1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения $B_{4,p}$. Проверить, является ли статистика $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ состоятельной оценкой для параметра $\theta = 4p(1-p)$. Является ли эта статистика несмещенной оценкой того же параметра?

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения E_α. Проверить, является ли статистика $\theta^* = \exp\left(-\overline{X^2}\right)$ асимптотически нормальной оценкой для какого-либо параметра? Если «да» — указать, для какого и с каким коэффициентом.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 9$. Проверить, выполнены ли условия неравенства Рао – Крамера. Проверить, являются ли эффективными в соответствующих классах оценки $a_1^* = \dfrac{n-1}{n}\,\dfrac{X_1 + X_2}{2}$ и $a_2^* = \dfrac{n-1}{n}\,\overline{X}$. Обосновать выводы.

Примечание. За «выводы» типа: *«не достигается равенство $\Rightarrow$ оценка неэффективна»* при проверке будет даваться «-1» (минус один) балл.

4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[3; 3\theta]$, $\theta > 1$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ, проверить ее на несмещенность, состоятельность, асимптотическую нормальность.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром 1. Пусть $F_n^*(y)$ — эмпирическая функция распределения в точке y, а ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[1.5; 3.5]$. Найти дисперсии величин $F_n^*(1)$ и $\dfrac{\nu_n}{n}$.

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения $E_{1/\alpha}$. Проверить, является ли статистика $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ состоятельной оценкой для параметра $\theta = \alpha^2$. Является ли эта статистика несмещенной оценкой того же параметра?

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения с параметрами a и σ^2. Проверить, является ли статистика $\theta^* = \left(\sin\overline{X}\right)^2$ асимптотически нормальной оценкой для какого-либо параметра? Если «да» — указать, для какого и с каким коэффициентом.

3. Пусть элементы выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют биномиальное распределение с параметрами 2 и p, где $0 < p < 1$. Проверить, выполнены ли условия неравенства Рао – Крамера. Проверить, являются ли эффективными в соответствующих классах оценки $p_1^* = 4\overline{X}+1$ и $p_2^* = 2X_1 + 2X_2 + 1$. Обосновать выводы.

Примечание. За «выводы» типа: *«не достигается равенство $\Rightarrow$ оценка неэффективна»* при проверке будет даваться «-1» (минус один) балл.

4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[1; \theta+1]$, $\theta > 0$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ, проверить ее на несмещенность, состоятельность, асимптотическую нормальность.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из геометрического распределения с параметром $p = {}^1/_4$. Пусть $F_n^*(y)$ — эмпирическая функция распределения в точке y, а ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[2.5; 3.5]$. Найти дисперсии величин $F_n^*(2)$ и $\dfrac{\nu_n}{n}$.