$, где $\theta > 0$. Проверить несмещённость и состоятельность следующей оценки параметра θ:

$$\theta^* = (\overline{X})^2 - \frac{S^2}{n-1}.$$

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 3 и p. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\ 3]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $a^* = {}^{\nu_n}\!/_{n}$. Выяснить, как себя ведет a^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[1,\ 5]\,\}$, $\quad H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} 2e^2 \cdot e^{-2y}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $3 \leqslant X_{(n)} \leqslant 5$. В противном случае принимается H_2. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

4. Проверяется основная гипотеза о том, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью ${}^3\!/_4$. Основная гипотеза отвергается, если после n экспериментов число упавших маслом вниз бутербродов отличается от ${}^{3n}\!/_4$ более, чем на ${}^{3\sqrt{3n}}\!/_4$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,4}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2{,}5)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$?

Фамилия студента	Номер группы

1		2			3		4		5	

---

1. Производится n измерений неизвестного радиуса r круга. Измерения $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют нормальное распределение со средним r и неизвестной дисперсией σ^2. Проверить несмещённость и состоятельность следующей оценки площади круга:

$$s^* = \pi \left((\overline{X})^2 - \frac{S_0^2}{n} \right).$$

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\ 2]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}\!/_{n}$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1(y)\,\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} {}^{3y^2}\!/_{4^3}, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$H_2 = \{\, X_i$ имеют показательное распределение с параметром $2\,\}$. Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $0 \leqslant X_{(1)} \leqslant 2$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

4. Проверяется основная гипотеза о том, что вероятность выпуска бракованной лампочки равна ${}^1\!/_3$. Эта гипотеза принимается, если в партии из n лампочек число бракованных лампочек отличается от ${}^{n}\!/_3$ не более, чем на $\sqrt{2n}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка объёма $n = 4$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,9}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = -1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = -1$?

Фамилия студента	Номер группы

1		2			3		4		5	

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из равномерного распределения на отрезке $[0,\ \sqrt{\theta}]$, где $\theta > 0$. Проверить несмещённость и состоятельность следующей оценки параметра θ:

$$\theta^* = 4\left((\overline{X})^2 - \frac{S^2}{n-1}\right).$$

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[4,\ 5]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}/_{n}$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 4]\,\}$, $\quad H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} {}^{2}/_{y^3}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $2 \leqslant X_{(n)} \leqslant 4$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

4. Проверяется основная гипотеза о том, что стрелок попадает по мишени с вероятностью ${}^{9}/_{10}$. Основная гипотеза принимается, если после n выстрелов число попаданий отличается от ${}^{9n}/_{10}$ не более, чем на ${}^{9\sqrt{n}}/_{10}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка объёма $n = 25$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,36}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 3\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$?

Фамилия студента											Номер группы
1		2			3		4		5		

---

1. Производится n измерений неизвестного диаметра d круга. Измерения $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют нормальное распределение со средним d и неизвестной дисперсией σ^2. Проверить несмещённость и состоятельность следующей оценки площади круга:

$$s^* = \frac{\pi}{4}\left((\overline{X})^2 - \frac{S_0^2}{n}\right).$$

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 4 и p. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\ 3]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $b^* = {}^{\nu_n}/_{n}$. Выяснить, как себя ведет b^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют показательное распределение с параметром $3\,\}$, $\quad H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} {}^{2y}/_{25}, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $3 \leqslant X_{(1)} \leqslant 5$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

4. Проверяется основная гипотеза о том, что 40% взрослого населения составляют пенсионеры, проверяется по выборке объема n. Эта гипотеза принимается, если доля пенсионеров в выборке отличается от ${}^{4n}/_{10}$ не более, чем на ${}^{3\sqrt{6n}}/_{5}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка объёма $n = 36$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,25}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$?

Фамилия студента											Номер группы
1		2			3		4		5		