СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

Оглавление

Ветвящиеся процессы

В настоящей главе мы рассмотрим ветвящиеся процессы Гальтона — Ватсона.

Модель ветвящихся процессов возникла в 1873 г. в результате изучения статистиком Фрэнсисом Гальтоном и математиком Генри Ватсоном вопроса исчезновения английских аристократических фамилий.

Термин «ветвящийся случайный процесс» впервые был введён в 1947 году в работе А. Н. Колмогорова и Н. А. Дмитриева «Ветвящиеся случайные процессы».

Ветвящиеся процессы

Опишем модель Гальтона — Ватсона. Пусть в нулевом поколении имеется одна частица. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. В конце жизни частица производит случайное число потомков ξ в соответствии с распределением

$$\mathsf{P}(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Эти частицы образуют первое поколение. Каждая из новорождённых частиц также имеет единичную продолжительность жизни и в конце её производит (независимо от остальных частиц) случайное число потомков в соответствии с тем же вероятностным распределением $\{p_k : k = 0, 1, \ldots\}$. Получается второе поколение и т. д.

Обозначим Z_n — число частиц в n-м поколении, $\xi_{i,n}$ — число потомков i-й частицы n-го поколения, причём $\{\xi_{i,n} \colon i, n \geqslant 1\}$ — независимые случайные величины с тем же распределением, что и ξ. Таким образом, $Z_0 = 1$ и при $n \geqslant 0$

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n}.$$

Определение 5.1

Последовательность $\{Z_n\}_{n \geqslant 0}$ называется *ветвящимся процессом Гальтона — Ватсона.*

Удобным аппаратом для работы с ветвящимися процессами являются производящие функции.

Определение 5.2

Производящей функцией случайной величины ξ, принимающей целые неотрицательные значения, называется функция $\varphi(z)$ комплексного аргумента z, определяемая равенством

$$\varphi(z) = \mathsf{E} z^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}(\xi = k).$$

Этот степенной ряд сходится абсолютно в области $|z| \leqslant 1$ и является бесконечно дифференцируемой функцией в области $|z| < 1$.

Отметим некоторые свойства производящих функций.

Лемма 5.1

1. *Пусть* $\varphi(z)$ *— производящая функция неотрицательной целочисленной случайной величины* ξ. *Тогда* $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = \mathsf{E}\xi$ *и* $\varphi(0) = \mathsf{P}(\xi = 0)$.

2. *Пусть* ξ *и* η *— независимые неотрицательные целочисленные случайные величины с производящими функциями* $\varphi_\xi(z)$ *и* $\varphi_\eta(z)$ *соответственно. Тогда* $\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z)\varphi_\eta(z)$.

Доказательство

Равенства $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(0) = \mathsf{P}(\xi = 0)$ очевидны. Покажем, что

$$\varphi'(1) = \mathsf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathsf{P}(\xi = k).$$

Действительно, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mathsf{P}(\xi = k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$, то из леммы 2.8 следует, что сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$ функцией и этот ряд можно почленно дифференцировать на отрезке $[0, 1]$.

Тогда $\varphi'(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k$ и, значит, $\varphi'(1) = \mathsf{E}\xi$.

Доказательство

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k = +\infty$. Тогда для любого $N \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
\varphi'(1) &= \lim_{s\to 1} \frac{\varphi(s)-\varphi(1)}{s-1} = \lim_{s\to 1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}(s^k-1)p_k}{s-1} = \\
&= \lim_{s\to 1} \sum_{k=1}^{\infty}(1+s+\ldots+s^{k-1})p_k \geqslant \\
&\geqslant \lim_{s\to 1} \sum_{k=1}^{N}(1+s+\ldots+s^{k-1})p_k = \sum_{k=1}^{N} kp_k.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что $\varphi'(1) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k = +\infty$.

