СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Задачи

Е. А. Бакланов

Механико-математический факультет
Новосибирский государственный университет

2024

Г Л А В А 3

Ветвящиеся процессы.

Задача 3.1. Найти производящую функцию
а) распределения Бернулли с параметром p;
б) биномиального распределения с параметрами n и p;
в) распределения Пуассона с параметром λ;
г) геометрического распределения с параметром p.

Решение. а) По определению имеем:

$$\varphi(z) = z^0 \mathsf{P}(\xi = 0) + z^1 \mathsf{P}(\xi = 1) = 1 - p + pz.$$

б) Пусть случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, тогда её производящая функция равна

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=0}^{n} z^k \mathsf{P}(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} z^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + pz)^n. \end{aligned}$$

в) Производящая функция распределения Пуассона с параметром λ равна

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi = n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}. \end{aligned}$$

г) Пусть случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p, т. е. $\mathsf{P}(\xi = n) = p(1-p)^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p (1-p)^n = p \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)z)^n = \frac{p}{1 - (1-p)z}.$$

Задача 3.2. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

а) $\dfrac{(1+z)^2}{4}$; в) $\dfrac{1}{2(1-z/2)}$;

б) $e^{\lambda(z-1)}$, $\lambda > 0$; г) $(1/3+2z/3)^n$, $n \geqslant 1$.

Решение. а) Разложим заданную производящую функцию в ряд по степеням z:

$$\frac{(1+z)^2}{4} = \frac{1}{4}\,z^0 + \frac{1}{2}\,z^1 + \frac{1}{4}\,z^2.$$

Отсюда получаем таблицу распределения случайной величины ξ:

a_i	0	1	2
$\mathsf{P}(\xi = a_i)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

б) Из задачи 3.1(в) получаем, что $e^{\lambda(z-1)}$ есть производящая функция распределения Пуассона с параметром λ.

в) Из задачи 3.1(г) следует, что $\dfrac{1}{2(1-z/2)}$ является производящей функцией геометрического распределения с параметром $1/2$. С другой стороны, заметим, что $\dfrac{1}{2(1-z/2)}$ есть сумма бесконечной геометрической последовательности со знаменателем $z/2$:

$$\frac{1}{2(1-z/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Отсюда получаем распределение ξ: $\mathsf{P}(\xi = n) = 1/2^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$, т. е. ξ действительно имеет геометрическое распределение с параметром $1/2$.

г) Как было показано в задаче 3.1(б), функция $(1/3+2z/3)^n$ есть производящая функция биномиального распределения с параметрами n и $p = 2/3$. Тот же результат можно получить из разложения функции $(1/3+2z/3)^n$ в ряд по степеням z.

Задача 3.3. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией φ. Найти производящие функции величин $\xi+1$ и 2ξ.

Решение. По определению имеем:

$$\varphi_{\xi+1}(z) = \mathsf{E}z^{\xi+1} = z\mathsf{E}z^{\xi} = z\varphi(z).$$

Аналогично получаем производящую функцию случайной величины 2ξ:

$$\varphi_{2\xi}(z) = \mathsf{E}z^{2\xi} = \mathsf{E}(z^2)^{\xi} = \varphi(z^2).$$

Задача 3.4. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией φ. Найти производящие функции величин $\xi + n$ и $n\xi$, $n \geqslant 1$.

Решение. По определению получаем:

$$\varphi_{\xi+n}(z) = \mathsf{E} z^{\xi+n} = z^n \mathsf{E} z^{\xi} = z^n \varphi(z), \quad \varphi_{n\xi}(z) = \mathsf{E} z^{n\xi} = \mathsf{E}(z^n)^{\xi} = \varphi(z^n).$$

Задача 3.5. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией φ_ξ. Найти производящие функции следующих последовательностей:

а) $\mathsf{P}(\xi \leqslant n)$; в) $\mathsf{P}(\xi < n)$;

б) $\mathsf{P}(\xi \geqslant n)$; г) $\mathsf{P}(\xi > n)$.

