# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

## Задачи

Е. А. Бакланов

Механико-математический факультет
Новосибирский государственный университет

2024

# Цепи Маркова

**Задача 1.1.** Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность независимых дискретных случайных величин. Доказать, что $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — цепь Маркова. Найти матрицу переходных вероятностей.

**Задача 1.2.** Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, принимающих два значения: $\mathsf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathsf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geqslant 1$. Последовательность $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *простым случайным блужданием*. Доказать, что $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ образует цепь Маркова. Найти матрицу переходных вероятностей.

**Задача 1.3.** Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых целочисленных случайных величин. Положим $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geqslant 1$. Доказать, что $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ образует цепь Маркова. Найти матрицу переходных вероятностей.

**Задача 1.4.** Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_n$ — цепь Маркова. Положим $Y_j = X_{n-j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Доказать, что $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ образует цепь Маркова

**Задача 1.5.** Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — цепь Маркова. Пусть $0 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ — последовательность целых чисел. Положим $Y_j = X_{n_j}$, $j \geqslant 1$. Доказать, что $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ образует цепь Маркова.

**Задача 1.6.** Пусть $S$ — конечное или счётное множество. Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, и пусть случайная величина $\xi_0$ принимает значения в $S$ и не зависит от последовательности $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$. Пусть $g\colon S \times \mathbb{R} \to S$ — измеримая функция. Положим $Y_0 = \xi_0$ и $Y_n = g(Y_{n-1}, X_{n-1})$ при $n \geqslant 1$. Доказать, что $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ образует цепь Маркова. Найти переходные вероятности.

**Задача 1.7.** Доказать, что для любой цепи Маркова $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ со значениями в конечном или счётном множестве $S$ существуют измеримая функция $g\colon S \times \mathbb{R} \to S$ и последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ такие, что при всех $n \geqslant 0$

$$Y_{n+1} = g(Y_n, X_n).$$

**Задача 1.8.** Два игрока $A$ и $B$, имеющие соответственно капиталы $a$ и $b$, играют в азартную игру, состоящую из отдельных партий. Каждая партия с вероятностью $p$, $0 < p < 1$, оканчивается выигрышем игрока $A$ и с вероятностью $1 - p$ — выигрышем игрока $B$. После каждой партии проигравший уплачивает 1 рубль выигравшему. Результат каждой партии не зависит от результатов предыдущих партий. Игра продолжается до разорения одного из игроков. Обозначим $X_n$ — капитал игрока $A$ после $n$-й партии, $X_0 = a$. Доказать, что $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ — цепь Маркова и найти матрицу переходных вероятностей.

**Задача 1.9.** Однородная цепь Маркова с множеством состояний $S = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Найти вероятность того, что

1. цепь, выйдя из состояния 1, через два шага окажется в состоянии 3;
2. цепь, выйдя из состояния 2, через три шага окажется в состоянии 3.

Найти распределение цепи в момент $n = 2$, если в момент $n = 0$ цепь с равными вероятностями находится в одном из своих состояний.

**Задача 1.10.** Однородная цепь Маркова с множеством состояний $S = \{0, 1\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для каждого начального распределения $p(0) = (p_0, p_1)$ и для всех $n \geqslant 1$ найти $p(n)$ — распределение цепи в момент $n$.

**Задача 1.11.** Однородная цепь Маркова $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ с множеством состояний $S = \{0, 1\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

где $p, q \in (0, 1)$. Найти $\mathsf{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 0)$.

**Задача 1.12.** Однородная цепь Маркова с множеством состояний $S = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Найти $\mathsf{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$.

**Задача 1.13.** Однородная цепь Маркова с множеством состояний $S = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти $\mathsf{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$, если
а) $p = 1/16$; б) $p = 1/6$; в) $p = 1/12$.

**Задача 1.14.** Пусть в момент времени $n = 0$ имеется одна частица, которая в момент времени $n = 1$ производит $k$ частиц (потомков) с вероятностью $p_k$, $k = 0, 1, \ldots$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Каждый из потомков в момент времени $n = 2$ независимо от других потомков производит потомство, численность которого имеет то же самое распределение, и т. д. Обозначим через $Z_n$ численность популяции в $n$-м поколении, $n = 1, 2, \ldots$, $Z_0 = 1$. Доказать, что последовательность $\{Z_n\}_{n \geqslant 1}$ образует цепь Маркова, найти матрицу переходных вероятностей.

**Задача 1.15.** Однородная цепь Маркова с множеством состояний $S = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Указать существенные, несущественные, периодические, непериодические состояния.

**Задача 1.16.** Рассмотрим одномерное случайное блуждание по целочисленной решётке. Обозначим через $X_n$, $n = 0, 1, \ldots$, координату частицы в момент времени $n$. За один шаг частица перемещается из точки $i$ в точку $i + 1$ с вероятностью $p$ или в точку $i - 1$ с вероятностью $1 - p$, $0 < p < 1$. Исследовать на возвратность состояния описанной цепи Маркова (см. задачу 1.2).

**Задача 1.17.** Симметричную игральную кость подбрасывают неограниченное число раз. Пусть $\xi_n$ — число выпавших очков при $n$-м подбрасывании, $n \geqslant 1$. Положим $X_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $n \geqslant 1$. Доказать, что последовательность $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ образует цепь Маркова, найти матрицу переходных вероятностей, классифицировать состояния цепи.

**Задача 1.18.** Монету, вероятность выпадения герба которой равна $p$, $0 < p < 1$, подбрасывают неограниченной число раз. Пусть $\xi_n$ — число выпавших гербов при $n$-м подбрасывании монеты, $n \geqslant 1$. Положим $X_0 = 0$ и $X_{n+1} = (X_n + 1)\mathrm{I}(\xi_{n+1} = 1)$, $n \geqslant 1$. Доказать, что последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ образует цепь Маркова, найти матрицу переходных вероятностей, классифицировать состояния цепи. *Отметим, что последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *описывает длину серии успехов в последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха $p$ в одном испытании; каждая новая серия начинается после неудачи.*

**Задача 1.19.** Привести пример цепи Маркова, все состояния которой несущественные.

**Задача 1.20.** Привести пример цепи Маркова, имеющей как существенные, так и несущественные состояния.

**Задача 1.21.** Простейшая модель газа.

В двух урнах размещено $m$ шаров. Каждую минуту выбирается наугад один из шаров и перекладывается в противоположную урну. Пусть $X_n$ обозначает количество шаров в первой урне в момент времени $n \geqslant 0$. Доказать, что$\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ образует цепь Маркова, найти матрицу переходных вероятностей. Найти стационарное распределение.

**Задача 1.22.** Таксист возит клиентов по городу, разбитому на две тарифные зоны: $A$ и $B$. Если он берёт клиента в зоне $A$, то с вероятностью 0,8 это будет заказ внутри зоны и с вероятностью 0,2 это будет поездка в зону $B$. Если он берёт пассажира в зоне $B$, то с вероятностью 0,7 это будет поездка внутри зоны и с вероятностью 0,3 это будет поездка в зону $A$. За поездку внутри зоны $A$ таксист в среднем получает 150 рублей, за поездку внутри зоны $B$ — 200 рублей, а за поездку между зонами — 500 рублей. Сколько в среднем таксист получает за поездку?