СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Задачи

Е. А. Бакланов

Механико-математический факультет
Новосибирский государственный университет

2024

Мартингалы

Задача 2.1. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин ξ и η задаётся с помощью таблицы

	$\xi = -1$	$\xi = 0$	$\xi = 1$
$\eta = -1$	$1/8$	$1/12$	$7/24$
$\eta = 1$	$5/24$	$1/6$	$1/8$

где на пересечении столбца $\xi = i$ и строки $\eta = j$ находится вероятность $\mathsf{P}(\xi = i, \eta = j)$. Найти $\mathsf{E}(\xi \mid \eta)$ и $\mathsf{E}(\eta \mid \xi)$.

Задача 2.2. Пусть совместная плотность случайного вектора (ξ, η) равна

а) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{при } x, y \in [0,1], \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$ б) $f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{при } x, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Найти $\mathsf{E}(\xi \mid \eta)$ и $\mathsf{E}(\eta \mid \xi)$.

Задача 2.3. Пусть случайный вектор (ξ, η) имеет двумерное нормальное распределение с коэффициентом корреляции ρ. Найти $\mathsf{E}(\xi \mid \eta)$.

Задача 2.4. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1. Найти $\mathsf{E}(\xi \mid \min(\xi, a))$ и $\mathsf{E}(\xi \mid \max(\xi, a))$, где $a > 0$.

Задача 2.5. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти $\mathsf{E}(\xi \mid \xi^2)$.

Задача 2.6. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют стандартное нормальное распределение. Найти $\mathsf{E}(\xi^2 + \eta^2 \mid \xi + \eta)$.

Задача 2.7. Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти $\mathsf{E}(\xi_1 \mid \min(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ и $\mathsf{E}(\xi_1 \mid \max(\xi_1, \ldots, \xi_n))$.

Задача 2.8. Пусть ξ и η независимые и одинаково распределённые случайные величины с конечным математическим ожиданием. Найти $\mathsf{E}(\xi \mid \xi + \eta)$.

Задача 2.9. Правильный игральный кубик подбрасывается до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Случайная величина ξ — количество сделанных бросков, а случайная величина η — количество единиц, которое выпало в процессе. Найти $\mathsf{E}(\eta \mid \xi = n)$ и $\mathsf{E}(\eta^2 \mid \xi = n)$.

Задача 2.10. Пусть случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1)$: $\mathsf{P}(\xi = n) = p(1-p)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Найти $\mathsf{E}\xi$.

Задача 2.11. Мышь бегает по лабиринту, представляющему собой комнату с тремя выходами в коридоры, в которых мышь не может развернуться. Если мышь побежит по первому коридору, то она через две минуты окажется вне лабиринта, если мышь побежит по второму коридору, то через три минуты она снова окажется в комнате, наконец, если мышь побежит по третьему коридору, то через пять минут она снова окажется в комнате. Через какое время в среднем мышь сумеет выбраться из лабиринта?

Задача 2.12. Пусть ξ_n — число испытаний в схеме Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0,1)$ до достижения серии из n последовательных успехов. Найти $\mathsf{E}\xi_n$.

Задача 2.13. Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин. Пусть случайная величина N принимает неотрицательные целые значения и не зависит от последовательности $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$. Обозначим $S_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ (полагаем $S_N = 0$, если $N = 0$). Найти $\mathsf{E}S_N$ и $\mathsf{D}S_N$ (при условии существования $\mathsf{E}\xi_1$, $\mathsf{E}N$ и $\mathsf{D}\xi_1$, $\mathsf{D}N$ соответственно).

Задача 2.14. Предположим, что вероятность снятия одним человеком в банкомате 1000 рублей равна 0,2, снятия 2000 рублей равна 0,5 и снятия 5000 равна 0,3, а количество воспользовавшихся банкоматом за день представляет собой случайную величину, имеющую распределение Пуассона с параметром 100. Найти математическое ожидание и дисперсию количества денег, снятых в банкомате за сутки.

Задача 2.15. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие распределение Бернулли с параметром $p \in (0,1)$. Пусть $\zeta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\zeta$. Найти $\mathsf{E}\eta$.

Задача 2.16. Пусть $Y = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$. Доказать, что $\mathsf{E}(YZ) = \mathsf{E}(XZ)$ для любой $\mathcal{G}$-измеримой ограниченной случайной величины Z.

Задача 2.17. Пусть T — момент остановки относительно потока σ-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ и пусть существуют такие $N \geqslant 1$ и $0 < \varepsilon < 1$, что для каждого $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}(T \leqslant n + N \mid \mathcal{F}_n) \geqslant \varepsilon \quad \text{п. н.}$$

Доказать, что $\mathsf{E}T < \infty$.

Задача 2.18. Пусть T — момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\mathcal{F}_T$ — соответствующая σ-алгебра.. Доказать, что

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \colon A \cap \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n \text{ для всех } n \geqslant 0\}.$$

Задача 2.19. Пусть T_1 и T_2 — моменты остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Доказать, что

1. если $A \in \mathcal{F}_{T_1}$, то $A \cap \{T_1 \leqslant T_2\} \in \mathcal{F}_{T_2}$;
2. если $T_1 \leqslant T_2$, то $\mathcal{F}_{T_1} \subseteq \mathcal{F}_{T_2}$;
3. $\mathcal{F}_{T_1 \wedge T_2} = \mathcal{F}_{T_1} \cap \mathcal{F}_{T_2}$.

