(1998 год)

В ответах на тестовые задачи необходимо использовать ответы «да» и «нет». Не разрешается обводить варианты ответов кружками и использовать знаки $+$ и $-$ вместо «да» и «нет».

1. (**1/2 балла**). Пусть $X_1,\dots,X_n$ — выборка из параметрического семейства распределений $U[0,2b]$, где $0<b<\infty$. Какие из перечисленных ниже высказываний справедливы?

а) $\overline{X}=b$ | б) $\overline{X}\Subset U[0,2b]$ **НЕТ**

в) $\mathbf{E}X_1=b$ | г) $\mathbf{D}X_1=b/3$

г) $\dfrac{\overline{X}-b}{\sqrt{b/3}}\Rightarrow N(0,1)$ **НЕТ** | д) $X_{(1)}$ — статистика

б) Хотя бы потому, что если распределение $\overline{X}$ не зависит от n, то не справедливы ни ЗБЧ, ни ЦПТ. Или вспомните, что сумма двух одинаково равномерно распределенных независимых с. в. распределена по закону Симпсона (с треугольной плотностью).
в) **Не только** потому, что дисперсия X_i не равна $b/3$! В таком виде это стремится к нулю в силу ЗБЧ.

2. (**1/3 балла**). Пусть $X_1,\dots,X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha>0$. Построить асимптотический доверительный интервал асимптотического уровня доверия $1-\varepsilon$ для параметра α.

ЦПТ.

3. (**1 балл**). Пусть $X_1,\,\dots,\,X_n$ — выборка из распределения $\Pi(\lambda)$, где $\lambda>0$. Найти оценку метода моментов (по первому моменту) для параметра $\theta=\mathbf{P}_\lambda(X_1=0)$. Проверить ее на несмещенность.

Заметим, что $\theta=\exp(-\lambda)$, а $\mathbf{E}X_1=\lambda$. К тому же распределение Пуассона устойчиво по суммированию:

$$\sum_1^n X_i\Subset\Pi(n\lambda).$$

Кроме того, для любой функции g и с. в. ξ с дискретным распределением

$$\mathbf{E}g(\xi)=\sum g(a_i)\mathbf{P}(\xi=a_i).$$

4. (**1/3 балла**). В партии из n телевизоров оказалось m бракованных. Неизвестная вероятность p выпуска бракованного телевизора оценивается величиной $(m+8)/n$. Является ли данная оценка:

а) несмещенной; | б) состоятельной (при $n\to\infty$);

в) эффективной (в классе оценок с тем же смещением); | г) асимпт. нормальной (при $n\to\infty$)?

Здесь как-то участвует $\overline{X}$?

5. (До **1 балла**). Пусть $X_1,\,\dots,\,X_{3n}$ — выборка объёма $3n$ из распределения $N(a,1)$. Является ли оценка $a^*=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=n+1}^{2n}X_i$ параметра a

а) несмещенной; б) состоятельной; в) асимптотич. нормальной; г) эффективной?

Почему?

а)

б)

в)

г) Убедиться, что эффективная оценка для параметра a этого семейства **есть**, и она не совпадает с a^*. Вспомнить теорему единственности эфф. оценки в классе с одинаковым смещением

6. (До **1 балла**). Всегда ли несмещенная оценка является:

а) состоятельной; б) асимпт. нормальной; в) R-эффективной?

Если «да», то почему; если «нет» — привести пример(ы):

а) б) в)

7. (**1/3 балла**). Найти условное математическое ожидание $\mathbf{E}(X_1+X_2+1|\overline{X})$ для выборки объема $n \geqslant 2$ из $N(a,1)$ (выписать ответ):

Найти эффективную оценку для a (в классе K_0). Вспомнить, что УМО линейно. Что $\mathbf{E}(1|\xi)=1$. Выяснить, какому классу принадлежат оценки X_1, X_2. Воспользоваться теоремой Блэкуэлла-Рао-Колмогорова об улучшении оценок с помощью полных и достаточных статистик (какой и является $\overline{X}$): усреднение **любой** оценки по полной и достаточной статистике приводит к **единственной** эффективной оценке из класса с тем же смещением (мы уже выяснили, к какой именно!).

Ответ: $2\overline{X}+1$.

8. (**1/3 балла**). Построить наиболее мощный критерий, обладающий нулевой вероятностью ошибки первого рода для проверки гипотезы $H_1 : \vec{X} \Subset N(0,2)$ против альтернативы $H_2 : \vec{X} \Subset \Pi(5)$.

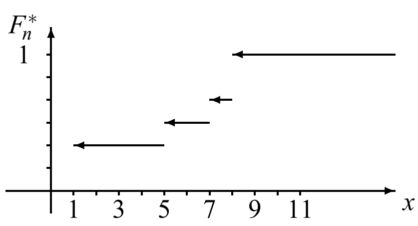
Теорема Неймана-Пирсона тут не при чем: распределения взаимно сингулярны (или **не** абсолютно непрерывны относительно одной и той же меры)! Именно этим и нужно пользоваться (см. также задачу 9.1 из зеленого задачника по мат.стат.)

9. (**1/3 балла**). Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из распределения $U[0,2\theta]$. Для доверительного интервала $I_n=[\overline{X}-1/\sqrt[4]{n}, \overline{X}+1/\sqrt[4]{n}]$ с уровнем значимости $\delta_n=\mathbf{P}_\theta(I_n \ni \theta)$ выяснить, чему равен предел δ_n при $n\to\infty$:

0 $1/2$ $1-\delta_n$ $\theta/2$ 1 ε $1-\varepsilon$ $1-\theta$ ∞ -1 1/4 $2/\sqrt[4]{n}$

ЦПТ. Интервал **очень** медленно сжимается с ростом n.

