1. (1/3 балла). Упростить выражение: $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) =$

2. (1/3 балла). Доказать, что для любых независимых событий A и B имеет место независимость в совокупности событий A, Ω и B.

3. (1/3 балла). Бросаются 2 игральные кости. Проверить, образуют ли полную группу событий следующие 3 события: сумма выпавших чисел нечетна; на обеих костях выпали четные цифры; на обеих костях выпали нечетные цифры.

4. (1/3 балла). Вероятность того, что выбранная наудачу собака рыжая — 0,2; без хвоста — 0,1; рыжая и без хвоста — 0,01. Найти вероятность того, что собака не рыжая и с хвостом.

6. (1/3 балла). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{B}_p$ — независимые с.в., $q = 1 - p$. Какой смысл имеют следующие величины?

а) $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ —

б) $C_{90}^{10} p^{10} q^{80}$ —

в) $25pq^{24}$ —

г) $q \sum\limits_{k=1}^{10} p^{k-1}$ —

7. (1/3 балла). Продолжить:

а) $\Omega \backslash A =$ б) Вероятность достоверного события =

в) $\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}) =$ г) Вероятность объединения двух событий =

8. (1/3 балла). Ограничена ли вероятность события? ________

9. (1/3 балла). **Может ли** функция F являться функцией распределения, если она обладает следующими свойствами (или имеет следующий вид):

а) F монотонно возрастает, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ ________

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, $F(0) = 1/2$ ________

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -N, \\ 1/2, & x \in [-N, 0], \\ 2/3, & x \in (0, N), \\ 1, & x \geqslant N \end{cases}$ ________

г) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ________

10. (1/2 балла). Заполните таблицу в терминах функций распределения (плотностей), или выберите ответы из предложенных вариантов (здесь $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, F – функция распределения с.в. ξ, f – плотность, если она имеется)

	ξ дискретна	ξ абс. непрерывна
$\mathbf{P}(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2)$		
$\mathbf{P}(x_1 \leqslant \xi < x_2)$		
$\mathbf{P}(\xi = x_1)$		
$\mathbf{P}(\xi \geqslant x_1)$		

а) $F(x_2) - F(x_1)$, б) $F(x_2 + 0) - F(x_1 + 0)$,

в) $F(x_2 + 0) - F(x_1)$, г) $F(x_1 + 0) - F(x_1)$,

д) $1 - F(x_1 + 0)$, е) $1 - F(x_1)$,

ж) $\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(u)\,du$, з) $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(u)\,du$,

и) $\int\limits_{-\infty}^{x_1+0} f(u)\,du$, к) $\int\limits_{x_1}^{\infty} f(u)\,du$,

л) 0 м) 1

11. (1/3 балла). Существует ли значение параметра a, при котором распределение с.в. ξ задано корректно? Если «да», укажите множество всех таких a.

а)

k	-1	0
$\mathbf{P}(\xi = k)$	$-a/2$	$a/2$

б)

k	5	8
$\mathbf{P}(\xi = k)$	$1 - a$	a

в) $\mathbf{P}(\xi = -ka) = \dfrac{3^k}{k!}e^{-a}$, $k = 0, 1, \ldots$

12. (1/2 балла). Случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$. Выразить через f_ξ плотность f_η случайной величины η:

а) $\eta = 5\xi$; б) $\eta = \xi - 1$; в) $\eta = 3\xi + 1$; г) $\eta = 2 - \xi$.

13. (1/3 балла). Индикатор события A — это случайная величина $I(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло.} \end{cases}$

Найти $\mathbf{E}I(A) =$ ______ Нарисовать функцию распределения $I(A)$.

14. Пространство элементарных исходов Ω состоит из пяти точек: $\Omega = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \$\}$.

а) **(1/3 балла).** Привести пример σ-алгебры $\mathcal{F}$ событий, состоящей более чем из двух событий:

б) **(1/2 балла).** Задана функция $f(\spadesuit) = 1, f(\clubsuit) = 2, f(\diamondsuit) = 3, f(\heartsuit) = 4, f(\$) = 0$. Описать $A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < \sqrt{2}\} =$

Принадлежит ли множество A σ-алгебре $\mathcal{F}$, построенной в п.(а)? ______ Объясните, **можно ли** отсюда сделать вывод об измеримости f.

