**1.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма $n$ из распределения с плотностью $f(y) = 5\theta^5 y^{-6}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$. Параметр $a = \theta^4$ оценивается статистикой

$$a^* = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( X_i^2 - \overline{X^2} \right)^2 .$$

Проверить состоятельность и несмещённость оценки $a^*$ для параметра $a$.

**2.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(3) - F_n^*(1)$.

б) Выяснить, как эта величина себя ведёт при $n \to \infty$.

**3.** Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$. Критерий $\delta$ предписывает принимать гипотезу $H_2$, если $X_{(1)} \geqslant 1$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

**4.** Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,16}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = -1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = -1$?

**5.** Для проверки симметричности монеты её подбросили $n$ раз. Гипотеза симметричности принимается, если число выпадений герба заключено в границах $n/2 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть $\Delta$, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-3)$. Проверить симметричность монеты, если после 10 000 бросков герб выпал 5 400 раз.

**6.** Доказать теорему Гливенко — Кантелли для выборки из распределения Бернулли $B_{0{,}25}$.

| ФИО | | | | | | | | | | | Номер группы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
| | | | | | | | | | | | |

---

**1.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма $n$ из распределения с плотностью $f(y) = 7\theta^7 y^{-8}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$. Параметр $a = \theta^6$ оценивается статистикой

$$a^* = \frac{16}{63} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( X_i^3 - \overline{X^3} \right)^2 .$$

Проверить состоятельность и несмещённость оценки $a^*$ для параметра $a$.

**2.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 5 и $p$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(4) - F_n^*(2)$.

б) Выяснить, как эта величина себя ведёт при $n \to \infty$.

**3.** Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$. Критерий $\delta$ предписывает принимать гипотезу $H_2$, если $X_{(1)} \leqslant 1$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

**4.** Дана выборка объёма $n = 16$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,9}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-3)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 0\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 0$?

**5.** Для проверки симметричности игральной кости её подбросили $n$ раз. Гипотеза симметричности принимается, если количество выпадений единички заключено в границах $n/6 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть $\Delta$, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить симметричность кости, если после 3 600 бросков единица выпала 540 раз.

**6.** Дана выборка из показательного распределения с параметром 1. Выяснить, куда слабо сходится последовательность $\sqrt{n}\,|F_n^*(3) - F(3)|$ при $n \to \infty$.

| ФИО | | | | | | | | | | | Номер группы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
| | | | | | | | | | | | |

**1.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма $n$ из распределения с плотностью $f(y) = 9\theta^9 y^{-10}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$. Параметр $a = \theta^8$ оценивается статистикой

$$a^* = \frac{25}{144} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( X_i^4 - \overline{X^4} \right)^2.$$

Проверить состоятельность и несмещённость оценки $a^*$ для параметра $a$.

**2.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из геометрического распределения с параметром $p$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(5) - F_n^*(3)$.

б) Выяснить, как эта величина себя ведёт при $n \to \infty$.

**3.** Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{2,5}\}$. Критерий $\delta$ предписывает принимать гипотезу $H_2$, если $X_{(1)} \geqslant 2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

**4.** Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,4}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2{,}5)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$?

**5.** Для проверки гипотезы о симметричности тетраэдра его подбросили $n$ раз. Гипотеза симметричности принимается, если число выпадений помеченной грани заключено в границах $n/4 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть $\Delta$, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить симметричность тетраэдра, если после 1 600 бросков помеченная грань выпала 430 раз.

**6.** Доказать асимптотическую нормальность несмещённой выборочной дисперсии, построенной по выборке из распределения Пуассона.

| ФИО | Номер группы |
|---|---|
| | |

| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

---

**1.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма $n$ из распределения с плотностью $f(y) = 7\theta^7 y^{-8}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$. Параметр $a = \theta^4$ оценивается статистикой

$$a^* = \frac{125}{28} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( X_i^2 - \overline{X^2} \right)^2.$$

Проверить состоятельность и несмещённость оценки $a^*$ для параметра $a$.

**2.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 6 и $p$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(3) - F_n^*(1)$.

б) Выяснить, как эта величина себя ведёт при $n \to \infty$.

**3.** Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{2,4}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$. Критерий $\delta$ предписывает принимать гипотезу $H_2$, если $X_{(1)} \leqslant 2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

**4.** Дана выборка объёма $n = 4$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,9}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = -1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = -1$?

**5.** Проверяется гипотеза о том, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью 0,75. Эта гипотеза принимается, если после $n$ экспериментов число упавших маслом вниз бутербродов заключено в границах $3n/4 \pm \Delta$. Найти, каким должно быть $\Delta$, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2{,}5)$. Проверить гипотезу, если из 10 000 бутербродов маслом вниз упали 7 600 штук.

**6.** Дана выборка из распределения Пуассона с параметром 1. Выяснить, куда слабо сходится последовательность $\sqrt{n}\, |F_n^*(2) - F(2)|$ при $n \to \infty$.

| ФИО | Номер группы |
|---|---|
| | |

| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

**1.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма $n$ из распределения с плотностью $f(y) = 11\theta^{11}y^{-12}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$. Параметр $a = \theta^{10}$ оценивается статистикой

$$a^* = \frac{275}{36} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( X_i^5 - \overline{X^5} \right)^2 .$$

Проверить состоятельность и несмещённость оценки $a^*$ для параметра $a$.

**2.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda$.
а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(5) - F_n^*(2)$.
б) Выяснить, как эта величина себя ведёт при $n \to \infty$.

**3.** Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{-1,1}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,3}\}$. Критерий $\delta$ предписывает принимать гипотезу $H_2$, если $X_{(1)} \geqslant 0$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

**4.** Дана выборка объёма $n = 25$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,36}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 3\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$?

**5.** Проверяется гипотеза о том, что стрелок попадает по мишени с вероятностью 0,9. Гипотеза принимается, если число попаданий после $n$ выстрелов заключено в границах $0{,}9n \pm \Delta$. Найти, каким должно быть $\Delta$, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-3)$. Проверить гипотезу, если после 400 выстрелов стрелок попал 340 раз.

**6.** Доказать теорему Гливенко — Кантелли для выборки из распределения Бернулли $B_{0{,}75}$.

| ФИО | | | | | | | | | | | Номер группы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
| | | | | | | | | | | | |

---

**1.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма $n$ из распределения с плотностью $f(y) = 9\theta^{9}y^{-10}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$. Параметр $a = \theta^{6}$ оценивается статистикой

$$a^* = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( X_i^3 - \overline{X^3} \right)^2 .$$

Проверить состоятельность и несмещённость оценки $a^*$ для параметра $a$.

**2.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 4 и $p$.
а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(3) - F_n^*(1)$.
б) Выяснить, как эта величина себя ведёт при $n \to \infty$.

**3.** Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{2,4}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,3}\}$. Критерий $\delta$ предписывает принимать гипотезу $H_2$, если $X_{(1)} \leqslant 2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

**4.** Дана выборка объёма $n = 36$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,\,25}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$?

**5.** Для проверки гипотезы о том, что вероятность обнаружить приз-брелок в пачке чипсов «Lays» равна 0,2, куплены $n$ пачек чипсов. Гипотеза принимается, если количество обнаруженных призов заключено в границах $0{,}2n \pm \Delta$. Найти, каким должно быть $\Delta$, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-3)$. Проверить гипотезу, если в 10 000 проверенных пачек чипсов обнаружены 1 600 призов.

**6.** Доказать асимптотическую нормальность несмещённой выборочной дисперсии, построенной по выборке из показательного распределения.

| ФИО | | | | | | | | | | | Номер группы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
| | | | | | | | | | | | |