Доказательство

Докажем второе утверждение. Так как ξ и η независимы, то

$$\varphi_{\xi+\eta}(z) = \mathsf{E} z^{\xi+\eta} = \mathsf{E} z^{\xi} \mathsf{E} z^{\eta} = \varphi_{\xi}(z)\varphi_{\eta}(z).$$

$\square$

Пример 1. Найдём производящую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона с параметром λ:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \mathsf{E} z^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi = n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.\end{aligned}$$

Лемма 5.2

Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин (целочисленных и неотрицательных) с производящей функцией* $\varphi_\xi(z)$.
Пусть ν *— неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от* $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *и имеющая производящую функцию* φ_ν.
Тогда производящая функция суммы случайного числа слагаемых $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ *(*$\eta = 0$*, если* $\nu = 0$*) определяется равенством*

$$\varphi_\eta(z) = \varphi_\nu(\varphi_\xi(z)).$$

Доказательство

В силу независимости случайных величин $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$, из леммы 5.1 имеем:

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(z) = \varphi_{\xi_1}(z)\cdot\ldots\cdot\varphi_{\xi_n}(z).$$

Далее, используя одинаковую распределённость величин $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$, независимость ν от $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ и равенство $1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{I}(\nu = k)$, получаем:

$$\begin{aligned}
\varphi_\eta(z) &= \mathsf{E} z^{\xi_1+\ldots+\xi_\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\Big(z^{\xi_1+\ldots+\xi_\nu}\mathbf{I}(\nu=k)\Big) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\Big(z^{\xi_1+\ldots+\xi_k}\mathbf{I}(\nu=k)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E} z^{\xi_1+\ldots+\xi_k}\mathsf{P}(\nu=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\mathsf{E} z^{\xi_1}\Big)^k \mathsf{P}(\nu=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\xi^k(z)\mathsf{P}(\nu=k) = \varphi_\nu(\varphi_\xi(z)). \qquad \square
\end{aligned}$$

Лемма 5.3

Пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ — ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Тогда $\varphi_{Z_{n+1}}(z) = \varphi_{Z_n}(\varphi(z))$.

Доказательство

Так как $Z_{n+1} = \xi_{1,n} + \ldots + \xi_{Z_n,n}$ и Z_n не зависит от набора независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{\xi_{i,n}\}_{i\geqslant 1}$, то из леммы 5.2 получаем требуемое равенство. □

Обозначим n-кратную итерацию функции $\varphi(z)$ через $\varphi_{(n)}(z)$:

$$\varphi_{(n)}(z) = \underbrace{\varphi(\varphi(\ldots\varphi}_{n \text{ раз}}(z)\ldots)).$$

Лемма 5.4

Пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ — ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Тогда $\varphi_{Z_n}(z) = \varphi_{(n)}(z)$ и $\varphi_{Z_n}(z) = \varphi(\varphi_{Z_{n-1}}(z))$.

Доказательство

Из леммы 5.3 по индукции находим, что

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(z) &= \varphi_{Z_{n-1}}(\varphi(z)) = \varphi_{Z_{n-2}}(\varphi(\varphi(z))) = \ldots = \varphi_{Z_1}(\varphi(\ldots\varphi(z)\ldots)) = \\ &= \varphi_{(n)}(z).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_{Z_n}(z) = \underbrace{\varphi(\varphi(\ldots\varphi}_{n \text{ раз}}(z)\ldots)) = \varphi(\varphi_{Z_{n-1}}(z)).$$

□

Вероятность вырождения

Всюду далее для исключения тривиального случая будем считать, что $\mathsf{P}(\xi = 0) < 1$.
Положим

$$T = \min\{n \geqslant 1 \colon Z_n = 0\}.$$

Ясно, что $Z_{T-1} \neq 0$, $Z_T = Z_{T+1} = \ldots = 0$, поэтому случайную величину T естественно называть *продолжительностью жизни* или *моментом вырождения* процесса $\{Z_n\}_{n \geqslant 0}$.
Обозначим через q *вероятность вырождения* ветвящегося процесса:

$$q = \mathsf{P}(T < \infty).$$

Вероятность вырождения

Лемма 5.5

Вероятность вырождения q *ветвящегося процесса является решением уравнения* $s = \varphi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Вероятность вырождения

