Контрольная работа номер 1, ноябрь 2001 г.

1. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из биномиального распределения $B_{4,p}$. Проверить, является ли статистика $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\bigl(X_i - \overline{X}\bigr)^2$ состоятельной оценкой для параметра $\theta = 4p(1-p)$. Является ли эта статистика несмещенной оценкой того же параметра?

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из показательного распределения E_α. Проверить, является ли статистика $\theta^* = \exp\bigl(-\overline{X^2}\,\bigr)$ асимптотически нормальной оценкой для какого-либо параметра? Если «да» — указать, для какого и с каким коэффициентом.

3. Пусть $X_1, X_2,\ldots,X_n$ — выборка из нормального распределения с параметрами a и $\sigma^2 = 9$. Проверить, выполнены ли условия неравенства Рао – Крамера. Проверить, являются ли эффективными в соответствующих классах оценки $a_1^* = \dfrac{n-1}{n}\,\dfrac{X_1+X_2}{2}$ и $a_2^* = \dfrac{n-1}{n}\overline{X}$. Обосновать выводы.

Примечание. За «выводы» типа: *«не достигается равенство $\Rightarrow$ оценка неэффективна»* при проверке будет даваться «-1» (м и н у с о д и н) балл.

4. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[3; 3\theta]$, $\theta > 1$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ, проверить ее на несмещенность, состоятельность, асимптотическую нормальность.

5. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром 1. Пусть $F_n^*(y)$ — эмпирическая функция распределения в точке y, а ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[1.5; 3.5]$. Найти дисперсии величин $F_n^*(1)$ и $\dfrac{\nu_n}{n}$.

---

1. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из показательного распределения $E_{1/\alpha}$. Проверить, является ли статистика $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\bigl(X_i - \overline{X}\bigr)^2$ состоятельной оценкой для параметра $\theta = \alpha^2$. Проверить, является ли эта статистика несмещенной оценкой того же параметра.

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из нормального распределения с параметрами a и σ^2. Проверить, является ли статистика $\theta^* = \bigl(\sin\overline{X}\bigr)^2$ асимптотически нормальной оценкой для какого-либо параметра? Если «да» — указать, для какого и с каким коэффициентом.

3. Пусть элементы выборки $X_1, X_2,\ldots,X_n$ имеют биномиальное распределение с параметрами 2 и p, где $0<p<1$. Проверить, выполнены ли условия неравенства Рао – Крамера. Проверить, являются ли эффективными в соответствующих классах оценки $p_1^* = 4\overline{X}+1$ и $p_2^* = 2X_1+2X_2+1$. Обосновать выводы.

Примечание. За «выводы» типа: *«не достигается равенство $\Rightarrow$ оценка неэффективна»* при проверке будет даваться «-1» (м и н у с о д и н) балл.

4. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[1; \theta+1]$, $\theta > 0$. Найти оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}$ параметра θ, проверить ее на несмещенность, состоятельность, асимптотическую нормальность.

5. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из геометрического распределения с параметром $p = {}^1\!/_4$. Пусть $F_n^*(y)$ — эмпирическая функция распределения в точке y, а ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[2.5; 3.5]$. Найти дисперсии величин $F_n^*(2)$ и $\dfrac{\nu_n}{n}$.

Контрольная работа номер 2, декабрь 2001 г.

1. Дана выборка объема 10 из нормального распределения с неизвестными параметрами. Вычислить математическое ожидание длины точного доверительного интервала для неизвестной дисперсии уровня доверия 0,9. Необходимые квантили взять в таблице ниже.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения $\mathbf{U}_{0,2\theta}$. Построить асимптотический доверительный интервал для неизвестного параметра $\theta > 0$ асимптотического уровня доверия 0,9, используя асимптотически нормальную оценку $\theta^* = \overline{X}$. Вычислить значения концов интервала при $n = 100$ и $\overline{X} = 1{,}6$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы:
H_1: X_i имеют распределение с плотностью f_1, H_2: X_i имеют распределение с плотностью f_2, где

$$f_1(y) = \begin{cases} 3y^2, & \text{если } y \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если все элементы выборки окажутся больше, чем 1/2, и альтернативу H_2 — в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Пусть $X_1, \ldots, X_{10}$ — выборка объема 10 из нормального распределения $\mathbf{N}_{a,4}$. Используя соответствующий доверительный интервал, построить критерий согласия размера 0,1 для проверки гипотезы $a = 2$ против альтернативы $a \neq 2$. Принимается ли основная гипотеза при $\overline{X} = 2{,}5$?

Распр.	$\mathbf{N}_{0,1}$		$\mathbf{H}_9$		$\mathbf{H}_{10}$		$\mathbf{H}_{11}$		$\mathbf{T}_9$		$\mathbf{T}_{10}$		$\mathbf{T}_{11}$	
ε	0,9	0,95	0,05	0,95	0,05	0,95	0,05	0,95	0,9	0,95	0,9	0,95	0,9	0,95
квантиль ур. ε	1,28	1,65	3,33	16,9	3,94	18,3	4,58	19,7	1,38	1,83	1,37	1,81	1,36	1,8

---

1. Дана выборка объема 11 из нормального распределения с неизвестными параметрами. Вычислить второй момент длины точного доверительного интервала для неизвестного математического ожидания уровня доверия 0,9. Необходимые квантили взять в таблице ниже.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения $\mathbf{E}_{1/\alpha}$. Построить асимптотический доверительный интервал для неизвестного параметра $\alpha > 0$ асимптотического уровня доверия 0,9, используя асимптотически нормальную оценку $\alpha^* = \overline{X}$. Вычислить значения концов интервала при $n = 400$ и $\overline{X} = 2{,}4$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы:
H_1: X_i имеют распределение с плотностью f_1, H_2: X_i имеют распределение с плотностью f_2, где

$$f_1(y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{если } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } y < 0; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & \text{если } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать альтернативу H_2, если все элементы выборки не превосходят 1, и гипотезу H_1 — в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Пусть $X_1, \ldots, X_{11}$ — выборка объема 11 из нормального распределения $\mathbf{N}_{0,\sigma^2}$. Используя соответствующий доверительный интервал, построить критерий согласия размера 0,1 для проверки гипотезы $\sigma^2 = 4$ против альтернативы $\sigma^2 \neq 4$. Принимается ли основная гипотеза при $\overline{X^2} = 3{,}5$?

Распр.	$\mathbf{N}_{0,1}$		$\mathbf{H}_9$		$\mathbf{H}_{10}$		$\mathbf{H}_{11}$		$\mathbf{T}_9$		$\mathbf{T}_{10}$		$\mathbf{T}_{11}$	
ε	0,9	0,95	0,05	0,95	0,05	0,95	0,05	0,95	0,9	0,95	0,9	0,95	0,9	0,95
квантиль ур. ε	1,28	1,65	3,33	16,9	3,94	18,3	4,58	19,7	1,38	1,83	1,37	1,81	1,36	1,8