(1998 год)

В ответах на тестовые задачи необходимо использовать ответы «да» и «нет». Не разрешается обводить варианты ответов кружками и использовать знаки $+$ и $-$ вместо «да» и «нет».

1. (**1/2 балла**). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из параметрического семейства распределений $U[0, 2b]$, где $0 < b < \infty$. Какие из перечисленных ниже высказываний справедливы?

а) $\overline{X} = b$ б) $\overline{X} \in U[0, 2b]$

в) $\mathbf{E}X_1 = b$ г) $\mathbf{D}X_1 = b/3$

г) $\dfrac{\overline{X} - b}{\sqrt{b/3}} \Rightarrow N(0, 1)$ д) $X_{(1)}$ — статистика

2. (**1/3 балла**). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha > 0$. Построить асимптотический доверительный интервал асимптотического уровня доверия $1 - \varepsilon$ для параметра α.

3. (**1 балл**). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $\Pi(\lambda)$, где $\lambda > 0$. Найти оценку метода моментов (по первому моменту) для параметра $\theta = \mathbf{P}_\lambda(X_1 = 0)$. Проверить ее на несмещенность.

4. (**1/3 балла**). В партии из n телевизоров оказалось m бракованных. Неизвестная вероятность p выпуска бракованного телевизора оценивается величиной $(m + 8)/n$. Является ли данная оценка:

а) несмещенной; б) состоятельной (при $n \to \infty$);

в) эффективной (в классе оценок с тем же смещением); г) асимпт. нормальной (при $n \to \infty$)?

5. (До **1 балла**). Пусть $X_1, \ldots, X_{3n}$ — выборка объёма $3n$ из распределения $N(a, 1)$. Является ли оценка $a^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=n+1}^{2n} X_i$ параметра a

а) несмещенной; б) состоятельной; в) асимптотич. нормальной; г) эффективной?

Почему?

а) б) в) г)

6. (До **1 балла**). Всегда ли несмещенная оценка является:

а) состоятельной; б) асимпт. нормальной; в) R-эффективной?

Если «да», то почему; если «нет» — привести пример(ы):

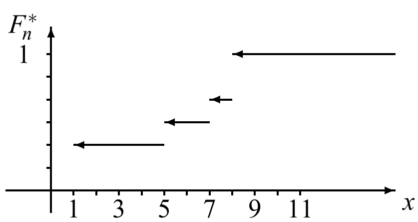
а) б) в)

7. (**1/3 балла**). Найти условное математическое ожидание $\mathbf{E}(X_1+X_2+1|\overline{X})$ для выборки объема $n\geqslant 2$ из $N(a,1)$ (выписать ответ):

8. (**1/3 балла**). Построить наиболее мощный критерий, обладающий нулевой вероятностью ошибки первого рода для проверки гипотезы $H_1:\vec{X}\Subset N(0,2)$ против альтернативы $H_2:\vec{X}\Subset\Pi(5)$.

9. (**1/3 балла**). Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения $U[0,2\theta]$. Для доверительного интервала $I_n=[\overline{X}-1/\sqrt[4]{n},\overline{X}+1/\sqrt[4]{n}]$ с уровнем значимости $\delta_n=\mathbf{P}_\theta(I_n\ni\theta)$ выяснить, чему равен предел δ_n при $n\to\infty$:
0   1/2 $1-\delta_n$ $\theta/2$ 1 ε $1-\varepsilon$ $1-\theta$ ∞ -1   1/4 $2/\sqrt[4]{n}$

10. (**1/3 балла**). Найти по крайней мере 2 различных выборки одного и того же объёма, которым соответствует следующая эмпирическая функция распределения:



Ответы:

1) $n=$ $\vec{X}=$

2) $n=$ $\vec{X}=$

11. (**1/3 балла**). Вытекает ли из сходимости по вероятности $\xi_n\xrightarrow{\text{p}}\xi$ сходимость $I(\xi_n\geqslant 1)\xrightarrow{\text{p}}I(\xi\geqslant 1)$? Объяснить.

12. (**1/3 балла**). Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения $\Pi(\lambda)$, где $\lambda\in(0,\infty)$. Является ли статистика $S=\overline{X}-3$ достаточной? ___________

Будут ли достаточными следующие статистики:

а) $5S$ б) S^2 в) $S\cdot n^2$
г) $(S+10)^2$ д) $\exp\{S\}$ е) $-S$?

13. Дана выборка $X_1,\ldots,X_n$. Гипотеза H_1: X_i имеют распределение с плотностью f_1. Альтернатива H_2: X_i имеют распределение с плотностью f_2. Здесь:

$$f_1(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^y, & \text{если } y<0,\\ 0, & \text{если } y\geqslant 0;\end{cases}\qquad f_2(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{2y}, & \text{если } y<0,\\ 0, & \text{если } y\geqslant 0.\end{cases}$$

а) (1/2 балла). Построить (при $n = 1$) НМК с ошибкой первого рода $1/3$. Найти мощность этого критерия.

б) (1/2 балла). Критерий $\delta = \delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} \leqslant c$; альтернативу H_2, если $\overline{X} > c$. Найти предел при $n \to \infty$ ошибки первого рода этого критерия для $c = -1/2$.

в) (1/2 балла). Проверить, является ли при $c = -1/2$ критерий δ из предыдущего пункта состоятельным.

г) (1/3 балла). При каких c критерий из пункта (б) не является состоятельным?

14. (**1/3 балла**). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $\Pi(\lambda)$. Построить оценку параметра λ, которая одновременно является
а) состоятельной и смещенной:
б) несостоятельной и несмещенной:
в) состоятельной, но не асимптотически нормальной:

15. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $B(1, p)$.

а) (**1/3 балла**). Проверить, является ли статистика $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ состоятельной оценкой для параметра $\theta = p(1-p)$.

б) (**1/3 балла**). Имеет ли статистика $\dfrac{nS^2}{p(1-p)}$ распределение хи-квадрат? Обосновать.

16. (**1/3 балла**). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $N(0, \theta)$, где параметр θ может принимать лишь значения 1 и 2 с априорными вероятностями, соответственно, 2/3 и 1/3. Построить байесовский критерий для различения гипотез H_1: $X_i \Subset N(0,1)$ и H_2: $X_i \Subset N(0,2)$.

А здесь могут быть Ваши комментарии:

Фамилия студента	Номер группы
Remarks (not for students)	