СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2025

Оглавление

Ветвящиеся процессы

В настоящей главе мы рассмотрим ветвящиеся процессы Гальтона — Ватсона.
Модель ветвящихся процессов возникла в 1873 г. в результате изучения статистиком Фрэнсисом Гальтоном и математиком Генри Ватсоном вопроса исчезновения английских аристократических фамилий.
Термин «ветвящийся случайный процесс» впервые был введён в 1947 году в работе А. Н. Колмогорова и Н. А. Дмитриева «Ветвящиеся случайные процессы».

Ветвящиеся процессы

Опишем модель Гальтона — Ватсона. Пусть в нулевом поколении имеется одна частица. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. В конце жизни частица производит случайное число потомков ξ в соответствии с распределением

$$\mathsf{P}(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Эти частицы образуют первое поколение. Каждая из новорождённых частиц также имеет единичную продолжительность жизни и в конце её производит (независимо от остальных частиц) случайное число потомков в соответствии с тем же вероятностным распределением $\{p_k : k = 0, 1, \dots\}$. Получается второе поколение и т. д.

Обозначим Z_n — число частиц в n-м поколении, $\xi_{i,n}$ — число потомков i-й частицы n-го поколения, причём $\{\xi_{i,n} \colon i, n \geqslant 1\}$ — независимые случайные величины с тем же распределением, что и ξ. Таким образом, $Z_0 = 1$ и при $n \geqslant 0$

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n}.$$

Определение 4.1

Последовательность $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *ветвящимся процессом Гальтона — Ватсона.*

Удобным аппаратом для работы с ветвящимися процессами являются производящие функции.

Определение 4.2

Производящей функцией случайной величины ξ, принимающей целые неотрицательные значения, называется функция $\varphi(z)$ комплексного аргумента z, определяемая равенством

$$\varphi(z) = \mathsf{E} z^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}(\xi = k).$$

Этот степенной ряд сходится абсолютно в области $|z| \leqslant 1$ и является бесконечно дифференцируемой функцией в области $|z| < 1$.

Отметим некоторые свойства производящих функций.

Лемма 4.1

1. *Пусть* $\varphi(z)$ *— производящая функция неотрицательной целочисленной случайной величины* ξ. *Тогда* $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = \mathsf{E}\xi$ *и* $\varphi(0) = \mathsf{P}(\xi = 0)$.

2. *Пусть* ξ *и* η *— независимые неотрицательные целочисленные случайные величины с производящими функциями* $\varphi_\xi(z)$ *и* $\varphi_\eta(z)$ *соответственно. Тогда* $\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z)\varphi_\eta(z)$.

Доказательство

Равенства $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(0) = \mathsf{P}(\xi = 0)$ очевидны. Покажем, что

$$\varphi'(1) = \mathsf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathsf{P}(\xi = k).$$

Действительно, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mathsf{P}(\xi = k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$, то из леммы 2.8 следует, что сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$ функцией и этот ряд можно почленно дифференцировать на отрезке $[0, 1]$.

Тогда $\varphi'(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k$ и, значит, $\varphi'(1) = \mathsf{E}\xi$.

Доказательство

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k = +\infty$. Тогда для любого $N \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\varphi'(1) &= \lim_{s\to 1} \frac{\varphi(s)-\varphi(1)}{s-1} = \lim_{s\to 1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}(s^k-1)p_k}{s-1} = \\
&= \lim_{s\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} (1+s+\ldots+s^{k-1})p_k \geqslant \\
&\geqslant \lim_{s\to 1} \sum_{k=1}^{N} (1+s+\ldots+s^{k-1})p_k = \sum_{k=1}^{N} kp_k.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\varphi'(1) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k = +\infty$.

Доказательство

Докажем второе утверждение. Так как ξ и η независимы, то

$$\varphi_{\xi+\eta}(z) = \mathsf{E} z^{\xi+\eta} = \mathsf{E} z^{\xi} \mathsf{E} z^{\eta} = \varphi_{\xi}(z)\varphi_{\eta}(z).$$

□

Пример 1. Найдём производящую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона с параметром λ:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \mathsf{E} z^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathsf{P}(\xi = n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.\end{aligned}$$

Лемма 4.2

Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин (целочисленных и неотрицательных) с производящей функцией* $\varphi_\xi(z)$.
Пусть ν *— неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от* $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ *и имеющая производящую функцию* φ_ν.
Тогда производящая функция суммы случайного числа слагаемых $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ *(*$\eta = 0$*, если* $\nu = 0$*) определяется равенством*

$$\varphi_\eta(z) = \varphi_\nu(\varphi_\xi(z)).$$

Доказательство

В силу независимости случайных величин $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$, из леммы 4.1 имеем:

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(z) = \varphi_{\xi_1}(z)\cdot\ldots\cdot\varphi_{\xi_n}(z).$$

Далее, используя одинаковую распределённость величин $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$, независимость ν от $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ и равенство $1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbf{I}(\nu = k)$, получаем:

$$\begin{aligned}
\varphi_\eta(z) &= \mathsf{E}z^{\xi_1+\ldots+\xi_\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\Big(z^{\xi_1+\ldots+\xi_\nu}\mathbf{I}(\nu = k)\Big) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\Big(z^{\xi_1+\ldots+\xi_k}\mathbf{I}(\nu = k)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}z^{\xi_1+\ldots+\xi_k}\mathsf{P}(\nu = k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\mathsf{E}z^{\xi_1}\Big)^k\mathsf{P}(\nu = k) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_\xi^k(z)\mathsf{P}(\nu = k) = \varphi_\nu(\varphi_\xi(z)). \qquad \square
\end{aligned}$$

Лемма 4.3

Пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ *— ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Тогда* $\varphi_{Z_{n+1}}(z) = \varphi_{Z_n}(\varphi(z))$.

Доказательство

Так как $Z_{n+1} = \xi_{1,n} + \ldots + \xi_{Z_n,n}$ и Z_n не зависит от набора независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{\xi_{i,n}\}_{i\geqslant 1}$, то из леммы 4.2 получаем требуемое равенство. □

Обозначим n-кратную итерацию функции $\varphi(z)$ через $\varphi_{(n)}(z)$:

$$\varphi_{(n)}(z) = \underbrace{\varphi(\varphi(\ldots\varphi}_{n \text{ раз}}(z)\ldots)).$$

Лемма 4.4

Пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 0}$ — ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона. Тогда $\varphi_{Z_n}(z) = \varphi_{(n)}(z)$ и $\varphi_{Z_n}(z) = \varphi(\varphi_{Z_{n-1}}(z))$.

Доказательство

Из леммы 4.3 по индукции находим, что

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(z) &= \varphi_{Z_{n-1}}(\varphi(z)) = \varphi_{Z_{n-2}}(\varphi(\varphi(z))) = \ldots = \varphi_{Z_1}(\varphi(\ldots\varphi(z)\ldots)) = \\ &= \varphi_{(n)}(z).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_{Z_n}(z) = \underbrace{\varphi(\varphi(\ldots\varphi}_{n \text{ раз}}(z)\ldots)) = \varphi(\varphi_{Z_{n-1}}(z)).$$

$\square$