15. (1/3 балла). Проверить, является ли следующая функция плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1], \\ 0, & \text{иначе .} \end{cases}$$

16. (1/2 балла). Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют распределение $\mathbf{N}_{a,\sigma^2}$. Найти распределение случайных величин:

а) $\xi_1 + \ldots + \xi_n \in$

б) $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \in$

в) $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a \in$

г) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right) \in$

17. (1/3 балла). Пусть a, b, c — положительные постоянные. Найти (или выразить через любые числовые характеристики случайной величины ξ):

$\mathbf{D}(c) =$ $\mathbf{D}(\xi/c^2) =$ $\mathbf{D}(a - b\xi) =$ $\mathbf{E}(-\xi^2 + 2) =$

18. (1/3 балла). Пусть $\xi \in \mathbf{U}_{-2,1/2}$ (равномерное). Какое распределение имеет с.в. $3-2\xi$? ______________

19. (1/3 балла). Пусть $\xi, \eta \in \mathbf{U}_{a,b}$, независимы. Выберите верное утверждение: ____________

а) $\xi + \eta \in \mathbf{U}_{2a,2b}$

б) $\xi + \eta \in \mathbf{U}_{0,2b}$

в) $\xi + \eta \in \mathbf{U}_{0,a+b}$

г) распределение $\xi + \eta$ не относится к классу равномерных

20. (1/3 балла). Заполнить таблицу:

Распределение	Обозначение	Плотность	$\mathbf{P}(\xi = k)$	Матем. ожидание	Дисперсия
Показательное с параметром 3					
	$\mathbf{B}_{n,p}$				
		$\dfrac{1}{b-a} I(x \in [a,b])$			

21. (1/2 балла). Верно ли утверждение: если $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{D}\xi = 1$, то $\xi \in \mathbf{N}_{0,1}$? Если «нет», привести контрпример.

22. (1/3 балла). Всегда ли верно утверждение: «Если средняя длина стороны квадрата равна 5 см, то средняя площадь квадрата равна 25 см^2»? **Объяснить**.

23. (1/3 балла). Оценить вероятность отклонения с. в. ξ от своего среднего значения на величину большую, чем 4 корня из дисперсии.

24. (1/3 балла). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых с. в., имеющих показательное распределение с параметром α. Пусть $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Найти предел (по распределению) при $n \to \infty$ последовательности $\sqrt{n}\left(\dfrac{S_n}{n} - 1/\alpha\right)$.

25. (1/2 балла). Сформулировать ЗБЧ Хинчина и привести пример последовательности одинаково распределенных с.в. с конечным математическим ожиданием, для которой не выполнен ЗБЧ Хинчина.

26. (1/2 балла). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределенных с. в. с конечным математическим ожиданием, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Как связаны характеристические функции $\varphi_{S_n/n}(t)$ и $\varphi_{\xi_1}(t)$? Разложить $\varphi_{S_n/n}(t)$ в ряд Тейлора.

27. (1/2 балла). Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский случайный процесс с интенсивностью $\lambda = \mathbf{E}(\xi(1))$. Какое распределение имеет с. в. $\xi(2)$?

28. (1/2 балла). Доказать, что для любой функции распределения F имеет место равенство $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

29. (1/2 балла). Доказать, что у с. в. $\xi \in \mathbf{U}_{a,b}$ конечен момент любого порядка $k > 0$.

30. (1/2 балла). Пусть дана случайная величина ω — координата точки, брошенной наудачу на отрезок [0,1]. Построить случайную величину $\xi(\omega)$, имеющую распределение Пуассона с параметром λ.

Постарайтесь писать коротко. Объяснения нужны там (и только там), где это указано в условии («проверить», «доказать» и т.д.). В остальных задачах достаточно привести ответ. Ставить «+» / «-» и т.п. вместо «да» и «нет» запрещается! Работы, написанные карандашом, не принимаются.

А здесь могут быть Ваши комментарии:

Фамилия студента	Номер группы