1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Проверить независимость статистик X_1 и $X_{(1)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = \begin{cases} 3y^2, & \text{если } y \in [0,\ 1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}(\overline{X})^2$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.

б) Выяснить, как себя ведут величины $(\overline{X})^2$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} e^{1-y}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } y < 1; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2e^{2(1-y)}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } y < 1. \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} \geqslant 2$; альтернативу H_2, если $\overline{X} < 2$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и p. Проверить независимость статистик X_n и $X_{(n)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = \begin{cases} 2 - 2y, & \text{если } y \in [0,\ 1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\overline{X^2}$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.

б) Выяснить, как себя ведут величины $\overline{X^2}$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} 1/4, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} y/8, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} < 2$; альтернативу H_2, если $\overline{X} \geqslant 2$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из геометрического распределения с параметром p. Проверить независимость статистик X_1 и $X_{(1)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = \begin{cases} 2y, & \text{если } y \in [0,\ 1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}(\overline{X})^2$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.

б) Выяснить, как себя ведут величины $(\overline{X})^2$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} 2e^{2(1-y)}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } y < 1; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 4e^{4(1-y)}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } y < 1. \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} > 3/2$; альтернативу H_2, если $\overline{X} \leqslant 3/2$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Проверить независимость статистик X_n и $X_{(n)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = \begin{cases} 4y^3, & \text{если } y \in [0,\ 1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\overline{X^2}$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.
б) Выяснить, как себя ведут величины $\overline{X^2}$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} 1/6, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 6, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} y/18, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} < 3$; альтернативу H_2, если $\overline{X} \geqslant 3$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и p. Проверить независимость статистик X_1 и $X_{(1)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с плотностью $f(y) = \begin{cases} 3(1-y)^2, & \text{если } y \in [0, 1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}(\overline{X})^2$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.
б) Выяснить, как себя ведут величины $(\overline{X})^2$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} e^{2-y}, & \text{если } y \geqslant 2, \\ 0, & \text{если } y < 2; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2e^{2(2-y)}, & \text{если } y \geqslant 2, \\ 0, & \text{если } y < 2. \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} > 3$; альтернативу H_2, если $\overline{X} \leqslant 3$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_9$ — выборка объёма 9 из геометрического распределения с параметром p. Проверить независимость статистик X_n и $X_{(n)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = \begin{cases} 4y^5, & \text{если } y \in [0,\ 1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\overline{X^2}$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.
б) Выяснить, как себя ведут величины $\overline{X^2}$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } 2 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} y/6, & \text{если } 2 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} < 3$; альтернативу H_2, если $\overline{X} \geqslant 3$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

1. Пусть X_1, X_2 — выборка объёма 2 из равномерного распределения на отрезке $[0,\,1]$. Найти распределение разности порядковых статистик $X_{(2)} - X_{(1)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из биномиального распределения с параметрами m и p.
а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\overline{X^2}$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.
б) Выяснить, как себя ведут величины $\overline{X^2}$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} 2e^{2(2-y)}, & \text{если } y \geqslant 2, \\ 0, & \text{если } y < 2; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 4e^{4(2-y)}, & \text{если } y \geqslant 2, \\ 0, & \text{если } y < 2. \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} > 5/2$; альтернативу H_2, если $\overline{X} \leqslant 5/2$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

---

1. Пусть X_1, …, X_n — выборка из показательного распределения с параметром α. Проверить независимость статистик $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения Пуассона с параметром λ.
а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\left(\overline{X}\right)^2$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.
б) Выяснить, как себя ведут величины $\left(\overline{X}\right)^2$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} 1/4, & \text{если } 1 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} y/12, & \text{если } 1 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} < 3$; альтернативу H_2, если $\overline{X} \geqslant 3$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

---

1. Пусть X_1, X_2 — выборка объёма 2 из равномерного распределения на отрезке $[0,\,1]$. Найти распределение частного порядковых статистик $X_{(1)}/X_{(2)}$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из нормального распределения с параметрами a и σ^2.
а) Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\overline{X^2}$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия.
б) Выяснить, как себя ведут величины $\overline{X^2}$ и S^2 при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза $H_1 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1\}$. Альтернатива $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} e^{-1-y}, & \text{если } y \geqslant -1, \\ 0, & \text{если } y < -1; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2e^{2(-1-y)}, & \text{если } y \geqslant -1, \\ 0, & \text{если } y < -1. \end{cases}$$

а) Построить (при $n = 1$) НМК размера $\alpha = 1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера $\alpha = 1/2$ и мощности $1/2$.

в) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} < 0$; альтернативу H_2, если $\overline{X} \geqslant 0$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.