Доказательство

Обозначим $q_n = \mathsf{P}(Z_n = 0)$. Так как $\{Z_n = 0\} \subseteq \{Z_{n+1} = 0\}$, то $q_n \leqslant q_{n+1}$.
Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$.
Далее, в силу непрерывности вероятностной меры

$$q_n = \mathsf{P}(Z_n = 0) \to \mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z_n = 0\}\Big) = \mathsf{P}(T < \infty) = q \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, из леммы 5.4 получаем:

$$q_n = \mathsf{P}(Z_n = 0) = \varphi_{Z_n}(0) = \varphi(\varphi_{Z_{n-1}}(0)) = \varphi(q_{n-1}).$$

Вероятность вырождения

Доказательство

Так как функция $\varphi(s)$ непрерывна, то $\varphi(q_{n-1}) \to \varphi(q)$ при $n \to \infty$. Таким образом

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(q_{n-1}) = \varphi(q),$$

т. е. q является решением уравнения $s = \varphi(s)$, $s \in [0, 1]$. $\square$

Вероятность вырождения

Отметим, что $s = 1$ всегда является решением уравнения $s = \varphi(s)$. Но при наличии других корней надо уметь отбирать среди них вероятность вырождения. Полную классификацию ситуаций даёт следующая теорема о вероятности вырождения.

Теорема 5.1

Пусть $\{Z_n\}_{n \geqslant 0}$ *— ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Пусть* $\mathsf{P}(\xi = 1) < 1$ *и* $\mu = \mathsf{E}\xi$*. Если* $\mu \leqslant 1$*, то уравнение* $s = \varphi(s)$ *имеет только одно решение* $s = 1$ *на отрезке* $[0, 1]$*. В этом случае* $q = 1$*. Если* $\mu > 1$*, то уравнение* $s = \varphi(s)$ *имеет единственное решение* $s_0 \in [0, 1)$*. В этом случае* $q = s_0$*.*

Замечание

Из теоремы 5.1 следует, что вероятность вырождения q — это наименьший корень уравнения $s = \varphi(s)$ на отрезке $[0, 1]$.

Вероятность вырождения

Доказательство

Пусть $\mu \leqslant 1$. Тогда уравнение $s = \varphi(s)$, $s \in [0,1]$ имеет единственный корень $s = 1$. Действительно, функция $\varphi(s)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$. Производная $\varphi'(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}$ положительна и строго возрастает на $[0,1]$. Значит, $\varphi'(s) < \varphi'(1) = \mu \leqslant 1$ для всех $s < 1$. Отсюда, используя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем:

$$1 - \varphi(s) = \varphi(1) - \varphi(s) = \varphi'(\theta)(1-s) < 1 - s, \quad s < \theta < 1,$$

то есть $s < \varphi(s)$ для всех $s \in [0,1)$. Значит, уравнение $s = \varphi(s)$ не имеет корней из промежутка $[0,1)$. Итак, $q = 1$ в случае $\mu \leqslant 1$.

Вероятность вырождения

Доказательство

Пусть $\mu > 1$. Покажем, что в этом случае наряду с корнем $s = 1$ уравнение $s = \varphi(s)$ имеет ещё один корень $s_0 \in [0, 1)$.
Рассмотрим вторую производную функции $\varphi(s)$:

$$\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2}.$$

Она положительна и строго возрастает на $[0, 1)$, так как $p_k = \mathsf{P}(\xi = k) > 0$ хотя бы для одного $k \geqslant 2$ в силу условия $\mu > 1$ (в противном случае $p_0 + p_1 = 1$ и, значит, $\mathsf{E}\xi \leqslant 1$, что противоречит условию $\mu > 1$).