Задача 2.20. Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Положим $T = \inf\{n \geqslant 1\colon X_n \geqslant \alpha\}$, $S = \inf\{n \geqslant 1\colon X_1 + \ldots + X_n \geqslant 1\}$. Найти математические ожидания $\mathsf{E}T$, $\mathsf{E}X_T$, $\mathsf{E}S$, $\mathsf{E}X_S$.

Задача 2.21. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал. Доказать, что $\mathsf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_{S\wedge T}$ для любого ограниченного момента остановки T и любого момента остановки S.

Задача 2.22. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал. Доказать, что $\mathsf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_{S\wedge T}$ для любых моментов остановки S и T.

Задача 2.23. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал и пусть T — момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ такой, что $\mathsf{P}(T < \infty) = 1$, $\mathsf{E}|X_T| < \infty$ и $\mathsf{E}\big(|X_n|\mathsf{I}(T \geqslant n)\big) \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\{X_{T\wedge n}, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал.

Задача 2.24. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал и пусть T — конечный момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Доказать, что $\{X_{T\wedge n}, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал.

Задача 2.25. Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — субмартингал, T_1 и T_2 — ограниченные моменты остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ такие, что $T_1 \leqslant T_2$. Доказать, что $\mathsf{E}(X_{T_2} \mid \mathcal{F}_{T_1}) \geqslant$ $\geqslant X_{T_1}$ п. н.

Задача 2.26. Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — субмартингал. Пусть $\{T_n\}_{n\geqslant 0}$ — неубывающая последовательность ограниченных моментов остановки: $T_n \leqslant T_{n+1}$ и $\mathsf{P}(T_n \leqslant N_n) = 1$ для некоторых $N_n < \infty$. Положим $Z_n = X_{T_n}$, $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{T_n}$, $n \geqslant 0$. Доказать, что $Z =$ $= \{Z_n, \mathcal{G}_n\}_{n\geqslant 0}$ — субмартингал.

Задача 2.27. Доказать, что интегрируемая стохастическая последовательность $X =$ $= \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ является мартингалом тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}X_{T_1} = \mathsf{E}X_{T_2}$ для любых моментов остановки T_1 и T_2 таких, что $T_1 \leqslant T_2 \leqslant N$ п. н.

Задача 2.28. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал и пусть T_1, T_2 — моменты остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ такие, что $\mathsf{P}(T_1 \leqslant T_2 < \infty) = 1$. Пусть также $\mathsf{E}|X_{T_i}| < \infty$ и

$\liminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}\big(|X_n|\mathsf{I}(T_i \geqslant n)\big) = 0$, $i = 1, 2$. Доказать, что $\mathsf{E}(X_{T_2} \mid \mathcal{F}_{T_1}) = X_{T_1}$ п. н.

Задача 2.29. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал и пусть T — конечный момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Доказать, что $\mathsf{E}|X_T| < \infty$ и

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}\big(|X_n|\mathsf{I}(T \geqslant n)\big) = 0.$$

Задача 2.30. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал или неотрицательный субмартингал, и пусть T — конечный момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Доказать, что $\mathsf{E}|X_T| \leqslant \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}|X_n|$.

Задача 2.31. Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — квадратично интегрируемый мартингал такой, что

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(X_n - X_{n-1})^2 < \infty.$$

Доказать, что существует случайная величина X_∞ такая, что

$$\mathsf{E}X_\infty^2 < \infty, \quad X_n \to X_\infty \text{ п. н.}, \quad \mathsf{E}(X_n - X_\infty)^2 \to 0.$$

Задача 2.32. Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — квадратично интегрируемый мартингал. Доказать, что $\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}X_n^2 < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(X_n - X_{n-1})^2 < \infty.$$

Задача 2.33. Привести пример мартингала $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 1}$ такого, что $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = = -\infty$ с вероятностью 1.

Задача 2.34. Привести пример мартингала $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ такого, что $\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}|X_n| = = \infty$ и с вероятностью 1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

Задача 2.35. Привести пример супермартингала $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$, для которого выполнено условие $\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}|X_n| < \infty$ и, следовательно, с вероятностью 1 существует конечный предел $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$, но

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}|X_n - X_\infty| \neq 0.$$

Задача 2.36. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — субмартингал. Доказать, что $\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}X_n^+ < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}|X_n| < \infty$.

Задача 2.37. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — супермартингал. Доказать, что $\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}X_n^- < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}|X_n| < \infty$.

Задача 2.38. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — неотрицательный супермартингал (и, следовательно, с вероятностью 1 существует конечный предел $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$). Доказать, что $\mathsf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_n) \leqslant X_n$ п. н. для всех $n \geqslant 1$ и $\mathsf{E}X_\infty \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}X_n$.