10. (**1/3 балла**). Найти по крайней мере 2 различных выборки одного и того же объёма, которым соответствует следующая эмпирическая функция распределения:



Ответы:

1) $n=$ $\vec{X}=$

2) $n=$ $\vec{X}=$

11. (**1/3 балла**). Вытекает ли из сходимости по вероятности $\xi_n \xrightarrow{\text{p}} \xi$ сходимость $I(\xi_n \geqslant 1) \xrightarrow{\text{p}} I(\xi \geqslant 1)$? Объяснить.

Самый распространенный ответ: «из сходимости по вероятности следует сходимость непрерывных функций по вероятности. Индикатор — непрерывная функция, поэтому»...

Найти контрпример (лучше всего обойтись без случайных величин – только числовыми последовательностями).

12. **(1/3 балла)**. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $\Pi(\lambda)$, где $\lambda \in (0, \infty)$. Является ли статистика $S = \overline{X} - 3$ достаточной? ____________

Будут ли достаточными следующие статистики:

а) $5S$ б) S^2 в) $S \cdot n^2$

г) $(S+10)^2$ д) $\exp\{S\}$ е) $-S$?

б) Функция правдоподобия представима в виде $h(\vec{X})\Psi(\overline{X}, \lambda)$. Но ее нельзя представить в виде $h(\vec{X})\tilde{\Psi}(S^2, \lambda)$, поскольку S^2 – не взаимно-однозначная функция $\overline{X}$, еще раз – поскольку x^2 – не взаимно-однозначная функция x в области $-3 \leqslant x < \infty$.
г) А вот $(S+10)^2$ — взаимно-однозначная функция, равно как и x^2 при $x \geqslant 7$.

13. Дана выборка X_1, …, X_n. Гипотеза H_1: X_i имеют распределение с плотностью f_1. Альтернатива H_2: X_i имеют распределение с плотностью f_2. Здесь:

$$f_1(y) = \begin{cases} e^y, & \text{если } y < 0, \\ 0, & \text{если } y \geqslant 0; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2e^{2y}, & \text{если } y < 0, \\ 0, & \text{если } y \geqslant 0. \end{cases}$$

а) (1/2 балла). Построить (при $n = 1$) НМК с ошибкой первого рода $1/3$. Найти мощность этого критерия.

Отношение правдоподобия имеет а.н. распределение при первой (и второй) гипотезе, так что критерий будет нерандомизированным. H_2 принимается $\iff 2e^{X_1} > C$ или $X_1 > \tilde{C}$

$$\frac{1}{3} = \alpha_1(\delta) = \mathbf{P}_{H_1}(\delta = H_2) = \mathbf{P}_{H_1}(X_1 > \tilde{C}) = \int_{\tilde{C}}^{0} e^y\, dy = 1 - \exp\{\tilde{C}\}.$$

б) (1/2 балла). Критерий $\delta = \delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $\overline{X} \leqslant c$; альтернативу H_2, если $\overline{X} > c$. Найти предел при $n \to \infty$ ошибки первого рода этого критерия для $c = -1/2$.

Данные плотности есть плотности распределения случайных величин, «минус которые» имеют показательные распределения. Поэтому $\mathbf{E}_{H_1}X_1 = -1$, $\mathbf{E}_{H_2}X_1 = -1/2$. Чтобы в этой задаче найти предел вероятности ошибки 1-го рода, достаточно ЗБЧ:

$$\mathbf{P}(|\overline{X} - \mathbf{E}X_1| < \varepsilon) \to 1 \text{ при } n \to \infty$$

в) (1/2 балла). Проверить, является ли при $c = -1/2$ критерий δ из предыдущего пункта состоятельным.

А здесь не обойтись без ЦПТ! Ср. с задачей 16 экзамена 1999 года.
Ни в коем случае не так: $\mathbf{P}_{H_2}(\delta = H_1) = \mathbf{P}_{H_2}(\overline{X} \leqslant -1/2) \to \mathbf{P}_{H_2}(-1/2 = \mathbf{E}X_1 \leqslant -1/2) = 1!$
Предел вероятности ошибки второго рода равен $1/2 = \Phi_{0,1}(0)$, и критерий не является состоятельным.

г) (1/3 балла). При каких c критерий из пункта (б) не является состоятельным?

См. задачу 16 экзамена 1999 года.

14. **(1/3 балла)**. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $\Pi(\lambda)$. Построить оценку параметра λ, которая одновременно является

а) состоятельной и смещенной:

б) несостоятельной и несмещенной:

в) состоятельной, но не асимптотически нормальной:

15. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $B(1,p)$.

а) (1/3 балла). Проверить, является ли статистика $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ состоятельной оценкой для параметра $\theta = p(1-p)$.

Стоит раскрыть скобки и выразить S^2 через первый и второй выборочные моменты.

б) (1/3 балла). Имеет ли статистика $\dfrac{nS^2}{p(1-p)}$ распределение хи-квадрат? Обосновать.

Распределение «хи-квадрат» абсолютно непрерывно!!

16. **(1/3 балла)**. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $N(0,\theta)$, где параметр θ может принимать лишь значения 1 и 2 с априорными вероятностями, соответственно, 2/3 и 1/3. Построить байесовский критерий для различения гипотез H_1: $X_i \Subset N(0,1)$ и H_2: $X_i \Subset N(0,2)$.

А здесь могут быть Ваши комментарии:

Фамилия студента	Номер группы
Remarks (not for students)	