Вероятность вырождения

Доказательство

Рассмотрим функцию $g(s) = s - \varphi(s)$, $s \in [0, 1]$.
Так как $g'(s) = 1 - \varphi'(s)$ и $\varphi'(s)$ возрастает на $[0, 1]$, то $g'(s)$ убывает на $[0, 1]$ и $g'(1) = 1 - \varphi'(1) = 1 - \mu < 0$,
$g'(0) = 1 - \varphi'(0) = 1 - \mathsf{P}(\xi = 1) > 0$.
Значит, функция $g'(s)$ имеет один корень на $(0, 1)$: $g'(s_1) = 0$ для некоторого $s_1 \in (0, 1)$.
Следовательно, функция $g(s)$ возрастает при $s < s_1$ и убывает при $s > s_1$, то есть имеет локальный максимум в точке s_1 и не может иметь больше двух корней на отрезке $[0, 1]$.

Вероятность вырождения

Доказательство

Если $\varphi(0) = 0$, то уравнение $s - \varphi(s) = 0$ имеет два корня: $s = 0$ и $s = 1$. Но в этом случае, очевидно, $q = 0$, так как $\mathsf{P}(\xi = 0) = \varphi(0) = 0$.
Если $\varphi(0) = \mathsf{P}(\xi = 0) > 0$, то уравнение $s - \varphi(s) = 0$ имеет единственный корень $s_0 \in (0, s_1)$.
Покажем, что в этом случае $q = s_0$.
Предположим, что $q = 1$. Тогда, как показано в лемме 5.5, $q_n = \varphi_{Z_n}(0) \to 1$ при $n \to \infty$. Ещё раз используя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем:

$$1 - \varphi_{Z_{n+1}}(0) = \varphi(1) - \varphi(\varphi_{Z_n}(0)) = \varphi'(\theta_n)(1 - \varphi_{Z_n}(0)),$$

где $\theta_n \in (q_n, 1)$. Так как функция $\varphi'(s)$ непрерывна в точке $s = 1$ и $\varphi'(1) = \mu > 1$, то $\varphi'(\theta_n) > 1$ для всех достаточно больших n.

Доказательство

Отсюда следует, что

$$1 - q_{n+1} = 1 - \varphi_{Z_{n+1}}(0) > 1 - \varphi_{Z_n}(0) = 1 - q_n,$$

то есть $q_{n+1} < q_n$ для всех достаточно больших n, что противоречит неравенству

$$q_n = \mathsf{P}(Z_n = 0) \leqslant \mathsf{P}(Z_{n+1} = 0) = q_{n+1}.$$

Таким образом, $q_n \to s_0$ и, следовательно, $q = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = s_0$. $\square$

Вероятность вырождения

Пример 2. Найдём вероятность вырождения ветвящегося процесса с геометрическим законом размножения частиц: $\mathsf{P}(\xi = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Для этого найдём производящую функцию числа частиц:

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(1-p)^k = \frac{p}{1 - s(1-p)}.$$

Теперь решим квадратное уравнение $s = \varphi(s)$. Это уравнение имеет два корня: $s_1 = 1$ и $s_2 = p/(1-p)$. Мы должны выбрать наименьший корень. Таким образом, получаем ответ:

$$q = \begin{cases} 1, & \text{если } p \geqslant 1/2, \\ \dfrac{p}{1-p}, & \text{если } p < 1/2. \end{cases}$$

Лемма 5.6

Пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ *— ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Пусть* $\mu = \mathsf{E}\xi$. *Тогда* $\mathsf{E}Z_n = \mu^n$. *Если* $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi < \infty$, *то*

$$\mathsf{D}Z_n = \begin{cases} \frac{\mu^{n-1}(\mu^n-1)}{\mu-1}\,\sigma^2, & \text{если } \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \text{если } \mu = 1. \end{cases}$$

Определение 5.3

Ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона называется *докритическим*, если $\mathsf{E}\xi < 1$, *критическим*, если $\mathsf{E}\xi = 1$, и *надкритическим*, если $\mathsf{E}\xi > 1$.

Обозначим $W_n = \dfrac{Z_n}{(\mathsf{E}\xi)^n}$, $n \geqslant 0$.

