(1997 год)

В ответах на тестовые задачи разрешается обводить правильные варианты кружками и использовать ответы «да», «нет». Не разрешается использовать знаки $+$ и $-$ вместо «да» и «нет».

1. (**1/3 балла**). Пусть дана выборка $X_1,\dots,X_n$ из параметрического семейства распределений $U[a,b]$, где $-\infty < a < b < \infty$. Какие из перечисленных функций являются статистиками?

а) $(a+b)/2$ б) $X_{(n)}+(b-a)/(n+1)$ в) X_1+X_3+1 г) $\overline{X}$

д) $X_1/(b-a)$ е) $X_{(1)}$ ж) $2\overline{X}$ з) 199

2. (**1/3 балла**). Пусть дана выборка $X_1,\dots,X_n$ из показательного распределения с параметром 3. Какому распределению соответствует выборка $Y_1,\dots,Y_n$, где $Y_i = 1-\exp\{-3X_i\}$?

3. (**1/3 балла**). Привести пример, когда оценка максимального правдоподобия не единственна.

4. (**1/3 балла**). В партии из n телевизоров оказалось m бракованных. Неизвестная вероятность p выпуска бракованного телевизора оценивается величиной m/n. Является ли данная оценка:

а) несмещенной? б) состоятельной (при $n\to\infty$)?

в) эффективной? г) асимпт. нормальной (при $n\to\infty$)?

5. (До **1 балла**) Пусть дана выборка $X_1,\dots,X_n$ из распределения $B(1,\sqrt{p})$, где $0<p<1$. Является ли оценка $(\overline{X})^2$ параметра p

а) несмещенной? б) состоятельной? в) асимпт. нормальной?

Почему?

а) б) в)

6. (**1/3 балла**). Всегда ли несмещенная оценка является:

а) состоятельной? б) асимпт. нормальной? в) R-эффективной?

Если «да», то почему, если «нет» — привести пример(ы):

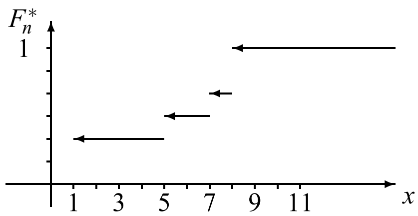
а) б) в)

7. (**1/3 балла**). Найти $E(X_1|\overline{X})$ для выборки из $N(a,1)$ (выписать ответ):

8. (**1/3 балла**). Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок для проверки гипотезы $H_1 : \vec{X}\Subset E(2)$ против альтернативы $H_2 : \vec{X}\Subset B(5,1/2)$.

9. (**1/3 балла**). Пусть дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $U[0, 2\theta]$. Для доверительного интервала $I_n = [\overline{X} - 1/n, \overline{X} + 1/n]$ с уровнем значимости $\delta_n = \mathbf{P}_\theta(I_n \ni \theta)$ выяснить, чему равен предел δ_n при $n \to \infty$:
0 1/2 $1-\delta_n$ $\theta/2$ 1 ε $1-\varepsilon$ $1-\theta$ ∞ -1 1/4

10. (**1/3 балла**). Найти по крайней мере 2 выборки различных объёмов, которым соответствует эмпирическая функция распределения (см. рис.1):



Ответы:

1) $n =$ $\vec{X} =$

2) $n =$ $\vec{X} =$

Рис. 1: к задаче No 10.

11. (**2/3 балла**). Вытекает ли из слабой сходимости $\xi_n \Rightarrow \xi$ сходимость $I(\xi_n \geqslant 0) \Rightarrow I(\xi \geqslant 0)$? Объяснить.

12. (**1/2 балла**). Пусть дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\Pi(\lambda)$, где $\lambda \in (0, \infty)$. Является ли статистика $S = n\overline{X} - 5$ достаточной? ____________

Будут ли достаточными следующие статистики:

а) $2S$?	б) S^2?	в) S/n^2?
г) $\sin S$?	д) $\exp\{S\}$?	е) $-S$?

13. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Гипотеза H_1: X_i имеют распределение с плотностью f_1. Альтернатива H_2: X_i имеют распределение с плотностью f_2. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} e^{1-y}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } y < 1; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2e^{2(1-y)}, & \text{если } y \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } y < 1. \end{cases}$$

а) (**1/2 балла**). Построить (при $n = 1$) НМК с ошибкой 1 рода $1/2$. Найти мощность этого критерия.

б) (**1/2 балла**). Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий, имеющий ошибку 1 рода $1/2$ и мощность $1/2$.

в) (1/6 балла). Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий, имеющий ошибку первого рода $1/2$ и мощность $9/10$.

г) (1/2 балла). Критерий $\delta = \delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} \geqslant 2$; альтернативу H_2, если $\overline{X} < 2$. Найти предел при $n \to \infty$ ошибки первого рода этого критерия.

д) (1/2 балла). Проверить, является ли критерий δ из предыдущего пункта состоятельным.

е) (1/2 балла). Как построить при произвольном фиксированном n критерий, который минимизирует ошибку первого рода в классе всех критериев с фиксированной мощностью $0 < \beta < 1$?

14. (**1/3 балла**). Дать определение сходимости по вероятности последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ к бесконечности.

15. (**1/2 балла**). Проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий двух независимых нормальных выборок объёмов n и m с единичными дисперсиями: $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n) \Subset N(a_1, 1), \vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n) \Subset N(a_2, 1)$, где $a_1 \geqslant a_2$. Рассматривается основная гипотеза $H_1 : a_1 = a_2$ против альтернативы $H_2 : a_1 > a_2$. Предлагается критерий: $\delta(\vec{X}, \vec{Y}) = \begin{cases} H_1, & \text{если } \rho(\vec{X}, \vec{Y}) \leqslant c, \\ H_2 & \text{иначе,} \end{cases}$ где $\rho(\vec{X}, \vec{Y}) = \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}}(\overline{X} - \overline{Y})$ и $c > 0$ – произвольное число. Проверить состоятельность этого критерия, используя определение из предыдущей задачи.

Постарайтесь отвечать на все вопросы очень коротко и по существу. Не нужны никакие объяснения, если они не требуются в условии задачи.

А здесь могут быть Ваши комментарии:

Фамилия студента	Номер группы
Remarks (not for students)	