Решение. а) Так как случайная величина ξ неотрицательна и целочисленна, то $\{\xi \leqslant n\} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \{\xi = k\}$. Следовательно, производящую функцию можно вычислить следующим образом:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi \leqslant n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(\xi = k).$$

Меняя порядок суммирования, получаем:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}(\xi = k) \sum_{n=k}^{\infty} z^{n-k}.$$

Заметим, что $\sum\limits_{n=k}^{\infty} z^{n-k}$ есть сумма бесконечной геометрической последовательности со знаменателем z, которая равна $(1-z)^{-1}$ при $|z| < 1$. Таким образом, производящая функция последовательности $\mathsf{P}(\xi \leqslant n)$ равна

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}(\xi = k) \frac{1}{1-z} = \frac{\varphi_\xi(z)}{1-z}.$$

б) Так как $\{\xi \geqslant n\} = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{\xi = k\}$, то

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi \geqslant n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = k).$$

Меняя порядок суммирования, получаем:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} z^n \mathsf{P}(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = k)\sum_{n=0}^{k} z^n.$$

Так как $\sum\limits_{n=0}^{k} z^n = (1 - z^{k+1})/(1 - z)$ при $|z| < 1$, то

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}\mathsf{P}(\xi = k) = \frac{1}{1 - z}\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}(\xi = k) - \frac{z}{1 - z}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}(\xi = k) = \\ &= \frac{1 - z\varphi_\xi(z)}{1 - z}.\end{aligned}$$

в) В силу равенства $\mathsf{P}(\xi < n) = 1 - \mathsf{P}(\xi \geqslant n)$, имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi < n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (1 - \mathsf{P}(\xi \geqslant n)) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi \geqslant n) = \\ &= \frac{1}{1 - z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi \geqslant n).\end{aligned}$$

Заметим, что вторая сумма в последнем соотношении есть производящая функция последовательности $\mathsf{P}(\xi \geqslant n)$. Следовательно, в силу п. (б) окончательно получаем:

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 - z} - \frac{1 - z\varphi_\xi(z)}{1 - z} = \frac{z}{1 - z}\,\varphi_\xi(z).$$

г) Так как $\mathsf{P}(\xi > n) = 1 - \mathsf{P}(\xi \leqslant n)$, то из п. (а) получаем:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi > n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi \leqslant n) = \frac{1 - \varphi_\xi(z)}{1 - z}.$$

Задача 3.6. Пусть случайная величина ν имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, а независимые случайные величины $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ имеют распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$ и не зависят от ν. Найти производящую функцию суммы $\xi_1 + \ldots + \xi_\nu$. Какое распределение имеет эта сумма?

В задачах 3.7–3.24 рассматривается ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$.

Задача 3.7. Найти $\mathsf{E}Z_n$ и $\mathsf{D}Z_n$ (при условии $\mathsf{D}\xi < \infty$).

Задача 3.8. Найти $\mathsf{E}(Z_{m+n} \mid Z_n)$.

Задача 3.9. Найти $\mathsf{E}(Z_m Z_n)$, $m \leqslant n$.

Задача 3.10. Доказать, что $\{Z_n/(\mathsf{E}\xi)^n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал, где $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Задача 3.11. Доказать, что $\{q^{Z_n}, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал, где q — вероятность вырождения, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Задача 3.12. Пусть $W_n = \dfrac{Z_n}{(\mathsf{E}\xi)^n}$, $n \geqslant 0$, и пусть $\mathsf{E}\xi > 1$, $\mathsf{D}\xi < \infty$. Доказать, что существует случайная величина W такая, что $\mathsf{P}(W < \infty) = 1$, $W_n \to W$ п. н. и $\mathsf{E}|W_n - W| \to 0$ при $n \to \infty$. Найти $\mathsf{E}W$.