Теорема 5.2

Пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ *— ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Пусть* $\mathsf{E}\xi > 1$ *и* $\mathsf{D}\xi < \infty$. *Тогда существует случайная величина* W *такая, что* $W_n \to W$ *п. н. и* $\mathsf{E}(W_n - W)^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$

Теорема 5.3

Пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ *— ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Пусть* $\mathsf{E}\xi < 1$ *и* $\mathsf{D}\xi < \infty$ *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(Z_n > 0) \sim C(\mathsf{E}\xi)^n,$$

где C *— положительная постоянная.*

В следующей теореме, принадлежащей А. Н. Колмогорову, находится асимптотика *вероятности невырождения* $\mathsf{P}(T > n) = \mathsf{P}(Z_n > 0)$ при $n \to \infty$ для критического процесса Гальтона — Ватсона.

Теорема 5.4

Пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ *— ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Пусть* $\mathsf{E}\xi = 1$ *и* $0 < \sigma^2 = \mathsf{D}\xi < \infty$ *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(Z_n > 0) \sim \frac{2}{n\sigma^2}.$$

Предельные теоремы

Доказательство

Обозначим $a_n = \mathsf{P}(Z_n > 0)$, $n \geqslant 1$. Тогда $a_n = 1 - \varphi_n(0)$. Следовательно,

$$a_{n+1} = 1 - \varphi_{n+1}(0) = 1 - \varphi(\varphi_n(0)) = 1 - \varphi(1 - a_n) = f(a_n),$$

где $f(s) = 1 - \varphi(1 - s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2}$ сходится при $s = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi''(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \\ &= \mathsf{E}\xi^2 - \mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - 1 = \mathsf{D}\xi = \sigma^2 < \infty. \end{aligned}$$

Доказательство

Следовательно, функция φ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. Значит, и функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$.
Заметим, что $f(0) = 1 - \varphi(1) = 0$, $f'(0) = \varphi'(1) = \mathsf{E}\xi = 1$, $f''(0) = -\varphi''(1) = -\sigma^2$. Тогда по формуле Тейлора получаем:

$$f(s) = s - \frac{\sigma^2}{2} s^2 + o(s^2), \quad s \to 0. \tag{5.1}$$

Так как $\mathsf{E}\xi = 1$, то $a_n = 1 - \mathsf{P}(Z_n = 0) \to 1 - q = 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (5.1) получаем:

$$a_{n+1} = g(a_n) = a_n - \frac{\sigma^2}{2} a_n^2 + o(a_n^2), \quad n \to \infty.$$

Предельные теоремы

Доказательство

Обозначим $b_n = 1/a_n$, $n \geqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \\ &= \frac{a_n^2(\sigma^2/2 + o(1))}{a_n^2(1 - a_n\sigma^2/2 + o(a_n))} \to \frac{\sigma^2}{2}, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

По лемме Кронекера отсюда получаем:

$$\frac{b_n}{n} = \frac{b_1 + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_n - b_{n-1})}{n} \to \frac{\sigma^2}{2}, \quad n \to \infty,$$

то есть $na_n \to 2/\sigma^2$ при $n \to \infty$.

Общее число частиц

Обсудим теперь вопрос об общем числе частиц в ветвящемся процессе. Обозначим $Y_n = 1 + Z_1 + \ldots + Z_n$ — общее число частиц в процессе в момент времени n. Тогда имеет место следующее рекуррентное соотношение между производящими функциями Y_n и Y_{n+1}, аналогичное соотношениям в лемме 5.3 для Z_n:

$$\varphi_{Y_{n+1}}(z) = z\varphi(\varphi_{Y_n}(z)).$$

Далее, для всех $s \in [0, 1)$ существует предел

$$\rho(s) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(s),$$

который можно интерпретировать как производящую функцию общего числа частиц за всё время существования процесса.

Общее число частиц

Пусть Y — общее число частиц в ветвящемся процессе за всё время (если процесс не выродился, то, конечно, $Y = +\infty$). Тогда

$$\rho(s) = \mathsf{E}(s^Y; Y < +\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathsf{P}(Y = k).$$

Лемма 5.7

Функция $\rho(s)$ *является решением уравнения* $\rho(s) = s\varphi(\rho(s))$*.*