Задача 2.39. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал такой, что $\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}X_n^2 < \infty$. Доказать, что существует случайная величина X_∞ такая, что $\mathsf{E}|X_\infty| < \infty$ и $X_n \xrightarrow{\mathsf{p}} X_\infty$ при $n \to \infty$.

Задача 2.40. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый субмартингал (и, следовательно, с вероятностью 1 существует конечный предел $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$). Доказать, что $\mathsf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_T) \geqslant X_T$ п. н. для любого момента остановки T.

Задача 2.41. Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал, T — момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Пусть $\mathsf{E}T < \infty$ и $\mathsf{E}\big(|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n\big) \leqslant C$ п. н. для всех $n \geqslant 0$ и для некоторой положительной постоянной C. Доказать, что $\mathsf{E}|X_T| < \infty$ и $\mathsf{E}X_T = \mathsf{E}X_0$.

Задача 2.42. Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — цепь Маркова со счётным множеством состояний S и матрицей переходных вероятностей P, и пусть $g\colon S \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция такая, что

$$\sum_{j\in S} p_{ij} g(j) \leqslant \lambda g(i)$$

для некоторого $\lambda > 0$ и всех $i \in S$. Обозначим $Z_n = g(X_n)/\lambda^n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, $n \geqslant 0$. Доказать, что $\{Z_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — супермартингал.

Задача 2.43. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал такой, что $\mathsf{E}X_n^2 < \infty$ для всех $n \geqslant 0$. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}(X_n - X_{n-1})^2}{n^2} < \infty.$$

Доказать, что $\dfrac{X_n}{n} \to 0$ п. н. и $\mathsf{E}(X_n/n)^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Задача 2.44. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал такой, что для всех $n \geqslant 1$ и некоторой положительной постоянной C

$$\mathsf{E}(X_n - X_{n-1})^2 \leqslant C.$$

Доказать, что $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{p}} 0$ при $n \to \infty$.

Задача 2.45. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал такой, что $\mathsf{E}X_n^2 < \infty$ для всех $n \geqslant 0$. Пусть

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(X_k - X_{k-1})^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{p}} 0$ при $n \to \infty$.

Задача 2.46. Пусть $\{U_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 1}$ — мартингал-разность. Пусть $\mathsf{E}U_n = 0$ и $\mathsf{E}U_n^2 < \infty$ для всех $n \geqslant 1$. Доказать, что $\{X_n^2/n\}_{n\geqslant 1}$ — равномерно интегрируемая последовательность, где $X_n = U_1 + \ldots + U_n$.

Задача 2.47. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — субмартингал. Доказать, что для любого $x > 0$

$$x\mathsf{P}\Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k| \geqslant x\Big) \leqslant 3 \max_{0\leqslant k\leqslant n} \mathsf{E}|X_k|.$$

Задача 2.48. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — субмартингал. Доказать, что для любого $x > 0$

$$\mathsf{P}\big(\sup_{n\geqslant 0} |X_n| \geqslant x\big) \leqslant \frac{3}{x} \sup_{n\geqslant 0} \mathsf{E}|X_n|.$$

Задача 2.49. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — неотрицательный супермартингал. Доказать, что для любого $x > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant x\Big) \leqslant \frac{\mathsf{E}X_0}{x}.$$

Задача 2.50. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — неотрицательный супермартингал. Доказать, что для любого $x > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{k\geqslant n} X_k \geqslant x\Big) \leqslant \frac{\mathsf{E}X_n}{x}.$$

Задача 2.51. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал такой, что $\mathsf{E}X_n = 0$ и $\mathsf{E}X_n^2 < \infty$ для всех $n \geqslant 0$. Доказать, что для любого $x > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant x\Big) \leqslant \frac{\mathsf{E}X_n^2}{\mathsf{E}X_n^2 + x^2}.$$

Задача 2.52. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — неотрицательный субмартингал, $Y = \{Y_n, \mathcal{F}_{n-1}\}_{n\geqslant 0}$ — предсказуемая последовательность ($\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$) такая, что $0 \leqslant Y_{n+1} \leqslant Y_n \leqslant C$ п. н. для некоторой положительной постоянной C. Доказать, что для любого $x > 0$

$$x\mathsf{P}\Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n}(Y_kX_k) \geqslant x\Big) + \mathsf{E}\Big(Y_nX_n; \max_{0\leqslant k\leqslant n}(Y_kX_k) < x\Big) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}(Y_k\Delta X_k),$$

где $\Delta X_0 = X_0$, $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geqslant 1$.

Задача 2.53. Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $T = \inf\{n \geqslant 1 : \sum\limits_{i=1}^{n} X_i > 0\}$. Доказать, что если $\mathsf{E}X_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$, то $\mathsf{P}(T < \infty) = 1$ и $\mathsf{E}T = \infty$.

Задача 2.54. Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $T = \inf\{n \geqslant 1 : \sum\limits_{i=1}^{n} X_i > 0\}$. Доказать, что если $\mathsf{E}X_n = 0$ и $\mathsf{E}X_n^2 = 1$ для всех $n \geqslant 1$, то $\mathsf{P}(T < \infty) = 1$ и $\mathsf{E}T^{1/2} = \infty$.