Задача 3.13. Пусть $W_n = \dfrac{Z_n}{(\mathsf{E}\xi)^n}$, $n \geqslant 0$, и пусть $\mathsf{E}\xi > 1$, $\mathsf{D}\xi < \infty$. Доказать, что существует случайная величина W такая, что $\mathsf{P}(W < \infty) = 1$, $W_n \to W$ п. н. и $\mathsf{E}(W_n - W)^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Найти $\mathsf{E}W^2$.

Задача 3.14. Пусть $\mathsf{D}\xi > 0$. Обозначим $H_n(s) = \varphi_{Z_n}^{-1}(s)$, $X_n(s) = (H_n(s))^{Z_n}$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Доказать, что $\{X_n(s), \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал для любого $s \in [0,1]$, где $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Задача 3.15. Пусть $\varphi_\xi(z) = 1 - p\sqrt{1-z}$, где $p \in (0,1)$. Найти $\varphi_{Z_3}(z)$ — производящую функцию числа частиц в третьем поколении.

Задача 3.16. Найти производящую функцию числа частиц в n-м поколении, если производящая функция числа потомков одной частицы равна:

а) $1 - p + pz$; б) $\dfrac{1-p}{1-pz}$; в) $1 - p(1-z)^a$, $a \in (0,1)$.

Задача 3.17. Найти вероятность вырождения ветвящегося процесса $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ с производящей функцией числа потомков одной частицы

а) $1 - p(1-z)^a$, $a \in (0,1)$; б) $(1 + z + z^2 + z^3)/4$.

Задача 3.18. Найти распределение момента вырождения T ветвящегося процесса $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ с производящей функцией числа потомков одной частицы а) $1 - p + pz$; б) $1 - p(1-z)^a$, $a \in (0,1)$.

Задача 3.19. Пусть ξ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0,1)$, т. е. каждая частица с вероятностью p даёт одного непосредственного потомка и с вероятностью $1-p$ погибает без потомков. Найти производящую функцию общего числа частиц в первых n поколениях.

Задача 3.20. Пусть $\varphi_\xi(z) = 1 - p\sqrt{1-z}$, где $p \in (0,1)$. Найти вероятность вырождения этого ветвящегося процесса.

Задача 3.21. Пусть $p \in (1/2, 1)$ и каждая частица с вероятностью p делится на две частицы и с вероятностью $1-p$ погибает. Найти вероятность вырождения этого ветвящегося процесса.

Задача 3.22. Пусть каждая частица с равными вероятностями даёт от 0 до 3 непосредственных потомков и после этого погибает. Найти вероятность вырождения этого ветвящегося процесса.

Задача 3.23. Пусть $p \in (0,1)$ и пусть производящая функция потомков одной частицы равна $1 - p\sqrt{1-z}$. Найти вероятность того, что вырождение произойдёт на n-м шаге.

Задача 3.24. Пусть ξ имеет геометрическое распределение: $\mathsf{P}(\xi = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, \ldots$, $p \in (0,1)$. Найти производящую функцию общего числа частиц. Найти вероятность того, что всего в процессе было ровно k частиц.

Задача 3.25. В целочисленные моменты времени на сервер поступают запросы. Вероятность поступления запроса на сервер равна $p \in (0,1)$. Если сервер свободен, то он мгновенно приступает к обработке запроса, если занят, то запрос ставится в очередь. Предположим, что последовательные длительности обслуживания являются независимыми и одинаково распределёнными целочисленными случайными величинами с производящей функцией $\psi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. В нулевой момент времени поступил запрос и сразу же началось его выполнение. Найти производящую функцию $\varphi(z)$ количества запросов, пришедших на сервер за время обработки первого запроса.

Задача 3.26. Пусть в условиях предыдущей задачи время обработки запроса имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \geqslant 1$. Назовём периодом занятости длительность непрерывного обслуживания, начавшегося в нулевой момент времени. При каких p вероятность того, что период занятости конечен, будет равна 1?