1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 9$. Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\bigl(\overline{X}\bigr)^2$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия. Выяснить, как себя ведут величины $(\overline{X})^2$ и S^2 при $n \to \infty$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\ 2]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}\!/_{n}$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют показательное распределение с параметром $1\,\}$, $\quad H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} {}^{3}\!/_{y^4}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $1 \leqslant X_{(n)} \leqslant 3$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

4. Основная гипотеза о правильности игральной кости принимается, если после n подбрасываний кости число выпавших шестерок отличается от ${}^{n}\!/_{6}$ не более, чем на ${}^{\sqrt{5n}}\!/_{2}$. Иначе принимается альтернатива: кость неправильная, и вероятность выпадения шестерки не равна ${}^{1}\!/_{6}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\alpha = 2\}$ и $H_2 = \{\alpha = 1\}$.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объема n из распределения Пуассона с параметром λ. Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\overline{X^2}$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия. Выяснить, как себя ведут величины $\overline{X^2}$ и S^2 при $n \to \infty$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром α. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1.5,\ 3]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}\!/_{n}$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1(y)\,\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} {}^{4y^3}\!/_{3^4}, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 3, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$H_1 = \{\, X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 4]\,\}$. Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $2 \leqslant X_{(1)} \leqslant 3$. В противном случае принимается H_2. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

4. Основная гипотеза о правильности монеты принимается, если после n подбрасываний монеты число выпавших гербов отличается от ${}^{n}\!/_{2}$ не более, чем на ${}^{3\sqrt{n}}\!/_{2}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 9$. Построить наиболее мощный критерий размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{a = 4\}$ и $H_2 = \{a = 3\}$.

1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка объема n из показательного распределения с параметром α. Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\big(\overline{X}\big)^2$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия. Выяснить, как себя ведут величины $(\overline{X})^2$ и S^2 при $n \to \infty$.

2. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из биномиального распределения $\mathbf{B}_{3,p}$ с параметрами 3 и p. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\ 3]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}\!/_n$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \dots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[1,\ 5]\,\}$, $H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} 2e^2 \cdot e^{-2y}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \dots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $3 \leqslant X_{(n)} \leqslant 5$. В противном случае принимается H_2. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

4. Проверяется основная гипотеза о том, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью ${}^3\!/_4$. Основная гипотеза отвергается, если после n экспериментов число упавших маслом вниз бутербродов отличается от ${}^{3n}\!/_4$ более, чем на ${}^{3\sqrt{3n}}\!/_4$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка $X_1, \dots, X_n$ из показательного распределения с параметром β. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\beta = 6\}$ и $H_2 = \{\beta = 5\}$.

---

1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка объема n из показательного распределения с параметром α. Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\overline{X^2}$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия. Выяснить, как себя ведут величины $\overline{X^2}$ и S^2 при $n \to \infty$.

2. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0,\ b]$, где $b > 2$. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\ 2]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}\!/_n$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \dots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1(y)\,\}$, где

$$f_1(y) = \begin{cases} {}^{3y^2}\!/_{4^3}, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$H_1 = \{\, X_i$ имеют показательное распределение с параметром $2\,\}$. Критерий $\delta(X_1, \dots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $0 \leqslant X_{(1)} \leqslant 2$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

4. Проверяется основная гипотеза о том, что вероятность выпуска бракованной лампочки равна ${}^1\!/_3$. Эта гипотеза принимается, если в партии из n лампочек число бракованных лампочек отличается от ${}^n\!/_3$ не более, чем на $\sqrt{2n}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

5. Дана выборка $X_1, \dots, X_n$ из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 4$. Построить наиболее мощный критерий размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{a = 8\}$ и $H_2 = \{a = 7\}$.

1. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка объема n из равномерного распределения на отрезке $[0,\ a]$, где $a>0$. Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\big(\overline{X}\big)^2$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия. Выяснить, как себя ведут величины $(\overline{X})^2$ и S^2 при $n\to\infty$.

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[4,\ 5]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}\!/_n$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n\to\infty$.

3. Дана выборка $X_1,\ldots,X_n$ и две простые гипотезы: $H_1=\{\,X_i$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 4]\,\}$, $\quad H_2=\{\,X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, где

$$f_2(y)=\begin{cases} {}^{2}\!/_{y^3}\,, & \text{если } y\geqslant 1,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1,\ldots,X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $2\leqslant X_{(n)}\leqslant 4$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(n)}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

4. Проверяется основная гипотеза о том, что стрелок попадает по мишени с вероятностью ${}^{9}\!/_{10}$. Основная гипотеза принимается, если после n выстрелов число попаданий отличается от ${}^{9n}\!/_{10}$ не более, чем на ${}^{9\sqrt{n}}\!/_{10}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n\to\infty$.

5. Дана выборка $X_1,\ldots,X_n$ из показательного распределения с параметром γ. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1=\{\gamma=10\}$ и $H_2=\{\gamma=9\}$.

---

1. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка объема n из нормального распределения с параметром $a=0$ и неизвестным параметром σ^2. Вычислить математические ожидания $\mathsf{E}\overline{X^2}$ и $\mathsf{E}S^2$, где S^2 — выборочная дисперсия. Выяснить, как себя ведут величины $\overline{X^2}$ и S^2 при $n\to\infty$.

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из биномиального распределения $\mathbf{B}_{5,p}$ с параметрами 5 и p. Обозначим через ν_n число элементов выборки, попавших в отрезок $[0,\ 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $p^* = {}^{\nu_n}\!/_n$. Выяснить, как себя ведет p^* при $n\to\infty$.

3. Дана выборка $X_1,\ldots,X_n$ и две простые гипотезы: $H_1=\{\,X_i$ имеют показательное распределение с параметром $3\,\}$, $\quad H_2=\{\,X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y)\,\}$, где

$$f_2(y)=\begin{cases} {}^{2y}\!/_{25}\,, & \text{если } 0\leqslant y\leqslant 5,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1,\ldots,X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $3\leqslant X_{(1)}\leqslant 5$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Здесь $X_{(1)}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$.

4. Проверяется основная гипотеза о том, что 40% взрослого населения составляют пенсионеры, проверяется по выборке объема n. Эта гипотеза принимается, если доля пенсионеров в выборке отличается от ${}^{4n}\!/_{10}$ не более, чем на ${}^{3\sqrt{6n}}\!/_{5}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n\to\infty$.

5. Дана выборка $X_1,\ldots,X_n$ из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2=16$. Построить наиболее мощный критерий размера ε для различения двух простых гипотез $H_1=\{a=12\}$ и $H_2=\{a=11\}$.