Вам предлагаются два типа задач: задачи 1-7 тестовые. Решать их следует, расставляя «да», «нет» или ответы на листке с заданием, рядом с пунктами. Не разрешается обводить варианты ответов кружками и использовать знаки $+$ и $-$ вместо «да» и «нет». Задачи 8-16 следует решать на отдельном листе бумаги, сохраняя нумерацию из задания. Переписывать условия задач не нужно!

1. (**1/2 балла**). Пусть θ^* — состоятельная оценка параметра θ. Выберите утверждения, которые следуют из этого факта:

а) θ^* — несмещенная оценка;

б) θ^* — асимптотически несмещенная оценка;

в) θ^* — асимптотически нормальная оценка;

г) θ^*+5 — состоятельная оценка параметра $\theta+5$;

д) $h(\theta^*)$ — состоятельная оценка параметра $h(\theta)$, если h – измеримая функция;

е) $h(\theta^*)$ — состоятельная оценка параметра $h(\theta)$, если h – непрерывная функция;

ё) $h(\theta^*)$ — состоятельная оценка параметра $h(\theta)$, если h – гладкая функция.

2. (**1/2 балла**). Пусть элементы выборки $X_1,\ldots,X_n$ имеют распределение с конечной дисперсией σ^2, $S^2=\overline{(X-\overline{X})^2}$, $S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2$. Выберите верные утверждения:

а) $\mathbf{D}\overline{X}=n\mathbf{D}X_1$;

б) $S^2=\overline{X^2}-(\overline{X})^2$;

в) $S_0^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$;

г) $\mathbf{E}S^2=\sigma^2$;

д) $\mathbf{E}S^2\to\frac{n-1}{n}\sigma^2$;

е) $\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_0^2 \Subset \mathbf{H}_n$;

ж) $\mathbf{E}S^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$;

з) S_0^2 – состоятельная и несмещенная оценка σ^2.

3. (**1/3 балла**). Дана выборка объема n. Для проверки некоторой простой гипотезы H_1 против простой альтернативы используется критерий δ. Пусть $\alpha_i(\delta)$ — вероятность ошибки i-го рода. Верно ли, что:

а) всегда $\alpha_1(\delta)+\alpha_2(\delta)=1$?

б) $\alpha_1(\delta)=\mathbf{P}_{H_1}(H_1 \text{ неверна})$?

в) $\alpha_1(\delta)\to 0$ при $n\to\infty$?

г) состоятельностью критерия называется предел $\lim_{n\to\infty}\alpha_2(\delta)$?

д) δ — НМК?

е) $\alpha_2(\delta)\to 0$?

4. (**1/3 балла**). Пусть с. в. χ_k^2 имеет распределение «хи-квадрат» с k степенями свободы. Найти слабый предел последовательности случайных величин $\dfrac{2-k}{\chi_k^2}$ при $k\to\infty$. Ответ: ______________

5. (**1/3 балла**). Пусть $\theta^*\in K_{2\theta}$ — оценка параметра θ.
Построить несмещенную оценку параметра θ. Ответ: ______________

6. (**1/2 балла**). Выполнена ли первая часть условий регулярности (условие (R1)) для следующих семейств распределений, зависящих от параметра θ:

а) $\mathbf{U}(-\theta,0)$, $\theta>0$?

б) с плотностью $f_\theta(y)=\theta e^{-\theta y}I(y>0)$, $\theta>0$?

в) с плотностью $f_\theta(y)=e^{\theta+y}I(y<-\theta)$, $\theta>0$?

г) $\mathbf{B}(5,\theta)$, $0<\theta<1$?

7. (**1/2 балла**). Является ли статистика T достаточной для неизвестного параметра θ семейства распределений P_θ, если:

а) $\theta=(a,\sigma^2)$, $P_\theta=\mathbf{N}(a,\sigma^2)$, $T=\overline{X^2}$?

б) $\theta=\sigma^2$, $P_\theta=\mathbf{N}(3,\sigma^2)$, $T=\overline{X^2}$?

в) $\theta=\sigma^2$, $P_\theta=\mathbf{N}(0,\sigma^2)$, $T=\overline{X^2}$?

г) $\theta=(a,\sigma^2)$, $P_\theta=\mathbf{N}(a,\sigma^2)$, $T=(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$?

8. (**1/2 балла**). Пусть $F_n^*(y)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n. Доказать, что при любом фиксированном y величина $F_n^*(y)$ — состоятельная и несмещенная оценка для $\mathbf{P}(X_1 < y)$.

9. (**1/3 балла**). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из параметрического семейства распределений $\Pi(\lambda)$, где $0 < \lambda < \infty$. Является ли $2\overline{X}$ асимптотически нормальной оценкой? Если «да», то какого параметра и с каким коэффициентом? Если «нет» — почему?

10. (**1/2 балла**). Пусть θ^* — асимптотически нормальная оценка параметра θ с коэффициентом $\sigma^2(\theta)$. Доказать, что $\dfrac{1}{(\theta^*)^2}$ — АНО для $\dfrac{1}{\theta^2}$. Найти коэффициент.

11. (**1 балл**). Производится $n \geqslant 2$ измерений неизвестного диаметра d круга. Предполагается, что измерения производятся с независимыми случайными ошибками, имеющими одинаковое нормальное распределение с нулевым средним и неизвестной дисперсией σ^2. Проверить несмещенность и состоятельность оценки $s^* = \dfrac{\pi}{4}\left(\left(\overline{X}\right)^2 - \dfrac{S_0^2}{n}\right)$ для площади круга, если $S_0^2 = (n-1)^{-1}\sum_1^n (X_i - \overline{X})^2$.

12. (**1/2 балла**). Сформулировать теорему Неймана-Пирсона для двух простых гипотез. Для какой постоянной C, участвующей в определении НМК, этот критерий совпадает с байесовским, если предположить, что априорные вероятности гипотез H_1 и H_2 равны, соответственно, $2/5$ и $3/5$?

13. (**2/3 балла**). По выборке объема 1 из нормального распределения с неизвестным средним a и неизвестной дисперсией построить минимаксный критерий для различения двух простых гипотез о параметре a.

14. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из параметрического семейства распределений $\mathbf{U}\left(\theta, \theta + \dfrac{\theta+2}{\theta+1}\right)$, где $\theta > 0$.

а) (**2/3 балла**). Найти ОМП для параметра θ.

б) (**1/3 балла**). Найти достаточную статистику для параметра θ.

15. (**1 балл**). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения $\mathbf{N}(a, 1)$. Построить какой-либо критерий с ошибкой первого рода ε для различения гипотез H_1: $a = a_0$; H_2: $a < a_0$; H_3: $a > a_0$, «состоятельный» в следующем смысле: *вероятность принять гипотезу H_1, если она неверна, стремится к нулю с ростом n.*
Доказать, что построенный критерий действительно «состоятелен» в смысле данного определения.

16. (**1/2 балла**). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения F с конечной и отличной от нуля дисперсией. Описать класс всех распределений F, для которых имеет место сходимость $\mathbf{P}(\overline{X} > 3) \to \mathbf{P}(\mathbf{E}X_1 > 3)$.

А здесь могут быть Ваши комментарии:

Фамилия студента	Номер группы